

高等学校教学用书

高等数学教程

第三卷 第二分册

В. И. 斯米尔諾夫著

商 務 印 書 館

高等学校教学用书



高等数学教程

第三卷 第二分册

B. И. 斯米尔諾夫著
叶 彦 謙 譯

商务印书馆

本書係根據蘇聯技術理論書籍出版社 (Государственное издательство техники—теоретической литературы) 出版的斯米爾諾夫 (В. И. Смирнов) 著“高等數學教程”(Курс высшей математики) 第三卷 1952 年第十一版譯出。原書經蘇聯高等教育部審定為綜合大學數理系及高等工業學院需用較高深數學的各系教科書。

本書係榮獲斯大林獎金的著作。

本書 (第三卷) 中譯本暫分三冊出版。

本書 (第三卷) 自第四版起分為兩冊。上冊講線性代數, 下冊講複變函數論。本冊為原著第三卷下冊的前三章, 包括: 複變函數論基礎, 保角變換和平面場、留數理論的應用、整函數和分函數。理論部分敘述扼要, 應用部分敘述詳盡, 適合力學、物理、電機、航空需用複變函數各專業作為教材或參考書之用。

本書由南京大學葉彥謙翻譯, 北京大學孫念增校閱。

高等数学教程

第三卷 第二分冊

叶彦謙譯

★ 版權所有 ★

商務印書館出版

上海河南中路二一號

(上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號)

新華書店總經售

商務印書館上海廠印刷

(13017·43)

1953年10月初版

1956年4月4版

1956年12月上海第4次印刷

印張97/16

開本850×1168 1/32

字數278,000

印數28,501—38,500

定價(8) 1.10

第四版序言

在這一版裏第三卷被分成兩部，現在的第三部包含從前第三卷中複變數函數論的基礎那一章以後的內容，其中除若干問題的敘述已有變更外並且還添加了新的材料。這些新材料主要的是勾犀型積分及用最速下降法求積分近似值方面的研究。關於後一問題彼得拉申教授在行文上與我以極大的幫助，茲於此對他表示衷心的感謝。

書中凡引證以前幾卷或本冊已證的結果時都用簡寫符號。例如 [III₁, 44] 表示第三卷第一部第四十四節，[23] 表示本冊第二十三節。

一九四九年六月一日

B. 斯米爾諾夫

第二分册目次

第一章 複變數函數論的基礎	1
1. 複變數函數	1
2. 導數	2
3. 保角變換	13
4. 積分	16
5. 勾犀定理	19
6. 積分學的基本公式	22
7. 勾犀公式	25
8. 勾犀型積分	30
9. 勾犀公式的推論	33
10. 孤立奇異點	35
11. 具複數項的無窮級數	38
12. 維爾史特拉斯定理	40
13. 冪級數	43
14. 泰勒級數	46
15. 羅朗級數	48
16. 例題	52
17. 孤立奇異點、無限遠點	57
18. 解析延拓	61
19. 多值函數的例子	70
20. 解析函數的奇異點和黎曼曲面	78
21. 留數定理	82
22. 關於零點的個數的定理	85
23. 冪級數的反演	89
24. 對稱原理	93
25. 收斂圓周上的泰勒級數	96
26. 積分的主值	100
27. 積分的主值(續)	103
28. 勾犀型積分	107
第二章 保角變換和平面場	113
29. 保角變換	113
30. 線性變換	116
31. 分式線性變換	118
32. 函數 $w = z^2$	127
33. 函數 $w = \frac{k}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$	128
34. 二角形和帶域	132
35. 基本定理	134
36. 克利斯多夫公式	137
37. 特別情形	144
38. 多角形的外部	148
39. 變換區域為圓的函數的極小性質	151

40. 共軛三角級數法	154
41. 穩定平面液流	160
42. 例題	162
43. 完全環流的問題	166
44. 朱可夫斯基公式	167
45. 平面靜電問題	169
46. 例題	172
47. 平面磁場	176
48. 舒伐爾茲公式	176
49. 核 $\operatorname{ctg} \frac{s-t}{2}$	179
50. 邊值問題	182
51. 重調和函數	185
52. 波動方程和解析函數	188
53. 基本定理	190
54. 平面波的繞射	197
55. 彈性波的反射	201
第三章 留數理論之應用, 整函數和分函數	207
56. 夫雷內爾積分	207
57. 帶有三角函數的積分	208
58. 有理分式的積分	210
59. 幾種帶有三角函數的新型積分	211
60. 約當輔助定理	214
61. 若干函數的路積分表示	216
62. 多值函數積分的例子	219
63. 係數為常數的線性方程組的積分	223
64. 分函數的最簡分數展開式	228
65. 函數 $\operatorname{ctg} z$	232
66. 半純函數的建造	235
67. 整函數	236
68. 無窮乘積	238
69. 由零點決定整函數	241
70. 含參變數的積分	244
71. 第二類尤拉積分	247
72. 第一類尤拉積分	252
73. 函數 $[\Gamma(z)]^{-1}$ 的無窮乘積表示	253
74. $\Gamma(z)$ 的路積分表示式	259
75. 史斗林公式	262
76. 尤拉求和公式	266
77. 白諾利數	269
78. 最速下降法	270
79. 決定積分的主要部分	272
80. 例題	278
名詞對照表 I	286
名詞對照表 II	292

第一章 複變數函數論的基礎

1. 複變數函數 在講微積分的時候，我們假定自變數和他的函數都祇取實數值。進之，當我們考察最初等的函數，即多項式，以作研究高等代數的基礎時，便要討論到自變數取複數值時的情形了。本章的目的就是要把解析學的基礎推廣到複變數函數的情形。

例如取一多項式

$$f(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,$$

其中 a_k 都是已知的複數。假如我們現在讓自變數 z 也能取任意的複數值的話，那末對於 z 的任何複數值，函數 $f(z)$ 就是有意義的。相仿的，對有理函數

$$\frac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_m},$$

或具有根號的函數，如 $\sqrt{z-1}$ ，
都可以這樣去解釋他。

在第一卷第六章裏我們曾定義了一些當自變數取複數值時的初等超越函數。即對於指數函數有：

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)。$$

藉這樣定義的指數函數又可以定義複變數的三角函數

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i};$$

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2};$$

$$(1) \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{1}{i} \frac{e^{i2z} - 1}{e^{i2z} + 1};$$

$$\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = i \frac{e^{i2z} + 1}{e^{i2z} - 1}.$$

再回憶複數的自然對數的定義：

$$(2) \quad \lg z = \lg |z| + i \arg z,$$

其中 $|z|$ 是 z 的模， $\arg z$ 是 z 的幅角。藉此考慮 (1) 式中諸函數的反函數，就引向複變數的反三角函數

$$\arcsin z, \arccos z, \operatorname{arctg} z, \operatorname{arccotg} z.$$

不難說明，這些函數能夠通過對數來表達。

例如，置
$$z = \operatorname{tg} w = \frac{e^{i2w} - 1}{i(e^{i2w} + 1)},$$

則
$$i(e^{i2w} + 1)z = e^{i2w} - 1,$$

或
$$e^{i2w} = \frac{1 + iz}{1 - iz}.$$

分子分母同以 i 乘，再取對數，得

$$w = \operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i} \lg \frac{i - z}{i + z}.$$

完全一樣，如令

$$z = \sin w = \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i},$$

則得 e^{iw} 的二次方程

$$e^{2iw} - 2iz e^{iw} - 1 = 0,$$

因此

$$e^{iw} = iz \pm \sqrt{1 - z^2},$$

從而

$$w = \frac{1}{i} \lg(iz \pm \sqrt{1 - z^2}),$$

這裏根號應當取正負兩種數值。

以後就會看到，所有上述這些複變數的初等函數都有導數，且這些

導數也是複變數函數。就是說，對這些函數，比率

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}$$

當複改變量 Δz 趨向零時有一定的極限值。這一章的全部就在替有導數的複變數函數的理論奠一個基礎。我們將會看到這套理論一方面是以非常嚴格和簡潔著稱，而另一方面在許多自然科學和專門技術的部門中又有他廣大的應用。本章中先說他的理論的大概，在以後各章裏面再講他的應用。我們希望用這辦法可以達到比較嚴格和簡潔的行文。

以後我們常要用到複數的幾何解釋法，這早在[I, 170]中已講過。現在再略述其中的一些基本概念。在平面中取直角坐標軸 OX 和 OY ，那末對平面上每點就可以兩個實數坐標 (x, y) 或一個複數坐標 $x+iy$ 和他對應，後者是我們以後要用的。在這意義下，平面稱為複平面， X 軸稱為實軸， Y 軸稱為虛軸。對於複數除了這種點的解釋法以外，在以後各章中我們主要地還要用到一種向量的解釋法，那就是對於複數 $x+iy$ 以一個在兩坐標軸方向的支量為 x 及 y 的向量和他對應。這兩種解釋之間的關係是很顯然的。即如從原點到 $x+iy$ 點引一向量，那末他就是對應於複數 $x+iy$ 的向量了。一般，如平面上一向量的起點 A 的坐標是 a_1+ia_2 ，終點 B 的坐標是 b_1+ib_2 ，則向量 $\overline{AB}$ 所對應的複數就等於終點坐標與起點坐標之差，即

$$(b_1-a_1)+i(b_2-a_2)。$$

關於複數的加減乘除，可以參看[I, 170 和 172]。兩個複數的和所對應的向量是各個複數所對應的向量的和。複數的模就是他所對應的向量的長度，幅角就是這向量和 X 軸的交角。當複變數 z 變動時，對應點也就在平面上移動。

我們稱 $z = x + iy$ 趨向極限 $\alpha = a + ib$, 這裏 a 和 b 是常數, 假如 z 和 α 之差的模

$$|\alpha - z| = \sqrt{(a-x)^2 + (b-y)^2}$$

趨向零。

因爲上式根號裏面兩項都是正的, 故知 $|\alpha - z| \rightarrow 0$ 實與

$$x \rightarrow a, \quad y \rightarrow b$$

兩式相抵。因之

$$x + iy \rightarrow a + ib$$

也就和

$$x \rightarrow a, \quad y \rightarrow b$$

兩式相抵了。

由此顯然可見坐標爲 $z = x + iy$ 的變動點 M 趨向坐標爲 $\alpha = a + ib$ 的固定點 A 的意義實與通常平面上一點趨向其極限位置的意義符合。不難證明普通關於極限之加減乘除的定理對複變數也一樣成立, 這我們不想詳細說了。

又由上述極限的定義容易知道 $z \rightarrow 0$ 和 $|z| \rightarrow 0$ 相抵。如果 $z \rightarrow \alpha$, 則 $|z| \rightarrow |\alpha|$ 。

對複變數, 勾犀判別極限存在的準則也成立。例如設

$$z_1 = x_1 + iy_1;$$

$$z_2 = x_2 + iy_2; \dots;$$

$$z_n = x_n + iy_n; \dots$$

爲一複數鈗列。這鈗列極限的存在和兩實數鈗列 x_n 與 y_n 的極限都存在相抵。但後兩極限存在的充要條件是: 對所有充分大的 n 和 m , $|x_n - x_m|$ 和 $|y_n - y_m|$ 可任意小。參看 [I, 31]。

但由 $|z_n - z_m| = \sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2}$

及根號裏面兩項皆爲正, 可知 z_n 的極限存在的充要條件是: 對所有充分大的 m 和 n , $|z_n - z_m|$ 可任意小。嚴格些說就是: 對任一已給正數 ε ,

存在一正整數 N , 使 $|z_n - z_m| < \varepsilon$, 祇要 n 和 m 都大於 N 。一般, 複變數 z 的行程不一定是如上所設的可數點集。那末我們應該仿照 [I, 25] 一樣在 z 的全部行程中定出一個次序來。而極限存在的充要條件就可以這麼說: 對任一已給正數 ε , 存在 z 之一值 z_0 , 使得 $|z' - z''| < \varepsilon$, 祇要 z' 和 z'' 是任意兩個在 z_0 後面的 z 的值。又以後我們稱複變數 z 趨向無限, 如果 $|z| \rightarrow +\infty$ 。

現在我們回過來看複變數函數

$$w = f(z),$$

並約定幾個名詞。函數 $f(z)$ 可以在整個複平面上都有定義, 也可以祇在平面上某一區域內有定義, 如圓, 長方形, 環, 等等之內。在所有這些區域裏面, 我們可以區別他的內點和境界點。例如當這區域是以原點做中心的單位圓時, 其內點就是滿足條件

$$|z| < 1 \quad \text{或} \quad x^2 + y^2 < 1$$

的點的全體。境界點的全體就是圓周

$$|z| = 1 \quad \text{或} \quad x^2 + y^2 = 1。$$

區域的內點的特徵是: 不但他們自己, 並且他們有一個鄰域全部屬於這個區域。換句話說, 一點 M 是某區域的內點, 假如有一個以 M 做中心的很小的圓全部屬於此區域的話。區域的境界點雖然不是他的內點, 但在其任意小的鄰域中一定有區域的內點存在。此外, 還要規定我們的區域並不分為許多分開的小塊(區域之連通性)。換言之, 我們將常假定區域中任何兩點都可以用一條線連接起來, 這條線上面的點全部屬於這個區域。依照慣例, 以後我們用到區域這兩字時, 就祇指他的內點的全體。如果連境界點也在內的話, 我們就稱他做閉區域。此外, 如一區域中所有的點和原點的距離都小於一個有限數, 則此區域稱為有界。關於區域的其他特徵將在以後補充。

現在再回頭來考察函數 $w=f(z)$ 。假設這函數係在某一區域 B 的內部所定義，即對 B 內部任一點 z ， $f(z)$ 必有一定的複數值（我們祇說單值函數）。設 z_0 為 B 中一點，如果當 $z \rightarrow z_0$ 時， $f(z) \rightarrow f(z_0)$ ，則稱函數 $f(z)$ 在 z_0 為連續。這就是說，對任一已給正數 ε ，存在一正數 η ，使當 $|z - z_0| < \eta$ 時有 $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ 。若 $f(z)$ 在 B 中每一點都連續，則稱他在 B 中連續。函數 $f(z)$ 有時不但可在 B 中有定義，並且也可以在 B 的境界線 l 上有定義，即 $f(z)$ 在閉區域 B 中有定義。這時若 $f(z)$ 在閉區域 B 中每一點都連續，則稱 $f(z)$ 在閉區域 B 中為連續。當定義函數在境界線 l 上一點 z_0 的連續性時，須注意這時 z 可以用任何方式趨向 z_0 ，但不能離開閉區域 B 。和實變數一樣，[I, 43] 的定理仍成立：若 $f(z)$ 在閉有界區域中為連續，則在這區域中必為一致連續。就是說，對任一已給正數 ε ，存在一正數 η （對全區域祇有一個），使當 $|z_1 - z_2| < \eta$ 時， $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ ，這裏 z_1 和 z_2 是閉區域中任意兩點。

把 z 和 $w=f(z)$ 分寫做實數部份和虛數部份：

$$z = x + iy;$$

$$w = f(z) = u + iv。$$

給 z 一值就是給 x 和 y 各一值，給 $f(z)$ 一值就是給 u 和 v 各一值，因此 u 和 v 必定是 x 和 y 的函數：

$$(3) \quad w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)。$$

對於初等函數，祇須用簡單的運算就可把實數部份和虛數部份分開。例如：

$$w = z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + 2ixy。$$

置 $z_0 = x_0 + iy_0$ ，由前知 $z \rightarrow z_0$ 與 $x \rightarrow x_0$ ， $y \rightarrow y_0$ 兩式相抵。

如果函數在 z_0 點為連續，那末當 $z \rightarrow z_0$ 時，即 $x \rightarrow x_0$ ， $y \rightarrow y_0$ 時，應有

$$f(z) \rightarrow f(z_0)，$$

或 $u(x, y) + iv(x, y) \rightarrow u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0),$

這和 $u(x, y) \rightarrow u(x_0, y_0)$

$v(x, y) \rightarrow v(x_0, y_0)$

兩式相抵。因此知道 $f(z)$ 在 z_0 點為連續與 $u(x, y), v(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 點為連續相抵。

把函數分開做實數部份和虛數部份，再用初等實函數的連續性質，我們可以證明多項式， e^z ， $\sin z$ ， $\cos z$ 等都是全平面上的連續函數。有理分式也是處處連續，除了那些使他的分母為零的點以外。

要講更進一步的理論，我們得先講單值函數，以後再特別考慮多值函數的問題。多值函數例如 $\sqrt{z-1}$ ， $\lg z$ 以及反三角函數等都是。

2. 導數 假設 $f(z)$ 在 z 點和他的某一鄰域內已有定義。導數 $f'(z)$ 我們已經照常例定義做比率

$$(4) \quad \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

的極限。這時極限值須是有限。並且不論複改變量 Δz 依照什麼規律趨向零，極限值常為一定。

和實變數的情形一樣，不難證明求導數時常數因子可以拿到導數符號之外來，並且通常關於和，積，商的微分的定理對複函數也一樣成立 [I, 47]。此外，用牛頓二項式公式易證關於指數為正整數的冪函數的微分規則 [I, 47] 對複函數也成立：

$$(5) \quad (z^n)' = nz^{n-1}.$$

這樣我們就可斷言多項式在任何一點 z 的導數都存在，而有理分式則除在使他的分母為零之點以外處處有導數。

進之，通常關於複合函數的微分規則也成立：

$$(6) \quad F'_z(w) = F'_w(w) \cdot w'_z.$$

當然，這時等式右邊兩個導數都要存在。又和實變數一樣，如果 $f(z)$ 在某點的導數存在，那末他在這點必為連續 [I, 45]。

如果函數 $f(z)$ 在某區域 B 中已有定義，而且在 B 裏面的每一點都有導數，就簡稱 $f(z)$ 在區域 B 中有導數。這導數也是 B 中的單值函數。

現在引進一個新的重要的定義。我們稱 $f(z)$ 在 B 中為正則，如果他在 B 中為單值而且有連續的導數 $f'(z)$ 。由前所述，可知這時 $f(z)$ 在 B 中當然為連續。有時也稱 $f(z)$ 在一點 z_0 為正則，這是指 $f(z)$ 在包含 z_0 的某一區域中為正則的意思。

回到 (3) 式，在那裏 z 和 $f(z)$ 都被分開成實數部份和虛數部份，我們問：函數 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 應該滿足什麼條件時， $f(z)$ 纔能在 B 中為正則。現在先假設 $f(z)$ 在 B 中為正則，看由此可以引出關於 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 的什麼結果來。

我們早已說過，當導數存在時，其值和複改變量 $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ 趨向零的方式無關。今在 B 中任取一點 M ，坐標為 $z = x + iy$ ，又取一動點 N ，坐標為 $z + \Delta z = (x + \Delta x) + i(y + \Delta y)$ ，且 N 趨向 M 。現在試看 N 趨向 M 的兩種不同方式。第一種方式是： N 沿一平行於 X 軸的直線趨向 M 。這時有：

$$(7) \quad \Delta y = 0 \quad \text{而} \quad \Delta z = \Delta x。$$

第二種方式是： N 沿一平行於 Y 軸的直線趨向 M 。這時有：

$$(8) \quad \Delta x = 0 \quad \text{而} \quad \Delta z = i\Delta y。$$

現在對這兩種情形來求 $f'(z)$ 。在一般情形我們有：

$$(9) \quad f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} =$$

$$= \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{[u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y)] + i[v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y)]}{\Delta x + i\Delta y}。$$

因此當 N 照第一種方式趨向 M 時,有:

$$f'(z) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right].$$

這樣,等式右邊的實數部份和虛數部份就都應該有極限,就是說,函數 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 應該有關於 x 的偏導數,並且下式成立:

$$(10) \quad f'(z) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial x}.$$

同樣,如果 N 照第二種方式趨向 M 的話,則由(8)和(9)應有:

$$f'(z) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{i} \left[\frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} + i \frac{v(x, y + \Delta y) - v(x, y)}{\Delta y} \right]$$

或

$$(11) \quad f'(z) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} - i \frac{\partial u(x, y)}{\partial y}.$$

比較(10)和(11)的右邊,就得到 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 應滿足的條件:

$$(12) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} &= \frac{\partial v(x, y)}{\partial y}; \\ \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} &= -\frac{\partial u(x, y)}{\partial y}. \end{aligned}$$

注意:由 $f'(z)$ 的連續性和(10), (11)兩式可知 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 有連續的一階偏導數。由以上的論斷我們得到下面的結果: 要 $f(z)$ 在 B 中爲正則,必須 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 B 中有關於 x 和 y 的連續一階偏導數,並且這些偏導數要滿足(12)式中的兩個關係。

現在再證明這些條件對 $f(z)$ 在 B 中爲正則不但是必要而且也是充分的。爲此,我們假定上面的條件已經成立,再來證明 $f'(z)$ 的存在和連續。由假設 $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 關於 x 和 y 的一階偏導數都是連續的,所以可寫[I, 68]:

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y,$$

$$v(x+\Delta x, y+\Delta y) - v(x, y) = \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y,$$

其中 ε_k 和 $\Delta x, \Delta y$ 一齊趨向零。利用上二式求出函數 $f(z)$ 的改變量 $f(z+\Delta z) - f(z)$, 代入(4)式得:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \\ &= \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y \right) + (\varepsilon_1 + i\varepsilon_3) \Delta x + (\varepsilon_2 + i\varepsilon_4) \Delta y}{\Delta x + i\Delta y}, \end{aligned}$$

利用(12)式的條件, 上式可改寫為:

$$\begin{aligned} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \\ &= \frac{\frac{\partial u}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y) + i \frac{\partial v}{\partial x} (\Delta x + i\Delta y)}{\Delta x + i\Delta y} + \varepsilon_5 \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + \varepsilon_6 \frac{\Delta y}{\Delta x + i\Delta y}, \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_5 = \varepsilon_1 + i\varepsilon_3, \quad \varepsilon_6 = \varepsilon_2 + i\varepsilon_4$

和 Δz 一齊趨向零。

易知上面的等式右邊最後兩項也趨向於零。例如:

$$\left| \varepsilon_5 \frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} \right| = |\varepsilon_5| \frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}},$$

右邊第一個因子趨向零, 而第二因子不大於一。

這樣我們就有

$$\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + i \frac{\partial v(x, y)}{\partial y} + \varepsilon_7,$$

其中 ε_7 和 Δz 一齊趨向零, 而等式右邊前面兩項和 Δz 無關。因此, (4)式的比率就趨向一定的極限, 恰如(10)式所定義的一般, 而前述條件是 $f(z)$ 在 B 中為正則的充要條件也就得以證明了。(12)中兩等式通常稱為勾犀黎曼方程。

其實這兩個方程我們早已經見過，就是在研究理想不可壓縮液體的穩定平面流動時，速度勢和流函數須滿足這兩個方程[II, 74]。因此我們知道複變數函數論的基本方程(12)同時也是研究流體力學的基本方程。基於這事實，複變數函數論在流體力學上有許多的應用，我們在下一章將要講到。

現在再注意一件可以由(12)式導出的重要事實。以後我們將會知道，當 $f(z)$ 為正則時， $u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 的任何階偏導數都存在。現在先用一用他們的二階偏導數存在這一件事再說。將(12)中第一式對 x 求偏導數，第二式對 y 求偏導數，相加得

$$(13_1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0。$$

同樣由(12)可導出

$$(13_2) \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0。$$

由此可知，正則函數 $f(z)$ 的實數部份和虛數部份都要滿足拉普拉斯方程，這就是說，他們應該都是調和函數。在下一章中我們還要詳細研究複函數論和拉普拉斯方程間的關係。

從(13)還可以導出一件重要的事實，就是如果已知一個正則函數的實數部份，我們可以作出這個函數來。這時 $u(x, y)$ 當然是(13₁)的一個解，我們要證明 $v(x, y)$ 除了一個常數項以外可以唯一決定。其實，由(12)式有：

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy，$$

因此

$$(14) \quad v(x, y) = \int^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + C。$$