GAILULUN JICHU

概率论基础

杨揩勋

中南工业大学出版社

概 率 论 基 础

杨 撸 勋

一 九 八 七 年

内 容 简 介

本书系参照高校概率论教学大纲的要求，以作者多年讲授概率论课程的讲义为基础，秉着有利于读者自学的精神编写而成。全书共五章：事件及其概率；随机变量及其分布；多维随机变量；随机变量的数字特征；极限定理。每章均分三大部分：教学内容、基本要求和学习指导。书末还配备了大量的习题及解答。

本书通俗易懂，便于自学。既可作高校有关专业的教学用书或教学参考书，也可作为具有高等数学知识的有关人员作自学用书。

概 率 论 基 础

杨摺勋 编

责任编辑 王树勋

中南工业大学出版社出版发行

湖南省地质测绘印刷厂印装

*

开本：787×1092 1/32 印张· 11.625 字数：271千字

1987年6月第1版 1987年6月第1次印刷

印数：0001—3000

*

ISBN 7-81020-069-0/O·011

统一书号：13442·026 定价：1.90元

前　　言

概率论是一门应用比较广泛的学科。随着我国“四化”建设的发展，概率论知识在我国各方面的应用也与日俱增。目前，不仅各类成人和普通高校的理、工、农、医、师等院校的在校学生正在学习概率论，而且广大走自学成才道路的青年以及一些科技、工程人员也正在自学概率方面的知识，以适应工农业生产发展和科学实验的需要。但由于概率论是研究随机现象规律性的学科，有其独特的概念和方法。初学者往往感到它的基本概念难于理解，习题不好做，方法不易掌握。为了帮助读者克服这些困难，特参照成人和普通高校概率论教学大纲的要求，秉着有利于自学的精神编成此书。全书各章均分为三大部分：

一、教学内容部分，详尽地介绍了读者应掌握的内容及注意事项，通俗易懂，深入浅出，便于自学；

二、基本要求部分，对每一章内容应掌握的程度提出了具体要求，可供读者在自学时作自我检查的依据；

三、学习指导部分，对一些重要名词、定义的含义及初学者容易混淆的地方进行辨析和阐释；对一些公式和定理的证明中的难点进行剖析；对解题过程中在方法上常见的错误也采用正反对比方法进行分析，并补充了教学内容未提及的一些必要参考资料，以扩大读者的知识范围。

此外，本书还配备了大量的习题，并附有参考解法，供读者练习和自我检查之用。

本书在编写过程中，得到了我院数学科许多老师和学员的热情帮助，并蒙欧阳禄教授和关家骥副教授审阅了原稿，提出了宝贵的修改意见，在此，一并表示由衷的感谢！

由于本人水平不高，书中挂一漏万和错误不妥之处，在所难免。特别是象本书这样把知识内容，基本要求和学习指导合在一起，尚属初创，是否有当，敬请广大读者批评指正。

杨搢勋

1986年于衡阳市教师进修学院

目　录

2

第一章　事件及其概率

一、教 学 内 容

§1 概率论研究的对象

概率论是研究随机现象的规律性的一门学科。

什么叫随机现象呢？在自然界里，在生产实践和科学实验中，人们观察到的现象，大致可归纳为两类：

一类是在事前可预言其结果的。如向上抛掷一颗石头，必然下落；在一个大气压下，水在100 ℃时必然沸腾……这种在一定条件下能事先肯定其结果的现象叫做确定性现象或必然现象。

另一类现象是事前无法预言其结果的。如一条河流每年出现洪峰的时间和最大洪水量；某城市一年几遇的暴雨量……这种现象在一定条件下可能出现也可能不出现，我们称之为随机现象或偶然现象。

随机现象，个别看来似乎是杂乱无章，没有什么规律。但决不是像唯心论者所认为的那样，是什么“超自然规律的”、“人类无法把握的”现象。而是如恩格斯所指出的：“在表面上是偶然性在起作用的地方，这种偶然性往往是受内部的隐蔽着的规律支配的，而问题只在于发现这些规律。”当人们对大量的随机现象进行观察时，它们也常有客观的必然规律存在。例如，当一个射手用同一支枪在同一地点向同一目标进行多次射击时，我们将会发现其命中次数与

射击次数之比是改变不大的。而且常把这个比值叫做他的命中率（即命中目标的可能性的大小）；又如，根据各个国家各个时期的人口统计资料，新生婴儿中男婴和女婴的比大约总是1∶1。

既然大量的同类随机现象也有客观的必然规律存在，我们对它进行研究并掌握其规律就具有很大的实际意义。例如，在建筑一个水坝时，就必须了解水文情况，而水文情况是一个随机现象。一条河流的最大洪水位不是每一年都一样的，那么修建一个水坝应该根据什么样的洪水位呢？如果水坝修的过高，当然可以防止洪水，但这样不经济；如果修低了，很可能在发生大洪水时，把水坝冲垮，这就要求我们掌握该河流发生洪水的规律，而后进行设计和施工，才会使水坝建筑得合理适用。

用什么作工具来研究大量随机现象的规律性呢？概率论便是以研究大量随机现象所呈现的规律为对象的一门学科，籍助它可以使随机现象也渐渐进入我们掌握之中，从而更有利于我们循着自然规律来认识世界，改造世界。正由于此，我们学好这门学科就很有必要了。

§2 随机试验

在研究随机现象时，为了判断在某一条件组实现下随机现象发生的情况，往往要进行试验。例如：

1. 抛一枚硬币，看是正面朝上还是反面朝上；

2. 设一批产品中含有一部分废品，我们从中任意取出4个，看有几个废品？

3. 一门大炮对目标一次一次地轰击，直到击中才停止轰击，记录轰击的次数是多少？

这三个试验有三个共同点：

1．可以在相同条件下重复地进行；

2．每次试验的可能结果不只一个，但能事先明确试验的所有可能结果；

3．进行一次试验之前，不能确定哪一个结果会出现。

我们将具有这三个特点的试验叫做随机试验，简称为试验。

§3 随机事件

某随机试验，在一次试验中可能出现也可能不出现的事情，称为此随机试验的随机事件，简称为事件。例如，在§2抛掷硬币的试验中，“正面朝上”是一个事件，“反面朝上”也是一个事件。又如，在§2观察废品个数的试验中，“有一个废品”、“没有废品”、“废品数不超过2”等都是事件。以后我们将用A、B、C等一些大写英文字母表示事件。

由于随机试验是在一定的条件下进行的。如抛掷硬币的试验，“硬币是质地均匀的，放在手心上，用一定的动作向上抛，让硬币自由地落在具有弹性的桌面上”等等就均是条件，在这些条件（我们称之为条件组）下，进行一次试验，即抛掷一次，“出现正面”这一事件可能发生，也可能不发生。因此，随机事件也可称之为在一定条件组下可能发生也可能不发生的事件。

随机事件有简单或复杂之分。凡不能再分的事件叫做简单事件。由简单事件复合而成的事件叫复合事件。例如，在观察废品数的试验中，“废品数为0”、废品数为1”、“废品数为2”、“废品数不超过2”等事件，前三个是简单事

件，后一个事件是复合事件，它是由前三个事件复合而成的。

有些事件在试验中一定出现，也有些事件在试验中一定不出现。例如，从十只同一规格的三极管中（其中有八只正品，两只副品）任意取出三只，则“取出的三只中至少有一只是正品”这一事件必然出现，而“三只全是副品”这一事件就一定不出现。前者我们称之为必然事件，后者称之为不可能事件。必然事件和不可能事件我们当作特殊的随机事件来处理。

§4 样本空间

上一节所谈到的简单事件实质上就是一个随机试验的每一个可能的结果。所以，又把它叫做基本事件。

一个试验的全部基本事件所组成的集合叫做样本空间，用Ω表示。基本事件也称样本点。在§2中所举的三个试验的例子，其样本空间分别为：

1. $\Omega=\{$正，反$\}$；
2. $\Omega=\{0, 1, 2, 3, 4\}$；
3. $\Omega=\{1, 2, 3, 4, 5\cdots\}$

由于每一个事件都是由一些基本事件所组成的，因此，每一个事件都可以用Ω的一个子集来表示。如“轰击次数少于3”这一事件就可用$\{1, 2\}$表示。每一个基本事件可用由这一基本事件所组成的单点集来表示。如“轰击次数为2”这一基本事件可用单点集$\{2\}$表之。

必然事件是试验中一定出现的事件，无论试验出现哪种结果，它都出现，所以，它应包含这个试验的全部基本事件。如果用集合来表示，必然事件就是Ω，以后我们也总用

Ω来表示必然事件。

不可能事件是试验中一定不出现的事件，它不包含这个试验的任何基本事件，即不包含Ω的任何元素。所以，不可能事件该用空集来表示。以后我们总用ϕ来表示不可能事件。

例1． 写出下列试验的样本空间：

1．十只产品中有三只次品，每次从中取一只（取后不放回），直到把三只次品都取出，记录抽取的次数；

2．计算某电话总机在$[0,t]$内接到呼叫次数；

3．投掷一颗骰子，观察所出现的点数；

4．抛掷二枚硬币，观察正、反面出现的情况。

解：

1．抽取的次数，至少是3次，最多是10次，因而其样本空间为：$\Omega=\{3,4,5,\cdots,10\}$。

2．在$[0,t]$这段时间内接到呼叫的次数可以是0，1，2，…次。所以样本空间为：$\Omega=\{0,1,2,3,\cdots\}$

3．投掷一颗骰子，可以出现1点、2点、3点、…、6点。所以，$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$。

4．抛掷二枚硬币，其正、反面出现的情况有如下几种：正、正；正、反；反、正；反、反。所以，样本空间为：$\Omega=\{$（正，正）；（正，反）；（反，正）；（反，反）$\}$。

§5 事件的关系和运算

世间一切事物都是互相联系、互相制约的。进行一个试验，有这样或那样的事件发生，它们虽各有不同的特性，但相互之间又有一定的联系，搞清它们之间的关系，就很有必要了。同时，为了分析各个事件之间的关系，我们对事件引

进一定的运算，通过这些运算，较为复杂的事件，就可用一些较为简单的事件来表示。因此，下面介绍事件之间的关系和运算。

1．事件的包含与相等

设有两个事件A、B，若A发生必然导致B的发生，则称B包含A，或A被B包含，用记号$A \subset B$或$B \supset A$表之。例如，抛掷两枚匀称的硬币，以A表“正好一个正面向上”这一事件，B表“至少一个正面向上”这一事件，则A发生时，B也发生了，所以$A \subset B$。

事件的包含关系，可用图1·1来说明：

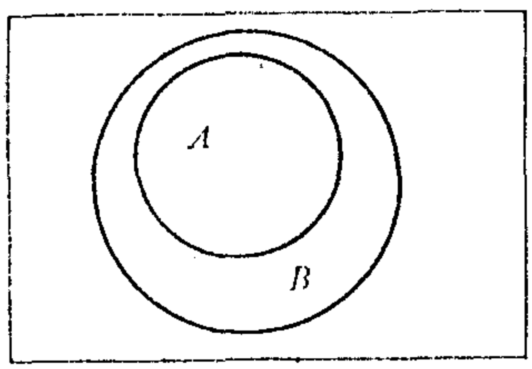

图1·1　$A \subset B$

如果我们把A，B看成两个集合，那末$A \subset B$就是“A是B的子集”。

特别地，对任何事件A，皆有$A \subset \Omega$，$\phi \subset A$，即 $\phi \subset A \subset \Omega$。

如果事件A包含事件B，同时，事件B也包含事件A，亦即，若$B \subset A$且$A \subset B$，则称事件A与B相等（或称等价），记作$A=B$。例如，在其他条件具备时，卫星达到第一宇宙速度时就绕地球运转，反过来，如果卫星绕地球运转，那么它一定达到了第一宇宙速度。所以，这两个事件“卫星达到第一宇宙速度”与“卫星绕地球运转”是等价的。

等价的两个事件，我们将看作是一样的。

2。事件的和

由事件A与B至少有一个发生所构成的事件，称为件A与B的和（或并），记作$A \cup B$或$A+B$（读作A或B）。例

如，某展览馆在一天内“接待参观群众在300人到1000人之间”这一事件（我们以C表之）便是该馆在一天内“接待群众在300人到600人之间”这一事件（以A表之）与“接待群众在600人到1000人之间”这一事件（以B表之）的和。因为，当接待的群众在300人到600人之间，或者接待的群众在600人到1000人之间时，即是“接待的群众在300人到1000人之间”这一事件发生了。这就是说，如果A，B中有一个发生了，那么C必定发生。反之，如果接待的群众在300人到1000人之间，那么或者接待的群众在300人到600人之间，或者接待的群众在600人到1000人之间，也就是说，如果C发生了，那么A，B必有一个发生。由此可见，事件$A+B$与事件A，B之间的关系是：如果A，B中至少有一个发生，那末$A+B$必然发生；反之，如果$A+B$发生，那么A，B两事件中至少有一个发生。

事件和的意义，可用图1·2来说明，图中阴影部分就表示和$A+B$。

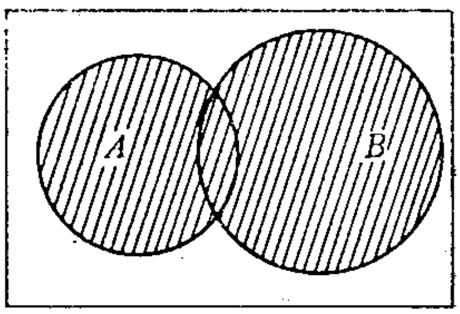

图1·2　$A+B$

事件A与B的和就是A、B两个集合的并集。

很显然，$A\subset A+B$，$B\subset A+B$，$\phi+A=A$，$\Omega+A=\Omega$。

两事件的和可以推广到有限个或无限多个事件，即：“事件A_1，A_2，A_3，…，A_n中至少有一个发生”这个事件称为A_1，A_2，…，A_n之和（或并）。记为$A_1+A_2+\cdots+A_n$或$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$，或缩写为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$。“事件$A_1$，$A_2$，

…，A_n，…中至少有一个发生”这个事件称为A_1，A_2，…，A_n，…之和(或并)。记为$A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots$或$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$，或缩写为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

3. 事件的积

由事件A与B同时发生而构成的事件称为事件A与B的积（或交），记做$A\cap B$，或$A\cdot B$或AB（读做A且B）。例如，有两台自动化机器，在一小时内，“第一台不需要工人看管”这一事件，我们以A表之；“第二台不需要工人看管”这一事件用B表之，那么“两台都不需要工人看管”这一事件便是A、B之积。因为“两台都不需要工人看管”这一事件是由“第一台不需要工人看管”与“第二台不需要工人看管”这两个事件同时发生而构成的。

事件的积的意义，可以用图1·3来说明。图中阴影部分就表示事件AB。

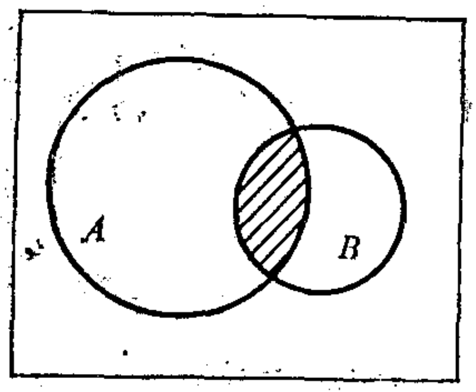

图1·3　AB

事件A与B的积，就是A、B两个集合的交集。

如果事件A被事件B包含，那么它们的积就是A。也就是，如果$A\subset B$，则$AB=A$。这个道理是很显然的。因为，A发生时，事件A和B都发生了；而A和B同时发生时，当然也包括了事件A的发生。例如，有一堆产品，其中有一等品、二等品和三等品，按规定，只有一、二等品是合格品，则从中“取得一等品”这一事件被“取得合格品”这一事件所包含，而“取得一等品”这一事件又是这两

个事件之积。因为，当“取得一等品”这一事件发生时，则“取得合格品”与“取得一等品”当然都发生了。反之亦然。

很显然，$A\phi=\phi$，$A\Omega=A$。

两事件之积，也可以推广到有限或无限多个事件的情况。即：“事件A_1，A_2，…，A_n同时发生”这个事件称为A_1，A_2，…，A_n之积（或交），记为$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$，可简写为$A_1A_2\cdots A_n$，或缩写为$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$；“事件$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…同时发生”这个事件称为$A_1$，$A_2$，…，$A_n$，…之积(或交)，记为$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$，可简写为$A_1A_2\cdots A_n\cdots$，或缩写为$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$。

4．互斥事件（互不相容事件）

两个事件A和B不可能同时发生时，则称这两个事件是互斥事件，或互不相容事件。例如，某电话总机在同一分钟内“接到4次呼唤”和“接到2次呼唤”这两个事件是互斥事件。因为这个电话总机在同一分钟内，如果是接到4次呼唤，那么绝不可能又是接到2次呼唤，反过来也一样。

互斥事件的意义可以用图1·4来说明。

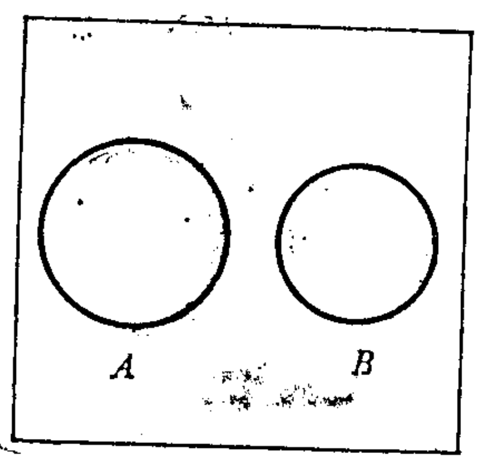

图1·4

互斥的两个事件A与B的发生情况可以分为三种：（1）A发生，B不发生；（2）B发生，A不发生；（3）A、B都不发生。

由于两个互斥事件A与B不可能同时发生，所以它们的积是不可能事件，就是$AB=\phi$。

如果事件A，B，C，…，N

中任意两个都是互斥的，则称它们彼此互斥。例如，某射手进行一次射击，如果以 A 表“击中第一环”这一事件，B 表“击中第二环”这一事件，C表“击中第三环”这一事件，那么这三个事件是彼此互斥的。因此，

$$ABC=\phi$$

5．对立事件（互逆事件、余事件）

如果事件A与 B 中必然发生一件也只能发生一件时，则称它们为对立事件（或互逆事件、余事件），记为$A=\overline{B}$（或 $B=\overline{A}$）。例如，从一堆含有废品和合格品的产品中取出一个，则“是合格品”这一事件与“是废品”这一事件是对立事件，因为取出的这一个产品，不是合格品就是废品，二者必居其一，而二者又不可兼得。

对立事件的意义可用图 1·5 来说明。图中阴影部分表示事件A的对立事件$\overline{A}$。

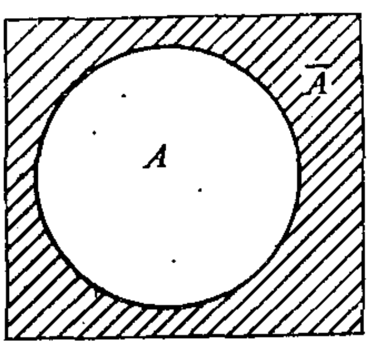

图1·5

事件A的对立事件就是A的余集。

从对立事件的定义知，如果两个事件是对立的，那么，它们的和一定是必然事件，其积是不可能事件。就是：$A+\overline{A}=\Omega$；$A\overline{A}=\phi$。

6．事件的差

由事件A 发生而事件 B 不发生所构成的事件叫做 A与B 的差。记做 $A-B$ 。例如，某工厂生产一批机器零件，规定零件的尺寸小于5厘米且不小于4.9厘米为合格品，则为合格品这一事件便是“尺寸小于 5 厘米”这一事件与“尺寸小于4.9厘米”这一事件的差。

两事件的差的意义可用图 1·6 来说明，图中阴影部分就

表示事件$A-B$。

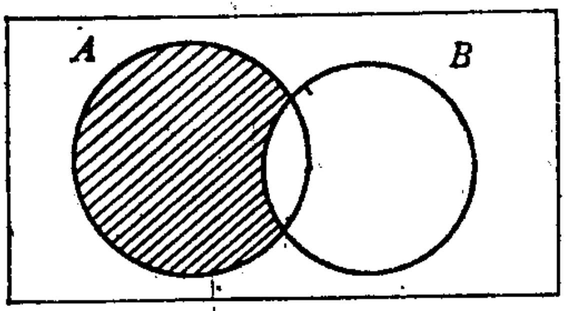

图1·6　$A-B$

因为B不发生时，它的对立事件$\overline{B}$一定发生，所以，两事件的差$A-B$又可用$A\overline{B}$来表示。即

$$A-B=A\overline{B}$$

对任何两个事件A，B都有（参看图1·6）

$$A+B=(A-B)+B=A+(B-A)$$

只有当$A\supset B$时，才有$(A-B)+B=A$，如图1·7所示：

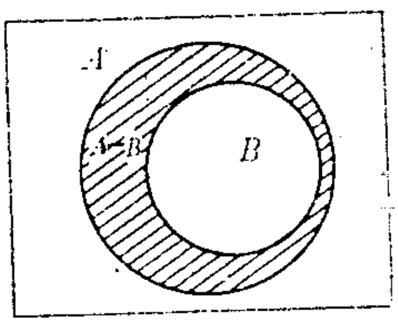

图1·7

必须注意，“A与B的差”和“B与A的差”一般是不同的。前者表示A发生B不发生，后者表示B发生而A不发生。

7．事件的和、积与对立满足下面几个基本规则

（1）交换律　即　$A+B=B+A$，$AB=BA$

（2）结合律　即$(AB)C=A(BC)$，$(A+B)+C=A+(B+C)$

（3）分配律　即　$A(B+C)=AB+AC$，$A+(BC)=(A+B)(A+C)$

（4）对偶律　即　$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$　$\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

一般地，有　$\overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A_i}$　（并的余等于余的交）

$\overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i}=\bigcup_{i=1}^{n}\overline{A_i}$　（交的余等于余的并）