高等数学学习指导

王爱云　张燕　张立琴　主编

中国石油大学出版社

高等数学学习指导

主　编　王爱云　张　燕　张立琴
编　者　马军英　王德臣　张玉芬　程　涛

中国石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习指导/王爱云,张燕,张立琴主编. —东营:中国石油大学出版社,2008.9

ISBN 978-7-5636-2658-8

Ⅰ. 高…　Ⅱ. ①王…②张…③张…　Ⅲ. 高等数学—高等学校—教学参考资料　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 135845 号

书　　名：高等数学学习指导
主　　编：王爱云　张　燕　张立琴
编　　者：马军英　王德臣　张玉芬　程　涛

责任编辑：刘玉兰（电话 0546—8391810）

出 版 者：中国石油大学出版社（山东 东营,邮编 257061）
网　　址：http://www.uppbook.com.cn
电子信箱：eyi0213@hdpu.edu.cn
印 刷 者：东营市新华印刷厂
发 行 者：中国石油大学出版社（电话 0546—8392062）
开　　本：180×235　印张：18.75　字数：388 千字
版　　次：2008 年 9 月第 1 版第 1 次印刷
定　　价：29.80 元

前　言

本书是与王爱云、宋枚主编的《高等数学》(甲种本)第二版(中国石油大学出版社出版)相配套的学习辅导书,主要供使用该教材的学生学习、复习之用,也可供使用该教材的教师作教学参考。

本书内容按教材《高等数学》(甲种本)第二版的顺序编排,每章均分为基本要求、问题解析、习题精解、提高练习四个部分,考虑到与教材结合比较紧密及尽量简约,省略了每章的内容提要。

基本要求的内容主要根据教育部数学基础课程教学指导分委员会制定的理工科本科教学基本要求确定,也结合教学实际作适当变更。沿用惯例,按"理解"、"了解"或"掌握"、"会"的次序表示程度上的差异。

问题解析是本书的重要部分,它主要针对学生学习过程中遇到的带有普遍性的或因为课时限制教师不能在课堂上讲深讲透的、较重要的问题给予分析、解答,它是教材和课堂教学内容的自然延伸或提升。选择的问题涉及对基本概念的理解,对基本理论、基本方法的掌握和应用。对问题的解析力求系统条理、言简意赅、有启发性,便于学生系统地掌握学习内容,引导学生创新思维。

习题精解是选择了教材中较难并具代表性的部分习题给出主要解题方法和步骤,有的还配以扼要点评,目的是引导学生深入体会,掌握要点,举一反三。

提高练习的题目大多选自历年来研究生入学考试的与各章内容相关的试题,并给出较详细的解答,供学生复习、练习、开拓思路之用。

本书由王爱云、张燕、张立琴主编;初稿编者是:张立琴(第一、十一章),张燕(第二、三章),张玉芬(第四、五章),程涛与王德臣(第六章及第七章中多元函数微分法应用部分),王爱云(第八、九章),马军英(第七章中多元函数微分法部分、第十章)。全书由王爱云统稿定稿。

本书的出版得到了中国石油大学出版社的领导、同志们的指导帮助,得到了山东师范大学教务处、数学科学学院的大力支持,在此一并致谢。

由于编者水平所限,书中难免有不妥甚至谬误之处,恳请专家、读者批评指正。

编　者

2008 **年** 8 **月**

目　　录

第一章 函数 极限 连续

§1-1 基本要求

1）理解函数及反函数、复合函数、分段函数、初等函数概念；会求各类函数的定义域、值域；掌握函数的四种特性及基本初等函数的性质；会建立简单实际问题的函数关系.

2）正确理解极限的定义，会叙述各种极限过程的极限定义（共7种极限过程：$n\to\infty$，$x\to\infty$，$x\to x_0$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$），能用定义证明简单的极限；掌握极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$、$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$之间，$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$与$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$、$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$之间的关系；了解数列极限与函数极限的关系.

3）理解无穷小、无穷大的定义及它们之间的关系；掌握有极限的函数与无穷小的关系；理解无穷小的阶的有关概念；掌握无穷小量的运算法则，会正确利用等价无穷小求极限.

4）掌握极限的性质及四则运算法则和复合函数的极限运算法则；掌握极限存在的两个准则；熟悉两个重要极限，能熟练应用极限运算法则及两个重要极限求极限.

5）理解函数连续的概念、函数间断点的概念并会判断其类型，会讨论分段函数在分段点处的连续性；掌握连续函数的四则运算和复合函数的连续性，掌握初等函数的连续性，会利用函数的连续性求极限.

6）理解闭区间上连续函数的性质（最大值、最小值定理及介值定理），了解应用这些性质进行推理证明的一般思路和方法.

§1-2 问题解析

1. 分段函数一定不是初等函数吗？

不一定. 因为分段函数是在函数定义域内自变量的不同变化范围上，对应法则用不同式子来表示的函数，但并不排除这些式子能用一个表达式表示，所以，不能简单地说分段函数一定不是初等函数. 例如，$f(x)=|x|$，它可以写成分段函数的形式：$f(x)=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant0,\\ -x, & x<0\end{cases}$也可以写成$|x|=\sqrt{x^2}$，因此$f(x)=|x|$是初等函数.

2. 如何理解函数极限的概念？

(1) 我们以$x\to x_0$时函数$f(x)$以A为极限的精确定义来谈谈对极限定义的理解. 在这个定义中给出了"ε"、"δ"以及两个不等式"$0<|x-x_0|<\delta$"和"$|f(x)-A|<\varepsilon$"，它们是相互关联的一个整体. 首先，"ε"具有任意性和给定性，它是用来衡量$f(x)$和A的接近程度的，ε愈小，表示接近得愈好，它除了限制为正数外不受任何限制，这正说明了$f(x)$和A能够接近到任意的程度. 又ε是任意小的正数，那么$\frac{\varepsilon}{2}$，ε^2，$\sqrt{\varepsilon}$等也是任意小的正数，因此定义中"$|f(x)-A|<\varepsilon$"中的"ε"可用$\frac{\varepsilon}{2}$，ε^2，$\sqrt{\varepsilon}$等代替. 然而，尽管ε有它的任意性，但一经给定，它就具有相对的固定性，就暂时看作不变的了，以便根据它来找到δ，使得满足$0<|x-x_0|<\delta$的一切x都有$|f(x)-A|<\varepsilon$. "$|f(x)-A|<\varepsilon$"是$f(x)$当$0<|x-x_0|<\delta$时具备的一种性质，与$f(x)$具备的其他条件一起，可以推导出$f(x)$在x_0附近具备某种性质. 因此，在极限存在条件下，证明$f(x)$满足的结论，一般需要取定$\varepsilon=\varepsilon_0$，或限制$\varepsilon$的范围. 其次，"$\delta$"具有相应性和存在性. δ是用来刻画x与x_0的接近程度的，因为$f(x)$无限接近于A是在x趋向于x_0的过程中实现的，只有x与x_0接近到一定程度，才能保证$|f(x)-A|<\varepsilon$. 也就是说，$f(x)$是否以A为极限，就看对于任意给定的$\varepsilon>0$，能否找到δ了. 所以，δ是相应于ε的给定而存在的，但它又不是由ε唯一确定的，且也不必找最大的δ，所以在利用定义证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$时，常常将$|f(x)-A|$适当放大，以便通过$|f(x)-A|<\varepsilon$较容易地找到$\delta$. 第三，"满足$0<|x-x_0|<\delta$的一切$x$保证不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立"，是点$x_0$的去心$\delta$邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内$f(x)$满足的性质，与$f(x)$在点$x_0$的情况无关，这恰好说明了$f(x)$是否以$A$为极限与$f(x)$在点$x_0$有无定义无关.

(2) 在问题(1)中我们谈了对$x\to x_0$时$f(x)$以A为极限的定义的理解，"$x\to x_0$"就是在x无限接近于x_0的变化过程中，对应的函数$f(x)$趋向于定值A. 教材中介绍了七种极限过程，除了"$x\to x_0$"外，还有$n\to\infty$，$x\to x_0^-$，$x\to x_0^+$，$x\to\infty$，$x\to-\infty$，$x\to+\infty$. 所谓极限过程，也就是自变量的变化趋势，如$n\to\infty$是指自变量取正整数而无限增大的情况；$x\to-\infty$是指自变量取负实数而绝对值无限增大的情况；$x\to x_0^+$是指自变量x取大于x_0的实数而无限接近于x_0的情况，其余类似. 虽然自变量的变化过程不同，极限定义的表述略有差别，但它们的本质是相同的，那就是：设$f(x)$是自变量x的某个变化过程中的函数，A是一个常数，若对于任意给定的正数ε，总存在一个自变量变化到的程度(通常称某一时刻)，使得自变量变化到这个程度(时刻)以后，恒有$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，则称常数A是函数$f(x)$在这个变化过程中的极限.

3. 函数在某一极限过程中极限存在或不存在的几种情况.

利用极限的定义容易证明：极限$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(x\to x_0)}}f(x)$存在的充分必要条件是单侧极限

$\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ (x\to x_0^-)}} f(x)$和$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to x_0^+)}} f(x)$都存在且相等. 一般来说,讨论函数$f(x)$的极限,都应先看一看单侧极限的情况,常见如下几种情况:

(1) 若x_0是分段函数的分段点,且在x_0的左右两侧函数的表达式不相同,则求$x\to x_0$的极限时一定要先考察相应的左右极限是否存在,再确定极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$是否存在.

例如 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\geqslant 1, \\ 2-x, & x<1,\end{cases}$ 若求$\lim\limits_{x\to1} f(x)$,则需要先求左极限$\lim\limits_{x\to1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to1^-} f(2-x)=1$及右极限$\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x}=1$.

(2) 若x_0是分段函数的分段点,但在x_0的左右两侧函数表达式相同,且$x\to x_0$时,x_0的左右两侧$f(x)$的变化趋势也一样,则不必求左右极限,可直接求极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

例如$g(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0, \\ 1, & x=0,\end{cases}$ 若求$\lim\limits_{x\to0} g(x)$,则不必求$x=0$处的左右极限,而直接求极限$\lim\limits_{x\to0} g(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

(3) 若$f(x)$在x_0的左右两侧表达式相同,但当$x\to x_0^-$及$x\to x_0^+$时,$f(x)$的变化趋势不同,则求极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$时需要考察左极限$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$及右极限$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$,再确定极限$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$是否存在.

例如$f(x)=e^{\frac{1}{x}}$,在$x=0$处,由于$\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$而$\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$,于是$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-} e^{\frac{1}{x}}=0$,$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}=\infty$,所以极限$\lim\limits_{x\to0} f(x)$不存在.

又比如$f(x)=\arctan x$,由于$\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan x=-\dfrac{\pi}{2}$,$\lim\limits_{x\to+\infty}\arctan x=\dfrac{\pi}{2}$,所以极限$\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$不存在. 类似地,极限$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot} x$及极限$\lim\limits_{x\to\infty} e^x$也都不存在.

(4) 关于函数极限不存在的情况,常见有以下几种:

1° 极限$\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (x\to x_0)}} f(x)$不存在是因为单侧极限$\lim\limits_{\substack{x\to-\infty \\ (x\to x_0^-)}} f(x)$和$\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to x_0^+)}} f(x)$至少有一个不存在或者都存在但不相等. 例子同以上(3)中所述.

2° 若在自变量的某个变化过程中,$f(x)$是无穷大量,则在该过程中极限$\lim f(x)$不存在. 如$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$,所以极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{x^2}$不存在.

3° 若自变量的某个变化过程中,函数振荡不定导致函数与任何常数A都不能无限接

近，则函数的极限不存在. 如$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin x$、$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x^2}$及$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$（其中$x_n=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2n}, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$）不存在，都属于这种情况.

4. 函数极限与数列极限的关系.

要弄清函数极限与数列极限的关系，就要分清它们之间的区别与联系. 它们的区别在于：数列$x_n=f(n)$的自变量n的变化是离散的（只取正整数），变化过程只有一种$n\to\infty$，而函数$y=f(x)$的自变量的变化是连续的，且有6种变化过程，即$x\to x_0$，$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$.

函数极限与数列极限的联系是：$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（或$\infty$）的充分必要条件是，对于任何以$x_0$为极限的数列$\{x_n\}$（$x_n\neq x_0$），都有$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$（或$\infty$）.

将“$x\to x_0$”换为其他函数极限过程，也有相应的结论. 这个联系的应用，常见以下几个方面：

(1) 利用函数极限求数列的极限. 如，已知$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，于是$\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}}=1$. 以后讲了求极限的洛必达法则后，会有更多的应用.

(2) 证明函数的极限不存在. 如证明$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在，取$x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，$y_n=\dfrac{1}{n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，显然当$n\to\infty$时，$x_n\to 0$，$y_n\to 0$. 而$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\cos 2n\pi=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{y_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，由于$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{x_n}\neq\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{1}{y_n}$，所以$\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$不存在.

(3) 证明$f(x)$在区间I上无界. 常用的方法是：找出数列$\{x_n\}\subset I$，而$\{f(x_n)\}$为无穷大数列. 如证明在$(0,1]$上，$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$无界. 取数列$x_n=\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$，显然$\{x_n\}\subset(0,1]$，而$f(x_n)=\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\sin\left(2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\to\infty\ (n\to\infty)$，所以在$(0,1]$上，$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$无界.

(4) 证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq\infty$常用的方法是：找出一个数列$x_n\to x_0$（$x_n\neq x_0$），而$\{f(x_n)\}$收敛. 例如，证明当$x\to 0^+$时$f(x)=\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$不是无穷大. 取$x_n=\dfrac{1}{2n\pi}$，显然当$n\to\infty$时，$x_n\to$

0^+，$x_n\neq 0$，而$f(x_n)=2n\pi\sin 2n\pi=0$，即数列$\{f(x_n)\}$收敛于零，故$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$当$x\to 0^+$时不是无穷大.

5. 关于无穷小与无穷大.

无穷小量是一类特殊的变量，它是在某一极限过程中，以零为极限的变量，在极限理论中占有极其重要的地位. 无穷小分析理论是微积分学之精髓. 在学习无穷小与无穷大的理论时我们要注意从以下几个方面来理解.

(1) 无穷小与有极限的函数的关系.

如果函数$f(x)$以A为极限，则有无穷小量α，使得$f(x)=A+\alpha$. 反之，若$f(x)=A+\alpha$，其中α是无穷小，则$f(x)$一定以A为极限.

该结论告诉我们，在某一极限过程中，$f(x)$以A为极限等价于$f(x)-A$以零为极限，而$f(x)-A$就是该极限过程中的无穷小. 由此可以将极限问题转化为无穷小问题来处理，这是无穷小这类变量的重要性所在.

(2) 无穷大与无界函数的区别与联系.

区别：1° 无穷大是指在自变量的某一变化过程中，对应的函数值的绝对值无限增大（函数有明显的变化趋势），无穷大与自变量的"变化过程"相联系；无界函数是指自变量在某一变化范围内变化时，对应的函数值的绝对值可以大到任意程度，无界函数与自变量的"变化范围"相联系.

2° 无穷大的定义，如$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$是对于任意给定的正数$M>0$，存在$\delta>0$，对于适合不等式$0<|x-x_0|<\delta$的一切$x$，有$|f(x)|>M$，即对于$x_0$的去心邻域中的一切$x$，都有$|f(x)|>M$（而不是个别的$x$，使$|f(x)|>M$）；而$f(x)$在点$x_0$的去心邻域内无界，是指对于无论多么大的正数$M$，都存在点$x_1$属于该邻域，使$|f(x_1)|>M$（而不是$x_0$的某个去心邻域内所有$x$都有$|f(x)|>M$）. 从图形上看，无界仅要求对于任何远离$x$轴的直线，其上方或下方总有函数图像的点即可；而无穷大则要求，对于任意远离x轴的直线，都存在一个时刻，使得函数图像高过或低于直线后不再回到直线下方或上方.

联系：如果$f(x)$是当$x\to x_0$时的无穷大，则$f(x)$在含有x_0的某邻域内或在以x_0为端点的某区间上一定无界；但反之，当$f(x)$在x_0的某邻域内无界时，$f(x)$却不一定是$x\to x_0$时的无穷大. 例如在$(0,1]$上$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$无界，但当$x\to 0^+$时$f(x)=\frac{1}{x}\sin\frac{1}{x}$却不是无穷大.

(3) 无限多个无穷小的和不一定是无穷小.

例如，当$n\to\infty$时，$\frac{1}{n^2},\frac{2}{n^2},\cdots,\frac{n}{n^2},\cdots$都是无穷小，设

$$x_n=\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2},$$

则有 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n-1}{n^2}\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{2}.$$

这里无限多个无穷小之和为一非零常数.

又例如,当$n\to\infty$时,$\frac{1}{n^3},\frac{2}{n^3},\cdots,\frac{n}{n^3},\cdots$都是无穷小,设

$$x_n=\frac{1}{n^3}+\frac{2}{n^3}+\cdots+\frac{n}{n^3},$$

则有 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=0.$$

这里无限多个无穷小之和仍然是无穷小.

再例如,当$n\to\infty$时,$\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}},\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}},\cdots,\frac{n}{n^{\frac{3}{2}}},\cdots$都是无穷小,设

$$x_n=\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}+\frac{2}{n^{\frac{3}{2}}}+\cdots+\frac{n}{n^{\frac{3}{2}}},$$

则有 $$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=+\infty.$$

这里无限多个无穷小之和为无穷大.

(4) 确定无穷小(关于x)的阶.

1° 利用无穷小阶的定义,找一个正数K,使得当$x\to0$时,无穷小$\alpha(x)$与x^K之比的极限存在不为零,则$\alpha(x)$是关于x的K阶无穷小.

2° 利用无穷小的运算性质.

设当$x\to0$时,$\alpha(x)$与$\beta(x)$分别是x的n阶和m阶无穷小,则① $\alpha(x)\beta(x)$是x的$n+m$阶无穷小;② 当$n>m$时,$\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$是$x$的$n-m$阶无穷小.$\alpha(x)+\beta(x)$是$x$的$m$阶无穷小.

又设$\lim\limits_{x\to0}h(x)=A\neq0$,则$\alpha(x)h(x)$是$x$的$n$阶无穷小.

确定无穷小(关于$x-x_0$)的阶的方法类似.

(5) 无穷大的运算性质.

利用无穷大的定义及无穷大与无穷小的关系,不难证明无穷大有以下运算性质:

1° 两个同号无穷大的和还是同号无穷大;2° 无穷大与有界变量的和还是无穷大;3° 无穷大与有非零极限的变量之积还是无穷大.

6. 函数极限求法.

(1) 利用极限的四则运算法则求极限.

在求和、差、积、商形式的极限时,要运用极限的四则运算法则.在应用法则时应注意下面几点:1° 法则是在各函数极限存在的条件下成立的.2° 在运用商的运算法则时,分母极限不能为零.3° 使用法则前往往需要通过恒等变形将函数作适当的化简,常用

的方法有因式分解、约分或通分、分子或分母有理化、三角函数恒等式、利用某些求和/求积公式以及适当的变量替换等等.

例 1 求$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x+13-4(x+1)}{(x-3)(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-3}{(x+3)(\sqrt{x+13}+2\sqrt{x+1})}=-\frac{1}{16}.$$

本题因为分子、分母当$x\to 3$时极限均为零,所以属于$\dfrac{0}{0}$型未定式,不能直接用商的运算法则,应当先采用有理化,再约去分子、分式中的零因式.

例 2 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5^2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{5^n}\right)$.

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{5}\left(1-\left(-\dfrac{1}{5}\right)^n\right)}{1-\left(-\dfrac{1}{5}\right)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(-1)^n\dfrac{1}{5^n}}{6}=\dfrac{1}{6}$.

在例 2 中,随$n\to\infty$,数列的项x_n是无限项之和,而极限的运算法则"代数和的极限等于极限的代数和"只对有限项的和成立,因此,在求无限多项和的极限时往往先用相应的公式将无限多项的和化为有限项的和.

(2) 利用两个重要极限求极限.

在第一章中我们学习了两个重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$或$\lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}$,其中的$x$,$z$可以是中间变量. 在利用重要极限求极限时常常要作适当的恒等变形,将其归结为相应的形式:$\lim\limits_{\varphi(x)\to 0}\dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$和$\lim\limits_{\varphi(x)\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right]^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$.

例 3 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^{2-n}$.

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-1+1}{n-1}\right)^{2-n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)\cdot\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{1-n}\right]$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{n-1}}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}}=\mathrm{e}^{-1}.$$

例 4 求$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\sin^{-2}\frac{x}{2}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\sin^{-2}\frac{x}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{-2}{\cos x-1}}$

$$=\lim_{x\to 0}\left\{[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}}\right\}^{-2}=\mathrm{e}^{-2}.$$

例 3、例 4 均为幂指函数求极限,利用复合函数极限运算法则可以证明:若$\lim u(x)$

$=A>0,\lim v(x)=B$，则 $\lim u(x)^{v(x)}=A^B$.

(3) 利用两个准则求极限.

准则Ⅰ为夹逼准则，准则Ⅱ为单调有界准则.

利用夹逼准则的关键在于选取恰当的夹逼函数.

例 5　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$.

解　当 $n>2$ 时，因为

$$\frac{n!}{n!}\leqslant\frac{1!+2!+\cdots+(n-2)!+(n-1)!+n!}{n!}\leqslant\frac{(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!}{n!},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!}=1,$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(n-2)(n-2)!+(n-1)!+n!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n-2}{(n-1)n}+\frac{1}{n}+1\right]=1,$$

所以原式$=1$.

利用单调有界准则求极限，首先应证明数列 x_n 单调增加且有上界，或单调减少且有下界，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，然后设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，再由方程 $A=f(A)$ 解出 A.

例 6　设 $a>0,x_1>0,x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$，试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛，并求其极限.

解　由题设，对一切 n，有 $x_n>0$. 由于

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right)\geqslant\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{x_{n-1}}\cdot\sqrt{\frac{a}{x_{n-1}}}=\sqrt{a},$$

所以数列 x_n 有下界. 又

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)-x_n=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{x_n}-x_n\right)=\frac{1}{2x_n}(a-x_n^2)\leqslant 0,$$

所以

$$x_{n+1}\leqslant x_n,\ (n=1,2,\cdots),$$

即数列 x_n 单调减少.

由单调有界数列必有极限知，数列 x_n 的极限一定存在. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，在 $x_n=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{a}{x_n}\right)$ 中，令 $n\to\infty$，得

$$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right),$$

解之得 $A=\pm\sqrt{a}$，因为 $x_n>0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}$.

(4) 利用无穷小的性质求极限.

主要是利用无穷小的运算性质、无穷小与无穷大的关系、等价无穷小代换求极限.

例 7　求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}\right)$.

解　因为　$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}=2\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}\cdot\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}$,

而 $$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}},$$

故 $$\lim_{x\to+\infty}\sin\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}=\sin\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=0.$$

又 $$\left|2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\right|\leqslant 2,$$

所以根据“有界函数与无穷小的乘积为无穷小”，得

$$\lim_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})=0.$$

当$x\to+\infty$时，$\sin\sqrt{x+1}$与$\sin\sqrt{x}$均无限振荡而无极限，$\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x}$是未定式，因此首先利用和差化积三角公式将其变形，再求得其极限为0.

例8　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$.

解　原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x(1-\cos x)}{\cos x\ln(1+x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cdot\frac{1}{2}x^2}{x^3\cos x}=\dfrac{1}{2}$.

利用等价无穷小代换求极限时，只能将分子或分母的无穷小因子用其等价无穷小代换. 另外，要想掌握并灵活应用等价无穷小代换求极限，必须熟知一些常用的等价无穷小. 例如，当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$e^x-1\sim x$，$\ln(1+x)\sim x$，$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\sec x-1\sim\dfrac{x^2}{2}$，$\operatorname{sh}x\sim x$，$\operatorname{th}x\sim x$ 等等.

(5) 利用函数的连续性求极限.

设函数$f(x)$在点x_0处连续，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$. 对复合函数$f[u(x)]$，若$\lim u(x)=A$，$f(u)$在点$A$连续，则有$\lim f[u(x)]=f[\lim u(x)]=f(A)$.

例9　求$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x}}$.

解　$y=e^{\frac{\sin x}{x}}$可以看作由$y=e^u$和$u=\dfrac{\sin x}{x}$复合而成的. 显然$y=e^{\frac{\sin x}{x}}$在$x=0$不连续，但是$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，而函数$y=e^u$在$u=1$处连续，因此

$$\lim_{x\to 0}e^{\frac{\sin x}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=e.$$

(6) 利用极限存在的充分必要条件求极限.

主要应用以下三个条件：

1° $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=A$；

2° $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x_0-0)=f(x_0+0)=A$；

3° $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

例 10　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

分析　因为函数表达式中含有绝对值函数$|x|$,且

$$\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}=0,\quad \lim_{x\to 0^+}e^{\frac{4}{x}}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0^-}e^{\frac{4}{x}}=0,$$

所以求此极限时必须要先分别求出左、右极限.

解　因为

$$f(0+0)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2e^{-\frac{4}{x}}+e^{-\frac{3}{x}}}{e^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1,$$

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1,$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

求极限的方法还有很多,如用导数定义、用洛必达法则等.随着学习的不断深入,读者会逐步见到.

7. 若在x_0的某一去心邻域内$f(x)>0$(或$f(x)<0$),且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则一定有$A>0$(或$A<0$)吗?

不一定.例如,$f(x)=|x|$在$x=0$的任何去心邻域内大于零,但$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

此例说明$f(x)$在x_0的某一去心邻域内$f(x)>0$(或$f(x)<0$),且$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$时,只能保证$A\geqslant 0$(或$A\leqslant 0$).

8. 闭区间上连续函数的性质及其应用.

闭区间上连续函数的性质有:最大值、最小值定理,有界性定理,介值性和零点存在定理.要掌握这些定理的条件和结论并能简单应用,一般应注意下面几点:

(1) 闭区间上连续函数的性质定理所涉及的区间均是有限闭区间.如果是开区间或无穷区间,性质都可能不成立.例如,$f(x)=x$在$(0,1)$上连续,但它在$(0,1)$上既无最大值也无最小值.$f(x)=x$在$[0,+\infty)$上也连续,但它在该区间上无界,也没有最大值.但对开区间或无穷区间,如果再适当增加条件,还能使性质成立.例如,对无穷区间,我们可以证明如下几个定理成立.

1°　若函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$存在,则$f(x)$在$[a,+\infty)$上有界.

2°　若函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,且取得正值和负值,又$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,则$f(x)$在$[a,+\infty)$上必取得最大值和最小值.

3°　若函数$f(x)$在$[a,+\infty)$上连续,$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$,且$f(a)$与$A$异号,则$f(x)$在

$(a,+\infty)$内必存在零点.

(2) 利用闭区间上连续函数的性质证明中值命题常用的方法是通过作辅助函数,利用零点存在定理.

例 11　设$f(x)$在$[a,b]$上连续,且$a<c<d<b$,证明在(a,b)内存在一点ξ,使得

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$$

成立,其中$p>0,q>0$且为常数.

证　作辅助函数$F(x)=(p+q)f(x)-pf(c)-qf(d)$,下证$F(x)$在$(a,b)$内有零点.

由题设知,$F(x)$在$[c,d]\subset[a,b]$上连续,又

$$F(c)=q[f(c)-f(d)],\quad F(d)=p[f(d)-f(c)],$$

因为$p>0,q>0$为常数,所以

$$F(c)F(d)=-pq[f(c)-f(d)]^2\leqslant 0,$$

因此,当$f(c)=f(d)$时,$F(c)=0$或$F(d)=0$,则$\xi=c$或$\xi=d$,结论成立.当$f(c)\neq f(d)$时,$F(c)F(d)<0$,由零点定理,存在一点$\xi\in(c,d)\subset(a,b)$,使$F(\xi)=0$,即

$$pf(c)+qf(d)=(p+q)f(\xi)$$

成立.

利用零点定理证明问题,其关键是能准确地设出辅助函数,选择相应的区间,即确定对哪一函数在哪个区间(或子区间)上应用零点定理.作辅助函数的基本步骤是:将欲证等式中的ξ换为x,得到相应的方程使其右端为零,将左边的函数设为辅助函数.

9. 关于初等函数的连续性,为什么不说"初等函数在其定义域内是连续的",而说"初等函数在其定义域的区间上是连续的"?

因为初等函数的定义域可能包含孤立点.如初等函数$f(x)=\sqrt{\sin x-1}$,它的定义域$D=\left\{x\,\middle|\,x=2k\pi+\frac{\pi}{2},k\text{ 为整数}\right\}$中每一个点都是孤立点,函数在每个孤立点的邻域内不是处处有定义,但是我们的函数在一点连续的定义中要求函数在该点的某一邻域内有定义,因此不能说"初等函数在其定义域内连续".函数的定义区间与定义域有所不同,定义区间是含于定义域的,而定义域不一定是区间.

§1-3　习题精解

习题 1-2 (P16)

2. **证**　(3) 任给$\varepsilon>0$,因为$|x_n-A|=\left|\frac{3n+1}{2n+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2(2n+1)}<\frac{1}{4n}$,所以令$\frac{1}{4n}<\varepsilon$,即$n>\frac{1}{4\varepsilon}$,取$N\geqslant\left[\frac{1}{4\varepsilon}\right]$,则当$n>N$时,$|x_n-A|<\varepsilon$成立,此即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n+1}{2n+1}=\frac{3}{2}$.