数学分析选讲

SHUXUE FENXI XUANJIANG

主编　朱石焕　连颖颖

国防工業出版社
National Defense Industry Press

数学分析选讲

主　编　朱石焕　连颖颖
副主编　杨　峻　王恒斌
编　委　康会光　刘万里
　　　　吴忠林　袁　静

017
ZSH

国防工业出版社
·北京·

内容简介

本书系统地总结了数学分析的基本概念、基本理论，并通过典型例题介绍数学分析解题的基本技巧和方法，全书内容共分15讲，每一讲都包括基本概念和重要结论，这将有助于加深读者对数学分析内容的理解. 另外，本书还选用了一些典型例题，由浅入深地介绍了数学分析的基本方法，从而达到培养学生分析问题和解决问题的基本能力.

本书既可以作为大学开设数学分析选讲的选修课的选用教材，又可为报考研究生的学生提供复习指导，同时也可作为大学教师讲授数学分析的教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲 / 朱石焕，连颖颖主编. —北京：国防工业出版社，2008.9

ISBN 978-7-118-05709-6

Ⅰ. 数… Ⅱ. ①朱… ②连… Ⅲ. 数学分析－研究 Ⅳ. 017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第061038号

※

国防工業出版社出版发行

（北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100044）

北京诚信伟业印刷有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 · 1/16　印张 14½　字数 440 千字

2008年9月第1版第1次印刷　印数 1—4000 册　定价 25.00 元

（本书如有印装错误，我社负责调换）

国防书店：(010)68428422　发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535　发行业务：(010)68472764

前　言

随着我国社会主义建设的快速发展，尤其是党的十七大召开以来，文化建设已被提到重要日程. 高等学校是文化建设的重要阵地，随着我国高等教育“大众化”阶段的到来，提高大学生的素质成为大学培养目标的重要内容之一，“一个国家只有它的数学蓬勃发展时，才能表现出它的国力强大”(拉普拉斯). 随着高招规模的扩大，学生队伍的结构和素质也有了很大的变化. 为了贯彻落实教育部高等学校数学与统计学教学指导委员会对数学基础课程教学基本要求，结合近几年的实际情况与现行教学改革的一些成功经验，在学校有关领导的大力支持下，长期工作在教学第一线的资深教师大力开展教学改革，实施精品战略. 从2004年以来，我院采取了分层教学与分层教学研究，取得了一系列成果，其中配套教材的改革也得到了完善. 经过几年的实践，学生反映良好，现整理出版，期望推动教材的进一步改革. 另一方面，通过教材编写研究，进一步推动我院精品课程建设.

本套教材共包括五册，即数学分析选讲、线性代数、微积分、概率论与数理统计、高等几何，计划从2008年开始陆续出版. 本套教材的最大特点是：①分层设计，适合不同层次学生使用，教师可结合实际选讲；②适合学生自学，教材内容深入浅出，可满足不同层次学生的知识需求；③以学生为本，既重教，又重学，在学生学懂与学会之间加大训练力度.

随着学生就业压力的增大，越来越多的学生加入到考研队伍中来，这对个人和国家来说都是一件好事，这就需要进行合理指导，包括考研知识准备方面. 编者结合外校的成功经验与多年的教学实践，整理编写了这本《数学分析选讲》，它主要包括极限与连续、导数与微分、微分中值定理及应用、不定积分、定积分及其应用、无穷级数、多元函数微分学、多元函数积分学、含参量积分等内容. 各章节选配了适量、典型习题供学生练习，最后附有22套模拟试题可供学生练习. 本教材既考虑现代化教学手段的使用，增加教学信息量，提高教学效率，增强教学效果，又体现以学生为本的教育思想，贯彻科学发展观，全方面提升学生的综合素质和创新能力，真正达到提高学生自我教育、自我提高的目的.

本教材是为初步掌握高等数学的学生编写的，旨在进一步提高学生的数学科学知识，培养学生的创新精神、实践能力、终身学习的能力，促进学生素质的全面发展. 本书由安阳师范学院朱石焕、连颖颖主持编写，参加编写的有安阳师范学院杨峻、王恒斌、康会光、袁静，洛阳师范学院刘万里，黄淮学院吴忠林. 本书在编写过程中，得到安阳师范学院各级领导的大力支持，提出了不少建设性建议，在此一并表示感谢. 由于编者水平有限，错误之处在所难免，希望广大教师和学生在使用过程中提出修改意见.

编　者

2008年5月

目　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第一讲　数列极限

一、基本内容

1. 数列极限概念

定义1.1　设$\{a_n\}$为数列,a为定数.若对任给的正数ε,总存在正整数N,使得当$n > N$时有

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

则称数列$\{a_n\}$收敛于a,定数a称为数列$\{a_n\}$的极限,并记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \text{ 或 } a_n \to a(n\to\infty)$$

注:定义中涉及到两个数ε和N,其特性如下.

1) 关于ε

(1)ε的任意性:从$|a_n - a| < \varepsilon$可知正数ε的作用在于刻划数列通项a_n与常数a的接近程度,ε越小,表示接近得越好;而正数ε可以任意小,说明a_n与常数a可以接近到任意程度;所以我们侧重于ε以小为贵(对于较大的ε来讲,毫无意义).

(2)ε的暂时固定性:尽管ε有其任意性,但一经给出,就暂时被确定下来,以便求出相应的N.

(3)ε的多值性:ε既是任意小的正数,那么$\frac{\varepsilon}{2}$、3ε、ε^2等同样也是任意小的正数,因此定义1.1中不等式$|a_n - a| < \varepsilon$中的ε可用$\frac{\varepsilon}{2}$、3ε、ε^2等来代替,而"$|a_n - a| < \varepsilon$"也可用"$|a_n - a| \leqslant \varepsilon$"代替.

(4) 正由于ε是任意小正数,我们可以限定ε小于一个确定的正数,而不能限定ε大于某一确定的正数.

2) 关于N

(1)N的相应性:N是由事先给定的ε来确定的,因此常把N记为$N(\varepsilon)$,以示强调N是依赖于ε的;ε一经给定,就可以找到(存在)一个N;一般地,ε愈小(即精度越高),满足$|a_n - a| < \varepsilon$的n就愈大,这样N也就愈大,才能保证当$n > N$时有$|a_n - a| < \varepsilon$成立.

(2)N的多值性:N的相应性并不意味着N是由ε唯一确定的,因为对给定的ε,N一旦存在了,则比N大的任何一个正数均可充当定义中的N.

(3)N值的变形:事实上,在许多场合下,最重要的是N的存在性,而不是它的值有多大.基于此,在实际使用中的N也不必限于自然数,只要N是正数即可;而且把"$n > N$"改为"$n \geqslant N$"也无妨.

在定义1.1中,"当$n > N$时有$|a_n - a| < \varepsilon$成立"意味着:在数列$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$中,

$\forall \varepsilon > 0$,总存在N,从第$(N+1)$项开始,以后的每一项(无穷多项)与a的距离$|a_n - a|$都将小于事先给定的$\varepsilon(>0)$(无论ε多么小,这样的N都存在),而不满足$|a_n - a| < \varepsilon$的至多只有前N项(有限项).

定义 1.2 任给$\varepsilon > 0$,若在$U(a,\varepsilon)$之外数列$\{a_n\}$中的项至多只有有限个,则称数列$\{a_n\}$收敛于极限a.

数列极限的几何意义:

"当$n > N$时有$|a_n - a| < \varepsilon$"意味着:所有下标n大于N的项a_n都落在邻域$U(a,\varepsilon)$内;而在$U(a,\varepsilon)$之外,数列$\{a_n\}$中的项至多只有N个(有限个).

2. 收敛数列的性质

(1) 唯一性:收敛数列的极限是唯一的.

(2) 有界性:收敛数列必有界.

(3) 保号性:若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$(或$a < 0$),则对任何$a' \in (0,a)$(或$a' \in (a,0)$),存在正数$N$,使得当$n > N$时有$a_n > a'$(或$a_n < a'$).

(4) 保不等式性:设$\{a_n\}$与$\{b_n\}$均为收敛数列.若存在正数N_0,使得当$n > N_0$时有$a_n < b_n$,则$\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

(5) 迫敛性:设收敛数列$\{a_n\}$与$\{b_n\}$都以a为极限,数列$\{c_n\}$满足:存在正数N_0,当$n > N_0$时$a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$,则数列$\{c_n\}$收敛,且$\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

(6) 四则运算法则:若$\{a_n\}$与$\{b_n\}$为收敛数列,则$\{a_n + b_n\}$、$\{a_n - b_n\}$、$\{a_n \cdot b_n\}$也都是收敛数列,且有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

若再假设$b_n \neq 0$及$\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$,则$\left\{\dfrac{a_n}{b_n}\right\}$也是收敛数列,且有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

(7) 改变数列的有限项不改变数列的敛散性,且不改变收敛数列的极限.

(8) 数列与子列的关系:数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是$\{a_n\}$的任何非平凡子列都收敛.

(9) 致密性定理:有界数列必有收敛子列.

(10) 数列$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$严格单增收敛于$e$,$\left\{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$严格单减收敛于$e$.

3. 数列极限存在的条件

(1) 单调有界定理:在实数系中,单调有界数列必收敛,且单增(减)数列收敛到该数列的上(下)确界.

(2) 柯西(Cauchy)收敛准则:数列$\{a_n\}$收敛的充要条件是:对任给的$\varepsilon > 0$,存在正整数N,使得当$n,m > N$时有$|a_n - a_m| < \varepsilon$.

二、基本方法与典型例题

1. 按 $\varepsilon - N$ 定义证明(验证)极限

前提:已知数列的极限值.

关键:寻找 $N(\varepsilon)$.

使用方法:

(1) 求最小的 N:从不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 直接解出 n.

(2) 适当放大法:不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$ 较为复杂,无法直接解出,或求解的过程较繁,为此先将表达式 $|a_n - a|$ 进行化简,并适当放大,使之成为关于 n 的简单函数 $H(n)$(仍为无穷小量),即 $|a_n - a| < H(n)$. 于是,要使 $|a_n - a| < \varepsilon$,只要 $H(n) < \varepsilon$,解此不等式便得所求.

(3) 分步法:若不对 n 进行限制,便无法化简和放大,为此先限定 $n > N_1$,然后按(2)求得 N_2,于是所求的 $N = \max\{N_1, N_2\}$.

例 1　证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1} = \dfrac{3}{2}$.

证明:因为

$$\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2n+3}{2(2n^2-1)}\right| < \frac{2n+3n}{2(n^2+n^2-1)} < \frac{5n}{2n^2} = \frac{5}{2n} < \frac{3}{n}, n > 1$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$,取 $N = \max\left\{1, \dfrac{3}{\varepsilon}\right\}$,则 $\forall n > N$,有

$$\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1} - \frac{3}{2}\right| < \frac{3}{n} < \varepsilon$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2-1} = \frac{3}{2}$$

例 2　证明:$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$.

证明:因为

$$|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

于是 $\forall \varepsilon > 0$,取 $N = \dfrac{1}{\varepsilon^2}$,则 $\forall n > N$,必有

$$|(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})| < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = 0$$

例 3　已知实数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a,且 $S_n = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$,用定义证明 $\{S_n\}$ 也收敛于 a.

证明:记 $b_i = |a_i - a|$, $K = |b_1| + |b_2| + \cdots + |b_k|$

因为 $a_n \to a (n \to \infty)$

所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1 \in N^+$

使得当 $n > N_1$ 时有

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, n > k$$

又因为$\frac{1}{n} \to 0$

故 $\exists N_2 \in N^+$

使得当 $n > N_2$ 时有

$$\frac{K}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n > N$ 时，有

$$|S_n - a| = \left|\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - a\right| \leqslant \frac{K}{n} + \frac{|b_{k+1}| + |b_{k+2}| + \cdots + |b_n|}{n}$$

$$< \left(1 + \frac{n-k}{n}\right)\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

所以 $S_n \to a(n \to \infty)$

同理可证 $a = +\infty$ 或 $a = -\infty$ 的情形.

注：(1) 当 $a = \infty$ 时结论不成立. 如数列 $1, -1, 2, -2, \cdots, n, -n, \cdots$；

(2) 若不限制方法，用 Stolz 定理证明更简单.

2. 利用数列极限的四则运算法则求极限

使用方法：

(1) 注意应用“数列极限的四则运算法则”的前提条件，即 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 必须为收敛数列，方可得到 $\{a_n \pm b_n\}$、$\{a_n \cdot b_n\}$、$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$（假设 $b_n \neq 0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$）也都是收敛数列，且有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$$

(2) 将数列进行适当的变形，使之各部分满足“数列极限的四则运算法则”的前提条件，然后利用运算法则求出数列的极限.

例 4　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}}$；(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2 + n} - n)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}\right)$.

解：(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n + 3^n}{(-2)^{n+1} + 3^{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 1}{(-2)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)^n + 3} = \frac{1}{3}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+n}-n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}=\dfrac{1}{2}$

(3) 由$\dfrac{2n-1}{2^n}=\dfrac{2n+1}{2^{n-1}}-\dfrac{2n+3}{2^n}$知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}-\frac{7}{2^2}+\frac{7}{2^2}-\frac{9}{2^3}+\cdots+\frac{2n+1}{2^{n-1}}-\frac{2n+3}{2^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{2n+3}{2^n}\right)=3$$

(因为$2^n=(1+1)^n\geqslant\dfrac{1}{2}n(n-1)$

所以$0\leftarrow\dfrac{1}{2^n}\leqslant\dfrac{2n+3}{2^n}\leqslant\dfrac{2n+n}{2^n}\leqslant\dfrac{3n}{\dfrac{1}{2}n(n-1)}=\dfrac{6}{n-1}\to 0\qquad(0\to\infty)$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n+3}{2^n}=0$)

3. 初等方法

使用方法:用初等数学的方法首先将数列通项进行恒等变形,然后求极限.

例 5　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$.

解: $$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\dfrac{1}{2}}}{\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1-\dfrac{1}{3}}}=\lim_{n\to\infty}2\cdot\frac{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n}{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}=2$$

例 6　求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$, $|a|<1$.

解:因为$|a|<1$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a^n=0$,且$\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^{n+1}}=0$. 又由$(1-a)(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=1-a^{2^{n+1}}$得

$$\lim_{n\to\infty}(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})=\lim_{n\to\infty}\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a}=\frac{1}{1-a}$$

例 7　求数列$x_n=\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$的极限.

解:可利用因式分解,求解过程如下:

$$x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)=\frac{n+1}{2n}\to\frac{1}{2}(n\to\infty)$$

例 8　求数列$x_n=\sin^2(\pi\sqrt{n^2+n})$的极限.

解:可利用诱导公式,求解过程如下:

$$x_n = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}) = \sin^2(\pi\sqrt{n^2+n}-n\pi) = \sin^2\frac{n\pi}{n+\sqrt{n^2+n}} \to 1(n\to\infty)$$

4. 两边夹(追敛性)法则

使用方法:当数列极限不易直接求出时,可将所求极限的数列表达式作适当的放大和缩小,使所得到的两个新数列的极限为已知或易于求出,且两数列的极限值相等,或仅相差一个任意小的正数,则原数列极限存在.

例 9 求$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}$.

解:因为$1 \leqslant (n!)^{1/n^2} \leqslant (n^n)^{1/n^2} = n^{1/n}$

又$\lim\limits_{n\to\infty}n^{1/n} = 1$,由追敛性知$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2} = 1$.

例 10 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$.

解:因为$\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}} < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}} = 1$,$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}} = 1$

由追敛性知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right) = 1$$

例 11 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$.

解法 1:因为$0 < \frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2} \leqslant \frac{n+1}{n^2} \to 0(n\to\infty)$

$$\text{所以}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right) = 0$$

解法 2:因为$0 < \frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}$

$$< \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right) < \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2n}\right)$$

而$\lim\limits_{n\to\infty}0 = 0$,$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{2n}\right) = 0$,由追敛性知

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right) = 0$$

例 12 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}$.

试读结束,需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

解法 1：因为 $1-\frac{1}{n}=\sqrt[n]{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n}\leqslant\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}<\sqrt[n]{1}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}=1$.

解法 2：当 $n>2$ 时，$\frac{1}{2}<1-\frac{1}{n}<1$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1$，故由迫敛性定理知，$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1-\frac{1}{n}}=1$.

例 13　求下列极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}$.

解：因为 $2n=\frac{(2n-1)+(2n+1)}{2}\geqslant\sqrt{(2n-1)(2n+1)}$　（均值不等式）

所以 $0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{1\cdot3}}\cdot\frac{3}{\sqrt{3\cdot5}}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

$=\frac{1}{\sqrt{(2n+1)}}$

又 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，利用迫敛性得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}=0$$

注：也可应用数学归纳法证得不等式 $0<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

5. 单调有界定理

使用方法：通常根据所求极限式的特征，估计其上下界，然后用数学归纳法等方法证明其单调性和有界性，并注意上下界在证明单调性中的应用，最后往往通过方程求解极限值，注意根的取舍.

例 14　证明数列

$$a_1=\sqrt{2},a_2=\sqrt{2+\sqrt{2}},\cdots,a_n=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{个根号}}$$

单调有界，并求其极限.

证明：显然数列 $\{a_n\}$ 是递增的，下面用归纳法证明数列 $\{a_n\}$ 是有上界的.

因为 $a_1=\sqrt{2}<2$，假设 $a_n<2$，则 $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}<\sqrt{2+2}=2$，由归纳法知，对一切 n 有 $a_n<2$. 即数列 $\{a_n\}$ 是有上界的. 由单调有界定理，数列 $\{a_n\}$ 有极限.

现设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$. 由于 $a_{n+1}^2=2+a_n$，运用数列的四则运算，当 $n\to\infty$ 时有 $a^2=2+a$，解得 $a=-1$（舍去），$a=2$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}=2$.

例 15　证明下列数列极限存在并求其值：

设　$$a_1=\sqrt{2},a_{n+1}=\sqrt{2a_n},n=1,2,\cdots$$

证明：数列的一般项为 $a_n=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$，$a_{n+1}>a_n$，且

$$a_n=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}<2,n=1,2,\cdots$$

所以$\{a_n\}$为单调递增有上界数列,故必有极限.

设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$,因为$a_{n+1}^2=2a_n$,两边取极限得$A^2=2A$,由此解得$A_1=2$或$A_2=0$,由于$a_n\geqslant\sqrt{2}$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$.

例 16 利用不等式$b^{n+1}-a^{n+1}>(n+1)a^n(b-a)$,$b>a>0$. 证明:$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$为递减数列,并由此推出$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$为有界数列.

证明:设$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,由不等式$b^{n+1}-a^{n+1}>(n+1)a^n(b-a)$,有

$$b^{n+1}-a^{n+1}>na^nb-na^{n+1}+a^nb-a^{n+1}$$

于是

$$b^{n+1}>na^nb-na^{n+1}+a^nb$$

所以

$$b^n>na^n+a^n-\frac{na^{n+1}}{b}$$

在上式中令$a=1+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{n}$,$b=1+\frac{1}{n-1}=\frac{n}{n-1}$(此时$b>a>0$),得

$$\begin{aligned}a_{n-1}&=\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n=\left(\frac{n}{n-1}\right)^n>n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-\frac{n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\frac{n}{n-1}}\\&=n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-(n-1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\\&=n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-(n-1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\frac{n+1}{n}\\&=n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-\left(n-\frac{1}{n}\right)\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}\\&=n\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+\left(\frac{n+1}{n}\right)^n-n\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}+\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\\&=\left(\frac{n+1}{n}\right)^n+\frac{1}{n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=a_n\end{aligned}$$

即$a_{n-1}>a_n$,故$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right\}$为递减数列.

而$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\leqslant\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1}=4$,所以$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right\}$为有界数列.

例 17 证明:若单调数列$\{a_n\}$含有一个收敛子列,则$\{a_n\}$收敛.

证明:不妨设$\{a_n\}$是单调增加数列,$\{a_{n_k}\}$是其收敛子列,于是$\{a_{n_k}\}$有界,即存在$M>0$,使得$a_{n_k}\leqslant M$,$k=1,2,\cdots$. 对单调增加数列$\{a_n\}$中的任一项a_m必有$a_m\leqslant a_{m_k}\leqslant M$,即$\{a_n\}$单调增加有上界,从而收敛.

例 18 设$a_1=1$,$a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$,$n\geqslant1$,则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$.

证明:由假设知$a_n>0$,从而$\{a_n\}$单增,且$a_n\geqslant1$,$n\geqslant1$;假设$\{a_n\}$有界,则其极限存在,设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$,则由递推公式得

$$l = l + \frac{1}{l}$$

$$\text{所以}\frac{1}{l} = 0$$

矛盾,故$\{a_n\}$无界,又$\{a_n\}$单增,所以$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$.

6. 柯西收敛准则

使用方法:①不需要知道数列的极限,即可证明数列的收敛性或发散性;②柯西收敛准则是极限理论中最为重要的理论之一,虽然常用来证明极限的收敛和发散,但尤其在证明极限发散时较为方便,应予以足够的重视.

例 19　证明数列$\{a_n\}$收敛,其中$a_n = \frac{\sin 1}{2} + \frac{\sin 2}{2^2} + \cdots + \frac{\sin n}{2^n}$.

证明:因为$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0$,于是对任给$\varepsilon > 0$,必存在$N > 0$,当$n > N$时,$\frac{1}{2^n} < \varepsilon$,所以当$n > N$时,对任意自然数$P$,有

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin(n+p)}{2^{n+p}}\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+p}} = \frac{1}{2^n}\left(1 - \frac{1}{2^p}\right) < \frac{1}{2^n} < \varepsilon \end{aligned}$$

由柯西收敛准则知数列$\{a_n\}$收敛.

例 20　设$\forall n \in N$,$|x_{n+1} - x_n| \leqslant c_n$,$S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k$,且$\{S_n\}$收敛,则$\{x_n\}$也收敛.

证明:因为$|x_{n+p} - x_n| \leqslant |x_{n+p} - x_{n+p-1}| + |x_{n+p-1} - x_{n+p-2}| + \cdots + |x_{n+1} - x_n|$.

$\leqslant \sum\limits_{k=n}^{n+p-1} c_k = S_{n+p-1} - S_{n-1}$

所以,由$\{S_n\}$收敛的柯西收敛准则知$\forall \varepsilon > 0, \exists N > 0, \forall n > N, \forall p \in N$,有$|S_{n+p} - S_n| \leqslant \varepsilon$,由此可知数列$\{x_n\}$收敛.

例 21　按柯西收敛准则叙述数列$\{a_n\}$发散的充要条件,并用它证明下列数列$\{a_n\}$是发散的:

(1) $a_n = (-1)^n n$;　(2) $a_n = \sin\frac{n\pi}{2}$;　(3) $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$.

证明:数列$\{a_n\}$发散的充要条件:存在$\varepsilon_0 > 0$,对任意自然数N,都存在$n_0 > m_0 > N$,使得$|a_{n_0} - a_{m_0}| \geqslant \varepsilon_0$.

(1) 对于$\varepsilon_0 = 1 > 0$,对任意自然数N,取$n_0 = N+3$,$m_0 = N+1$,则

$$\begin{aligned} |a_{n_0} - a_{m_0}| &= |(-1)^{N+3}(N+3) - (-1)^{N+1}(N+1)| \\ &= |(-1)^{N+1}| \cdot |(-1)^2(N+3) - (N+1)| = 2 > \varepsilon_0 \end{aligned}$$

由柯西收敛准则知$a_n = (-1)^n n$发散.

(2) 对于$\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$,对任意自然数$N > 0$,取$n_0 = 2N+1$,$m_0 = 2N$,则

$$|a_{n_0} - a_{m_0}| = \left|\sin\frac{(2N+1)\pi}{2} - \sin\frac{2N\pi}{2}\right| = |(-1)^N - 0| = 1 > \varepsilon_0$$

(3) 对于 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}>0$,对任意自然数 $N>0$,取 $m_0>N, n_0=2m_0$,则

$$|a_{n_0}-a_{m_0}|=\frac{1}{m_0+1}+\frac{1}{m_0+2}+\cdots+\frac{1}{2m_0}>m_0\cdot\frac{1}{2m_0}=\frac{1}{2}=\varepsilon_0$$

所以 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$ 收敛.

例 22 设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$,证明数列 $\{x_n\}$ 发散.

证明:提示 $\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right|\geqslant\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}$,由柯西收敛准则之逆即可得证.

例 23 设数列 $\{a_n\}$ 满足:存在正数 M,对一切 $n\in N^+$ 有

$$A_n=|a_2-a_1|+|a_3-a_2|+\cdots+|a_n-a_{n-1}|\leqslant M$$

证明数列 $\{a_n\}$ 与 $\{A_n\}$ 都收敛.

证明:(1) 因为 $A_{n+1}-A_n=|a_{n+1}-a_n|\geqslant 0$

又 $A_n\leqslant M$

所以 $\{A_n\}$ 为单调且有上界数列,所以 $\{A_n\}$ 收敛.

(2) 由 $\{A_n\}$ 收敛可知 $\forall\varepsilon>0, \exists N>0$,当 $m>n>N$ 时,有 $|A_m-A_n|<\varepsilon$,从而

$$|a_m-a_n|\leqslant|a_m-a_{m-1}+a_{m-1}-a_{m-2}+a_{m-2}+\cdots-a_{n+1}+a_{n+1}-a_n|\leqslant$$
$$|a_m-a_{m-1}|+|a_{m-1}-a_{m-2}|+\cdots+|a_{n+1}-a_n|=|A_m-A_n|<\varepsilon$$

由柯西准则知数列 $\{a_n\}$ 收敛.

练习题

1. 求下列数列的极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{n^3+3^3}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^5}{e^n}$; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})$.

2. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 为 m 个正数,证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^2+\cdots+a_m^n a_n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$.

3. 证明若 $a_n>0$,且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

4. 利用 $\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ 为递增数列的结论,证明 $\left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n\right\}$ 为递增数列.

5. 设 $a_1=\sqrt{c}, c>0, a_{n+1}=\sqrt{c+a_n}, n=1,2,\cdots$,证明数列 $\{a_n\}$ 极限存在并求其值.

6. 给定两正数 a_1 与 $b_1(a_1>b_1)$,做出其等差中项 $a_2=\frac{a_1+b_1}{2}$ 与等比中项 $b_2=\sqrt{a_1b_1}$,一般地令 $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}, n=1,2,\cdots$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 皆存在且相等.

7. 设$\{a_n\}$为无穷小数列，$\{b_n\}$为有界数列，证明$\{a_nb_n\}$为无穷小数列.

8. 证明若$\{a_n\}$为递增数列，$\{b_n\}$为递减数列，且$\lim\limits_{n\to 0}(a_n-b_n)=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}b_n$都存在且相等.

9. 设$a>0,\sigma>0,a_1=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{\sigma}{a}\right),a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{\sigma}{a_n}\right),n=1,2,\cdots$，证明数列$\{a_n\}$收敛，且其极限为$\sqrt{\sigma}$.

10. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[na_n]}{n}=a$;　　(2) 若$a>0,a_n>0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$.

11. 应用柯西收敛准则，证明数列$a_n=1+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2}$收敛.

12. 设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，证明若$a_n>0,n=1,2,\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$.

13. 利用归结原则求极限$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\sin\dfrac{\pi}{n}$.

第二讲　函数极限

一、基本内容

1. 函数极限概念

函数极限定义的六种形式为：

(1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当$0 < |x - x_0| < \delta$时,有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

(2) $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当$0 < x - x_0 < \delta$时,有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

(3) $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$,当$-\delta < x - x_0 < 0$时,有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

(4) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$,当$|x| > M$时,有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

(5) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$,当$x > M$时,有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

(6) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0$,当$x < -M$时,有$|f(x) - A| < \varepsilon$.

特别地,若函数在某个过程下以零为极限,则称为在该过程下的无穷小量.理解无穷小量阶的比较的定义及其意义,掌握等价无穷小量在极限计算中的应用,熟记常用的等价无穷小量,如当$x \to 0$时,有

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \ln(1+x) \sim e^x - 1,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, (1+x)^\alpha \sim \alpha x, a^x - 1 \sim x\ln a \text{ 等}$$

以上给出了极限为有限值情形下的六种定义;当极限为无穷时,相应的定义为(仅以一种类型极限为例,读者可类似给出其余定义):

(7) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0$,当$|x| > A$时,有$|f(x)| > M$.

(8) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0$,当$|x| > A$时,有$f(x) > M$.

(9) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0, \exists A > 0$,当$|x| > A$时,有$f(x) < -M$.

注:仅以$x \to x_0$为例,对函数极限定义(1)中的ε和δ的特性讨论如下:

① 该定义称为函数极限$\varepsilon - \delta$定义(精确化定义),相当于数列极限的$\varepsilon - N$定义.

② $0 < |x - x_0| < \delta$要求$x \to x_0$(x趋于x_0),但$x \neq x_0$,这一点非常重要.

③ 函数极限定义中的ε与数列极限定义中的ε一样,具有两重性,即任意性和相对固定性,ε是用来控制精度的.另外,若ε为任意正数,则$\frac{\varepsilon}{2}$、ε^2、$\sqrt{\varepsilon}$等均为任意正数,均可扮演ε的角色.也即ε的第三个特性——多值性.

④ 一般来说,δ是用来控制自变量x的,它表示x与x_0的接近程度,相当于数列极限$\varepsilon - N$定义中的N.它的第一个特性是相应性,即对给定的$\varepsilon > 0$,都(至少)有一个δ与之对应,δ依赖于ε,但不是由ε所唯一确定,所以δ是依赖于ε而适当选取的,为此常记为

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com