赖炎连 贺国平 编著

最优化方法

清华大学出版社

最优化方法

赖炎连 贺国平 编著

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书深入浅出地介绍了线性规划、无约束与有约束的非线性优化方法并对相关的理论作了必要的阐述．各部分的优化方法都是实用算法，特别介绍了多项直至2007年的优化方法最新成果．本书可作为运筹学、应用数学、计算数学和系统工程等专业的大学本科高年级学生和硕士研究生以及工科博士研究生的教材以及相关专业的教师，经济、管理与工程技术人员的参考书．

图书在版编目（CIP）数据

最优化方法/赖炎连，贺国平编著．—北京：清华大学出版社，2008．12

ISBN 978-7-302-17903-0

Ⅰ．最…　Ⅱ．①赖…②贺…　Ⅲ．最佳化　Ⅳ．O224

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 090806 号

责任编辑：佟丽霞　王海燕
责任校对：王淑云
责任印制：孟凡玉
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦A座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质量反馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：清华大学印刷厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：170×230　**印　张**：23.25　**字　数**：438千字
版　次：2008年12月第1版　**印　次**：2008年12月第1次印刷
印　数：1～4000
定　价：36.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：（010）62770177转3103　　产品编号：024654-01

本书得到

亚太运筹学研究中心和国家自然科学基金(10571109) 资助

前　　言

最优化问题广泛存在于国民经济的工农业、能源、交通等许多部门以及信息科学、环境科学与军事等领域."最优化方法"也成为高校应用数学的一门重要课程.本书是作者们在其有关最优化方法教学和指导研究生的讲义与材料基础上,经修改、整合而成的.全书共 7 章.第一作者以前 4 章的内容为首都师范大学数学科学学院的本科高年级优化课与研究生讲座讲过多次.前 5 章内容亦以选讲方式为中国科学院自动化研究所博士生讲过多次.第 5~7 章的内容及有关文献为第二作者近几年指导山东科技大学信息科学与工程学院的硕士生、博士生的讲义与基本材料.本书的前 4 章内容适合大学本科高年级学生,后 3 章面向硕士生与博士生,因此是一本基础与提高相结合的最优化方法教材.本书也可以作为应用数学和计算数学专业的教师、经济与管理工作者、工程技术人员的教学、科研与应用的参考书.

为了使内容既有一定系统性,又能包括部分最新的研究成果,本书内容略多于一般教材,可根据对象适当取舍选讲.对于本科生,主要讲授基础知识与算法,大部分数学的论证可略去不讲.例如,第 1,2 章中的可行解表示定理的证明,逆矩阵单纯形方法、混合整数规划的 Gomory 割平面方法、分解算法可以略去不讲,而 Karmarkar 内点算法可作简单介绍.第 3 章中重点讲述共轭梯度法与拟牛顿算法.第 4 章简述最优性条件,主要介绍约束优化算法特别是二次规划的有效集方法、GRG 方法与乘子法.根据授课对象情况,可用 54 学时或 72 学时讲授全书.

本书主要内容涉及线性规划、无约束最优化、有约束最优化(非线性规划)、变分不等式和并行优化方法的基本理论和算法.主要介绍用于各种优化模型的求解算法及必要的相关理论.在介绍基础知识、传统的实用算法的基础上,介绍了多种近代算法,如著名的线性规划的 Karmarkar 内点算法、戴彧虹-袁亚湘共轭梯度法、拟牛顿算法、序列二次规划(SQP)方法、系列线性方程组(SSLE)方法、PVD 和 PVT 并行优化算法,其中包括多项近年直至 2007 年的研究成果,并提供了一些有助于了解各个方向研究动态的参考文献.其中如"有效集识别技术"、"无严格互补松弛假设条件"的算法等是近年的新成果,相信会引起人们的兴趣.第 7 章的并行算法,虽然国内研究的人不多,但随着计算机技术的发展,定会引起人们的关注.

本书有如下特点:①方法的适应面广、实用性强.②基础知识、实用传统算法与近代算法相结合.③采用几何直观与通俗语言表述.例如,第 1 章,先从线性规划约束条件构成的可行集的几何结构分析入手,从二维到 n 维,将极点与基础可行

解、几何与代数特性对应，从直观上、整体上理解线性规划解的存在性、最优解的特征与解法性质，为掌握线性规划建立良好的基础. 同时也显示了 Farkars 定理的基础作用. 尽可能采用通俗语言来表述，以增加可读性. 我们认为只要掌握有关的优化方法，就可以将它运用于实际，产生经济效益和社会效益.

本书的出版得到亚太运筹学研究中心和国家自然科学基金(10571109)的资助并得到前中国运筹学会理事长章祥荪研究员的热情支持与鼓励，他为本书进行了认真的审查. 第一作者曾在首都师范大学数学科学学院讲授优化课程 3 个学期，自始至终得到数学科学学院院长李庆忠教授、副院长朱一心教授与焦宝聪教授的积极支持和热情关怀. 本书初稿整合完成以后，山东科技大学信息科学与工程学院的赵茂先教授、王永丽博士、韩丛英博士、首都师大数学科学学院陈兰平教授分别阅读了各章. 作者们在此对他们的热情关怀、支持、帮助与提出的宝贵意见表示衷心的感谢. 我们也对中国科学院自动化研究所研究生处的热情支持与清华大学出版社的佟丽霞、陈国新、王海燕老师对本书的出版的热情支持与指导表示衷心的感谢. 同时，我们还要向协助我们付出许多劳动的中国科学院自动化所 04 级博士研究生张昌华、王秀菁，北京交通大学 04 级博士研究生卞文良，山东科技大学信息学院的硕士研究生王鑫、朱笑容，首都师大 05 级硕士研究生罗卓笔等同学表示衷心的感谢！

限于作者的水平，书中不妥之处在所难免，敬请读者们批评指正.

赖炎连　贺国平[①]

2007 年 7 月

① 赖炎连，中国科学院数学与系统科学研究院应用数学研究所研究员、博士生导师.
贺国平，博士，山东科技大学信息科学与工程学院教授、博士生导师.

目　　录

第 1 章　线性规划的性质与算法

线性规划(linear programming,LP)是运筹学的重要分支,在经济、能源、交通以及技术领域等方面,诸如生产计划、经营决策、组织管理、经济规划、开发计划的制订与分析论证等问题上,有着广泛的应用.在资源合理开发利用特别是短缺资源的合理利用方面,产生了巨大的经济效益与社会效益,是决策科学化的有力工具.同时,由于非线性最优化(非线性规划)问题的复杂性,序列线性规划方法成为求解非线性优化问题的一个基本方法.

1.1　线性规划的基本性质

1.1.1　线性规划问题与数学模型

我们先看几个例子.

例 1　服装制造问题

某服装厂西服车间生产男、女西服两种服装,每套服装都要经过裁剪与缝制两道工序.生产一套男西服的裁剪时间为 2h,缝制时间为 5h.生产一套女西服的裁剪时间为 1.5h,缝制时间为 4h.该厂每天可用的裁剪时间为 12h,缝制时间为 31h,男、女西服售价分别为 1200 元与 1000 元.问如何安排生产,可使每天的效益最大?

解　现设每天生产男西服 x_1 套,女西服 x_2 套.因而每天需用裁剪工时为 $(2x_1+1.5x_2)$h,缝制工时为 $(5x_1+4x_2)$h.由两种工时条件的限制,必须使 x_1,x_2 的选择同时满足不等式:

$$2x_1 + 1.5x_2 \leqslant 12,$$

$$5x_1 + 4x_2 \leqslant 31.$$

我们的问题就是要求出满足不等式组的 x_1,x_2,使得服装的总售价

$$1200x_1 + 1000x_2$$

最大化.由此,我们得到如下的数学模型:

$$\max \quad z = 1200x_1 + 1000x_2, \tag{1.1.1}$$

$$\text{s.t.} \quad 2x_1 + 1.5x_2 \leqslant 12, \tag{1.1.2}$$

$$5x_1 + 4x_2 \leqslant 31, \tag{1.1.3}$$

$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_1, x_2 \text{ 取整数}. \tag{1.1.4}$$

上述模型中，$z=1200x_1+1000x_2$ 称为问题的目标函数. 每天安排生产使产值最大是问题的目标. 式(1.1.2)～(1.1.4)称为约束条件，x_1，x_2 不能取负值且只能取整数值. max 是 maximize 的缩写，s. t. 是 subject to 的缩写，意为“满足”或“受约束于”. 变量 x_1，x_2，称为**决策变量**. 给定 x_1，x_2 的一组值，称为确定一个**决策**，使目标函数 z 的值达到最大的决策称为**最优解**或**最优决策**.

例 2 配制混合饲料问题

设有 3 种谷物 A，B，C，用它们配制混合饲料，谷物的单位价格及混合饲料所需的营养成分甲、乙的含量如表 1.1 所示.

表 1.1

谷物 \ 营养成分	甲/g	乙/g	单位价格/元
A	20	16	20
B	8	12	15
C	10	6	18
饲料所需营养成分	1000	800	

在混合饲料中要求含甲种营养成分不少于 1000g，乙种营养成分不少于 800g. 问：如何配制混合饲料，在满足营养成分的条件下，使所需谷物的总费用最小？

解 今设配制的混合饲料需使用谷物 A，B，C 的用量分别为 x_1，x_2，x_3，因而谷物的费用为$(20x_1+15x_2+18x_3)$元.

问题的限制条件为

$$20x_1 + 8x_2 + 10x_3 \geqslant 1000,$$
$$16x_1 + 12x_2 + 6x_3 \geqslant 800,$$

以及 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$，$x_3 \geqslant 0$. 于是，我们得到的数学模型如下：

$$\min \quad z = 20x_1 + 15x_2 + 18x_3, \tag{1.1.5}$$

$$\begin{aligned} \text{s. t.} \quad & 20x_1 + 8x_2 + 10x_3 \geqslant 1000, \\ & 16x_1 + 12x_2 + 6x_3 \geqslant 800, \\ & x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,3. \end{aligned} \tag{1.1.6}$$

例 3 合理下料问题

某工厂要制造 100 台某种设备. 每台设备中要用到长为 1.2m，1.8m，2.6m 的钢管各一根. 该厂钢管原材料的长度为 7m. 问：原材料应如何裁截，可在满足制造要求的条件下，使原材料的用量最少？

解　显然，在每根原材料上裁截同一种规格的钢管的裁法不是好方法. 组合的裁截方法将会使料头较少，从而使原材料的使用量降低.

现在，我们选择 7 种使料头较少的裁截方法并将它们的 3 种规格的裁截数及剩余的料头数列于表 1.2 中，据此再建立数学模型.

表　1.2

裁截根数 \ 裁截方案		Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	Ⅴ	Ⅵ	Ⅶ
规格/m	1.2	0	2	1	4	1	0	3
	1.8	1	1	3	1	0	2	0
	2.6	2	1	0	0	2	1	1
料头长度/m		0	0.2	0.4	0.4	0.6	0.8	0.8

今设Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ，Ⅴ，Ⅵ，Ⅶ共 7 种裁截方案，使用的原材料数分别为 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7$. 我们的目的是使总料头的长度最小，因而可得目标函数的表示式为

$$z = 0x_1 + 0.2x_2 + 0.4x_3 + 0.4x_4 + 0.6x_5 + 0.8x_6 + 0.8x_7.$$

该问题的数学模型为

$$\begin{aligned}
\min\quad & z = 0x_1 + 0.2x_2 + 0.4x_3 + 0.4x_4 + 0.6x_5 + 0.8x_6 + 0.8x_7,\\
\text{s.t.}\quad & 0x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 1x_5 + 0x_6 + 3x_7 = 100,\\
& x_1 + x_2 + 3x_3 + 1x_4 + 0x_5 + 2x_6 + 0x_7 = 100,\\
& 2x_1 + x_2 + 0x_3 + 0x_4 + 2x_5 + x_6 + x_7 = 100,\\
& x_i \geqslant 0, 1 \leqslant i \leqslant 7, x_i \text{ 为整数}.
\end{aligned}$$

可以验证，$x_1 = x_2 = 0, x_3 = 20, x_4 = 0, x_5 = 32, x_6 = 20, x_7 = 16$ 是一组可行整数解. 但当裁截方案不够多时，可能不存在可行整数解. 若将等式变为不等式，则可行整数解存在，但料头数目会增多.

在上述 3 个数学模型中，目标函数 z 都是决策变量 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ 的线性函数，而约束条件左端的函数也是线性函数. 根据问题的不同，约束条件可以是不等式（$\leqslant$或$\geqslant$），也可以是等式的形式出现. 由于经济上的意义，各变量 x_i 都不能取负值，但是，在某些问题中，有的变量，例如 x_j，没有 $x_j \geqslant 0$ 的非负性限制，此时可引入两个新的非负变量 x_j^1 与 x_j^2，并令 $x_j = x_j^1 - x_j^2$，并将它代入约束条件中消去 x_j，使所有的变量都需要满足非负条件限制.

上述的线性目标、线性约束的一类极值问题不再是古典的极值问题，我们称为**线性规划问题**（LP 问题）.

为了研究算法的方便，我们在每个线性不等式约束条件中减去一个新的非负

变量(称为**剩余变量**)或加上一个新的非负变量(称为**松弛变量**),将不等式约束化为等式约束,也就是说,把约束条件变为线性方程组与变量非负约束,对于 n 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性规划问题,其数学模型的形式如下:

$$\max \quad z = \boldsymbol{cx} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \tag{1.1.7}$$

$$(\mathrm{LP}) \quad \text{s.t.} \quad \begin{aligned} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ & \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{aligned} \tag{1.1.8}$$

$$x_i \geqslant 0, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{1.1.9}$$

它的矩阵、向量形式可写成

$$\max \quad z = \boldsymbol{cx}, \tag{1.1.10}$$

$$\text{s.t.} \quad \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \tag{1.1.11}$$

$$\boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}, \tag{1.1.12}$$

其中 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 为行向量,$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$ 为列向量,矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{1.1.13}$$

$\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}$ 表示 $x_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,n$. T 表示向量或矩阵的转置.

式(1.1.7)～式(1.1.9)或矩阵形式的式(1.1.10)～式(1.1.12)的线性规划模型,我们称为**线性规划的标准型**.

在线性规划中,变量通常取实数值. 当所有 x_i 均要求取整数值时,这种线性规划称为**整数线性规划**. 线性规划中只有部分变量要求取整数值的问题,称为**混合整数规划问题**.

在 LP 问题的讨论中,我们常用如下的术语及记号.

① 容许解:一个决策 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,当其所有分量 x_i 的值满足约束条件式(1.1.8)和式(1.1.9)或式(1.1.11)和式(1.1.12)时,称 $\boldsymbol{x}$ 为该约束条件的**容许解**或**可行解**.

② 容许集:所有满足约束条件的容许解的全体组成的集合,称为**容许集**、**可行集**或**可行区域**. 若记 S 为容许集,则 S 可表示成

$$S = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}, \boldsymbol{x} \geqslant \boldsymbol{0}\},$$

意为 $\boldsymbol{x}$ 为 S 的元素,$\boldsymbol{x}$ 满足式(1.1.11)与式(1.1.12)的条件.

决策变量 $\boldsymbol{x}$ 的维数 n 决定了 LP 的规模，而 LP 的三元组 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$ 决定了线性规划的一切内在性质.

1.1.2　约束集合的几何与代数特性

线性规划由目标函数与约束条件组成，由于目标函数是线性函数，它在空间任一点的某个开邻域内不可能有极大值与极小值. 因此，线性规划如果有最优解，则最优解必在约束集 S 的边界上达到. 线性规划问题有解与否，是目标函数 z 与约束集 S 之间的关系问题. 同样的约束集合 S，当 z 的函数系数不同时，两个线性规划的解的性质可以有很大的差异. 我们从 $n=2$，即两个变量的 LP 入手，先研究约束集合的构造，从几何特性与代数特性两个方面及其关系加以阐述，在此基础上给出线性规划的基本定理与解的类型分析.

1. 约束集合的几何特性

定义 1.1.1(凸集)　X 为 n 维欧氏空间的集合，若对于 X 中任意两个不同的点 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{x}^{(2)}$，$\boldsymbol{x}^{(1)}\neq\boldsymbol{x}^{(2)}$，均有点 $\boldsymbol{w}=\alpha\boldsymbol{x}^{(1)}+\beta\boldsymbol{x}^{(2)}\in X$ 对任意的 $\alpha\geqslant0,\beta\geqslant0,\alpha+\beta=1$ 成立，则称 X 为**凸集**. 点 $\boldsymbol{w}$ 表示 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{x}^{(2)}$ 连线上的点，它们构成线段 $\overline{\boldsymbol{x}^{(1)}\boldsymbol{x}^{(2)}}$. 对于上述的 α,β，称 $\alpha\boldsymbol{x}^{(1)}+\beta\boldsymbol{x}^{(2)}$ 为 $\boldsymbol{x}^{(1)}$ 与 $\boldsymbol{x}^{(2)}$ 的**凸组合**.

线段 $\overline{AB}$、$\triangle ABC$、平面上的正四边、多边形以及圆等都是凸集. 不包含边界点的凸集称为**开凸集**，否则为**闭凸集**.

由凸集的定义，容易证明：

① $S=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}\}$ 为凸集.

② $S=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}\leqslant\boldsymbol{b}\}$ 为凸集.

③ $S=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b},\boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}\}$ 为凸集.

④ S_1 为凸集，$S_2=\{\boldsymbol{x}\mid\boldsymbol{x}=k\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}\in S_1\}$（$k\geqslant0$ 为实数）也是凸集.

由凸组合的定义，两点 $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)}$（$\boldsymbol{x}^{(1)}\neq\boldsymbol{x}^{(2)}$）的凸组合生成线段 $\overline{\boldsymbol{x}^{(1)}\boldsymbol{x}^{(2)}}$. 不共线的三点 $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\boldsymbol{x}^{(3)}$，生成一个以 $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\boldsymbol{x}^{(3)}$ 为顶点的三角形. 三维空间的 4 个点可以生成三棱锥体. 若 S 为由给定的点 $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(m)}$ 的凸组合所生成，即

$$S=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\boldsymbol{x}^{(i)},\alpha_i\geqslant0,\sum_{i=1}^{m}\alpha_i=1\right\},$$

则可证 S 为凸集. 若对所有的 $\boldsymbol{x}^{(i)}$，当令 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}^{(i)}$ 时，右端各项中的 $\alpha_i=1$，其余 $\alpha_j(j\neq i)$ 为零，则 S 为由 m 个顶点 $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(m)}$ 生成的凸集.

⑤ S_1,S_2 是凸集，则它们的交集 $S=S_1\cap S_2$ 也是凸集.

一个集合 X，若 $\boldsymbol{x}\in X$，$\alpha\boldsymbol{x}\in X(\alpha\geqslant0)$ 也成立，则称 X 为一个**锥**.

例如，从坐标原点出发的两条射线围成的无界区域构成一个锥. 若锥中的点满足凸集的定义，则称为**凸锥**.

现在，我们来考察 Ox_1x_2 平面上的两个约束集合 S_1 与 S_2 及其几何特性.

约束集合 S_1(图 1.1)由下列线性不等式组及非负约束定义：

$$\begin{aligned} &x_1 - 2x_2 \leqslant 3, \\ &3x_1 + 2x_2 \leqslant 17, \\ &x_2 \leqslant 4, \\ &-2x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ &x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.1.14}$$

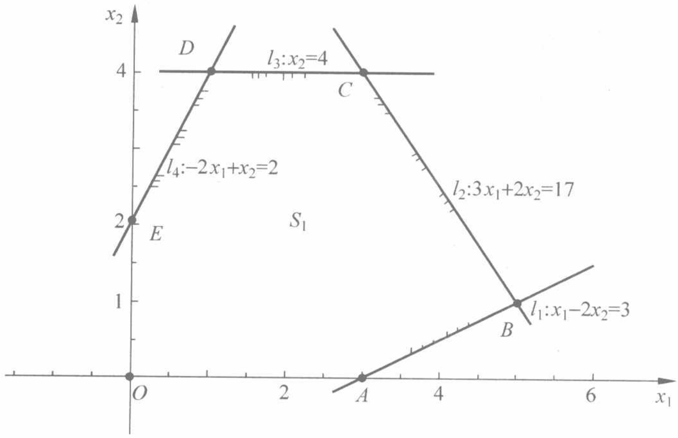

图 1.1

用 l_1，l_2，l_3，l_4 顺次表示 4 个不等式约束的边界直线，产生 5 个交点 A，B，C，D，E，约束集合 S_1 就是以点 O，A，B，C，D，E 为顶点的凸六边形. 它是由 4 个不等式约束条件产生的半平面以及第一象限的两个半平面相交而成的. 每个半平面是凸集，它们的交也是凸集.

由凸组合的定义，顶点 A，D 的凸组合 $\boldsymbol{y}=\alpha\overrightarrow{OA}+(1-\alpha)\overrightarrow{OD}$，$0\leqslant\alpha\leqslant1$，对应线段$\overrightarrow{AD}$上的点，若将 $\boldsymbol{y}$ 与$\overrightarrow{OC}$再作凸组合，并令

$$\boldsymbol{x} = \beta\boldsymbol{y} + (1-\beta)\overrightarrow{OC}, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1,$$

则

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x} &= \beta(\alpha\overrightarrow{OA} + (1-\alpha)\overrightarrow{OD}) + (1-\beta)\overrightarrow{OC} \\ &= \alpha\beta\overrightarrow{OA} + \beta(1-\alpha)\overrightarrow{OD} + (1-\beta)\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \gamma_1 \overrightarrow{OA} + \gamma_2 \overrightarrow{OD} + \gamma_3 \overrightarrow{OC},$$

而 $\gamma_i \geqslant 0, \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 = 1$.

进一步,对于任一 $\boldsymbol{x} \in S_1$,总存在 $\alpha_i \geqslant 0, \sum_{i=1}^{6} \alpha_i = 1$,使得

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{0} + \alpha_2 \overrightarrow{OA} + \alpha_3 \overrightarrow{OB} + \alpha_4 \overrightarrow{OC} + \alpha_5 \overrightarrow{OD} + \alpha_6 \overrightarrow{OE} \tag{1.1.15}$$

成立.

也就是说,S_1 的任一 $\boldsymbol{x}$ 总可表示成 6 个顶点的凸组合. 但是,对于 S_1 的顶点来说,不存在多于一个的非零的 α_i,使得 $\boldsymbol{x}$ 为某顶点时,能使式(1.1.15)成立,这种点称为**极点**. 也就是说,极点是不能由集合上其他两个不同的点的凸组合表示的点.

定义 1.1.2(极点)　若 $\boldsymbol{x}$ 是凸集 S 的点,在 S 中不存在不同的两点 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}$,使得

$$\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{x}^{(1)} + (1-\alpha)\boldsymbol{x}^{(2)}, \quad 0 < \alpha < 1$$

成立,则称 $\boldsymbol{x}$ 为该凸集的**极点**.

据此定义,若 $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \cdots, \boldsymbol{x}^{(m)}$ 为平面上有界凸多边形 S 的极点,则 $\boldsymbol{x} \in S$ 的充分必要条件是

$$\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{x}^{(1)} + \alpha_2 \boldsymbol{x}^{(2)} + \cdots + \alpha_m \boldsymbol{x}^{(m)}, \quad \alpha_i \geqslant 0, \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_m = 1 \tag{1.1.16}$$

成立.

现在,我们再来考察凸集 S_2(图 1.2). 它由下面的 3 个不等式约束与非负约束定义:

$$\begin{aligned} & x_1 - 2x_2 \leqslant 3, \\ & -2x_1 + x_2 \leqslant 2, \\ & 2x_1 + 3x_2 \geqslant 6, \\ & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1.1.17}$$

前两个不等式与 S_1 的第一、第四个约束相同,而第三个约束的边界则是点 A 与 E 的连线,这些不等式定义的区域不包含坐标原点 O.

集合 S_2 是由 $\overline{AE}$ 及分别由 A 与 E 出发的两条射线围成的无界凸集,它包含两个极点 A 与 E. 只用 S_2 的极点来生成点集 S_2 是不可能的. 我们必须利用射线 l_1 上的方向 $\boldsymbol{Y}_1 = (2,1)$ 与 l_4 上的方向 $\boldsymbol{Y}_2 = (1,2)$ 以及极点 A, E 才能将 S_2 的可行域表示出来,亦即对任一 $\boldsymbol{x}$,若 $\boldsymbol{x} \in S_2$,则有

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{x} = \alpha \overrightarrow{OA} + (1-\alpha) \overrightarrow{OE} + \beta \boldsymbol{Y}_1 + \gamma \boldsymbol{Y}_2, \\ & 0 \leqslant \alpha \leqslant 1, \quad \beta \geqslant 0, \quad \gamma \geqslant 0 \end{aligned}$$