理科要覽

幾何學

桂叔超　金品編

商務印書館

理 科 要 覽

幾 何 學

桂叔超 金品編

商 務 印 書 館 出 版

上海河南中路二一一號

〔上海市書刊出版業營業許可證出字第〇二五號〕

新 華 書 店 總 經 售

商 務 印 書 館 印 刷 廠 印 刷

上海天通菴路一九〇號

(52274)

1937年6月初版 1954年9月20版

印數 80,501—100,500 定價 ¥6,500

目　次

定義

[幾何學] 僅就物之形狀,大小,位置而研究其眞理之學科也。

[立體] 物體僅就其形狀,大小,位置而考之者,此物體曰立體。

[面] 僅有長,寬而無厚者曰面。立體之界亦爲面。

[線] 僅有長而無寬與厚者曰線。面之界及二面之交亦爲線。

[點] 僅有位置而無大小者曰點。線之界及二線之交亦爲點。

[圖形] 立體,面,線,點及此等所集合者曰圖形。

[直線] 任取線之一份置諸他份上,若處處重合者,則此線曰直線。

[平面] 連結面上任二點作成直線若全在其面上者,則此面曰平面。

[公理] 不待證明而自知之眞理,可爲推理之基礎者,曰公理。

[定理] 以定義及公理爲基礎,由是依推理導出之眞理,稱爲定理。

[幾何學之符號] 幾何學所用之符號有下列各種:

1.	$\therefore$	故	2.	$\because$	因	3.	$\angle$	角
4.	$\perp$	垂直	5.	$\angle R$	直角	6.	$\parallel$	平行
7.	$\triangle$	三角形	8.	$=$	相等	9.	$\equiv$	全等
10.	$\neq$	不等	11.	$>$	大於	12.	$<$	小於

問題

(1) 試述幾何學所用主要之普通公理。

(2) 試列舉幾何公理。

(3) 試述定理之形狀。

解　　答

(1) 公理有普通公理及幾何學公理二種:

普通公理關於一般之量。

幾何學公理僅關於幾何學。

幾何學所用主要之普通公理如下:

1. 等於同量之量互相等。
2. 全量大於其一部分,而等於其各部分之和。
3. 等量加等量,其和相等。
4. 等量減等量,其差相等。
5. 不等之量加等量,其和仍不等,原大者仍大。
6. 不等之量減等量,其差仍不等,原大者仍大。
7. 等量之同倍數之量相等。
8. 等量之同分數之量相等。
9. 第一量大於第二量,第二量又大於第三量,則第一量必大於第三量。
10. 等量減不等量,其差仍不等,原大者反小。

(2) 幾何學公理如次:

1. 通過二定點之直線唯一。
2. 連結二點之線分,爲二點間所引諸線中之最短者。
3. 圖形可不變其形狀與大小,而變其位置。
4. 線分可依其二方向無限延長。
5. 過一直線外一點僅可作一直線,與其直線平行。
6. 全相合之圖形,其大小相等。

(3) 凡一定理由二部分而成;第一爲其始所定之條件,是謂假設;第二爲由此假設所生必然之結果,是謂終決。例如

如 A 爲 B, 則 C 爲 D。

[如 A 爲 B] 名曰假設或已知,[則 C 爲 D] 名曰終決或求證。

定　　義

［角］　從同一點引二直線，此二直線間之圖形曰角，其點曰頂點，其二直線曰邊。

［鄰角］　從一點引三直線中間一線，與外側二線作成二角，是謂鄰角。其和等於外側二線之角。

［平角］　角之二邊於頂點之兩側，在同一直線上者曰平角。

［直角］　一直線交於他之一直線上，其兩側爲相等之鄰角，則其各角曰直角。

［垂線］　二直線相交成直角，則曰互爲垂直；其線曰垂線，其交點曰垂線之足。

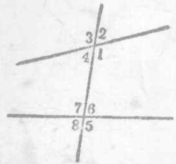
［銳角］　小於一直角之角曰銳角。

［鈍角］　大於一直角，而小於二直角之角曰鈍角。

［餘角］　二角之和等於一直角之時，則曰互爲餘角。

［補角］　二角之和等於二直角之時，則曰互爲補角。

［對頂角］　二直線相交，其所成相對之二角，曰對頂角。



［內錯角，同位角，同傍內角］　4 與 6，1 與 7 曰內錯角；2 與 6，3 與 7，1 與 5，4 與 8 曰同位角；4 與 7，1 與 6 曰同傍內角。

問　　題

(1)　30° 之餘角若干？

(2)　120° 之補角若干？

(3)　$\frac{3}{4}\angle R$ 之餘角及補角各爲若干？

(4)　某角爲其補角之三分之一。問此角爲若干度？

(5)　某角爲其餘角之二倍。求此角之度數。

(6)　某角之補角爲其餘角之四倍。求此角。

(7)　有二鄰角各爲 30° 及 120°，則其各二等分角線之間之角若干？

(8)　時鐘之長針回轉十分時，成角若干度。但回轉一周爲 360°。

(9)　2 時 25 分之兩針，夾成若干度之角？

解　　　答

(1) 二角之和爲一直角，則曰互爲餘角。

因　$90°-30°=60°$。

故知 $30°$ 之餘角爲 $60°$。

(2) 二角之和爲二直角卽 $180°$，則曰互爲補角。

因　$180°-120°=60°$。

故知 $120°$ 之補角爲 $60°$。

(3) $\frac{3}{4}\angle R=\frac{3}{4}\times 90°=67°30'$。

故其餘角爲 $22°30'$，其補角爲 $112°30'$。

(4) 設所求之角爲 x 度，則其補角爲 $180°-x$。故得方程式　$3x=180°-x$。

解之，得　$x=45°$。　　答　某角爲 45 度。

(5) 設所求之角爲 x 度，則其餘角爲 $90°-x$。依題意，得下之方程式

$$x=2(90°-x)。$$

解此方程式，得　$x=60°$。

答　某角爲 60 度。

(6) 設某角爲 x 度，則其餘角爲 $90°-x$，其補角爲 $180°-x$。依題意，得下之方程式

$$180°-x=4(90°-x)。$$

解之，得　$x=60°$。　　答　某角爲 60 度。

(7) 所求之角爲 $\frac{30°}{2}+\frac{120°}{2}=15°+60°=75°$。

答　此角爲 75 度。

(8) 所求之角爲 $360°\times\frac{10}{60}=60°$。

答　此角爲 60 度。

(9) 長針回轉 25 分所成之角度爲

$$6°\times 25=150°$$

此時短針必回轉 $150°\times\frac{1}{12}=12.5°$。

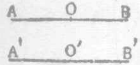
又短針自 12 時回轉至 2 時所成之角度必爲

$$6°\times 10=60°。$$

$\therefore$　所求之角 $=150°-(60°+12.5°)=77.5°$。

證明

(定理 1) 凡平角皆相等。



[已知] $\angle AOB$ 及 $\angle A'O'B'$ 均爲平角。

[求證] $\angle AOB=\angle A'O'B'$。

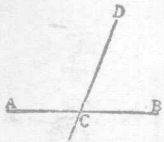
[證明] $\angle AOB$ 及 $\angle A'O'B'$ 之二邊各爲一直線。 (定義)

故 O' 重合於 O，$O'B'$ 重合於 OB，則 $O'A'$ 重合於 OA。 (公理)

$\therefore$ $\angle AOB=\angle A'O'B'$。 (公理)

(定理 2) 一直線交於他一直線上，則其二鄰角之和等於二直角。

[已知] AB 與 CD 相交於 C 點。



[求證] $\angle ACD+\angle DCB=180°$。

[證明] $\angle ACD+\angle DCB=\angle ACB$。

然 ACB 爲一直線。

$\therefore$ $\angle ACB$ 爲平角。

$\therefore$ $\angle ACD+\angle DCB=2\angle R$

或 $=180°$。

問題

(1) 直角皆相等。

(2) 相等之角之餘角亦相等。

(3) 相等之角之補角亦相等。

(4) 有二直線 AB，CD 相交於一點 O，若 $\angle AOC$ 爲一直角，則他之三角亦爲直角。

(5) 從集於一點之任意直線所成若干鄰角之和，等於四直角。

(6) 四直線 OA，OB，OC，OD 集於一點，若 $\angle AOB=\angle COD$ 及 $\angle BOC=\angle AOD$，則

$\angle AOB+\angle BOC=180°$，

或 $\angle AOB+\angle AOD=180°$。

解　　　　答

(1) [證明] 直角爲平角之半,而相等之角之半皆相等。故平角之半即直角皆相等。

(2) [已知] $\angle A=\angle B$, $\angle C$, $\angle D$ 各爲 $\angle A$, $\angle B$ 之餘角。

[求證] $\angle C=\angle D$。

[證明] $\angle A+\angle C=90^\circ$ 及 $\angle B+\angle D=90^\circ$。(定義)

$\therefore \angle A+\angle C=\angle B+\angle D$。(公理)

$\because$ $\angle A=\angle B$。$\therefore$ $\angle C=\angle D$。(等量減法公理)

(3) [已知] $\angle A=\angle B$, $\angle C$,$\angle D$ 各爲 $\angle A$, $\angle B$ 之補角。

[求證] $\angle C=\angle D$。

[證明] $\angle A+\angle C=180^\circ$ 及

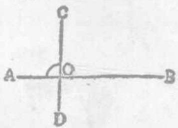
$\angle B+\angle D=180^\circ$。(定義)

$\therefore$ $\angle A+\angle C=\angle B+\angle D$。

因 $\angle A=\angle B$。

$\therefore$ $\angle C=\angle D$。

(等量減法公理)



(4) [已知] $\angle AOC=90^\circ$。

[求證] $\angle BOC=\angle COD$
$=\angle DOA=90^\circ$。

[證明] 因 AB 爲一直線, CD 爲他直線。

故 $\angle AOC+\angle BOC=180^\circ$。

$\therefore$ $\angle AOC=90^\circ$。

$\therefore$ $\angle BOC=180^\circ-90^\circ=90^\circ$。

同理,可證 $\angle BOD=\angle DOA=90^\circ$。

(5) [已知] AO, BO, CO, DO 順次交於 O。

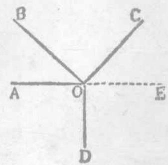
[求證] $\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOA$
$=360^\circ$。

[證明] 延長 OA 至 OE, 則

$\angle AOB+\angle BOC+\angle COE$
$=180^\circ$,

$\angle AOD+\angle DOE=180^\circ$

相加,得$\angle AOB+\angle BOC+\angle COD$
$+\angle DOA=360^\circ$。



(6) [已知] $\angle AOB=\angle COD$,
$\angle BOC=\angle AOD$。

[求證] $\angle AOB+\angle BOC$
$=180^\circ$, 或 $\angle AOB+\angle AOD=180^\circ$。

[證明] 自前題,知

$\angle AOB+\angle BOC+\angle COD+\angle DOA=360^\circ$。

但 $\angle AOB=\angle COD$ 及 $\angle BOC=\angle DOA$。

$\therefore$ $2(\angle AOB+\angle BOC)=360^\circ$,

即 $\angle AOB+\angle BOC=180^\circ$。

證明

(定理 3) 一直線交於他之二直線上，其鄰角之和等於二直角時；則其他之二直線必爲一直線(此定理曰定理 2 之逆定理)。

[已知] $\angle ABC+\angle CBD=180°$。

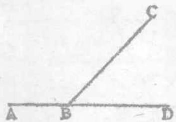
[求證] AB, BD 在一直線上。

[證明] $\angle ABC+\angle CBD=\angle ABD$。

然 $\angle ABC+\angle CBD=180°$。

$\therefore$ $\angle ABD=180°$。$\therefore$ $\angle ABD$ 爲平角。

$\therefore$ AB, BD 在一直線上。



(定理 4) 凡二直線相交，其所成之對頂角相等。

[已知] $\angle AOC$, $\angle BOD$ 爲對頂角。

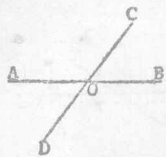
[求證] $\angle AOC=\angle BOD$。

[證明] $\angle AOC+\angle COB=180°$,

$\angle COB+\angle BOD=180°$。

$\therefore$ $\angle AOC+\angle COB=\angle COB+\angle BOD$。

兩邊各減 $\angle COB$，則 $\angle AOC=\angle BOD$。



問題

(1) 二直線交成之鄰角，其各角之二等分角線互相垂直。

(2) 二直線 OB, OD 與一直線 AC 同在點 O 相會，而在其反對之側；若 $\angle AOB=\angle COD$，則 BO, OD 成一直線。

(3) 角之二等分線必二等分其對頂角。

(4) 直線垂直於角之分角線，則必與角之二邊成等角。

(5) 設 $\angle ADB$, $\angle BDC$ 爲二鄰角，而 DE 及 DF 爲其分角線，若 $DE\perp DF$，求證 ADC 爲一直線。

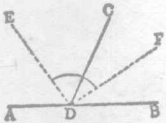
解　　答

(1) [已知] DE, DF 各爲 AB, CD 交成二鄰角 ADC, CDB 之分角線。

[求證] $ED \perp DF$。

[證明] $\angle ADC = 2\angle EDC$,

$\angle CDB = 2\angle CDF$。



然 $\angle ADC + \angle CDB = 180°$。

$\therefore 2\angle EDC + 2\angle CDF = 180°$。

$\therefore \angle EDC + \angle CDF = 90°$, 卽 $\angle EDF = 90°$。

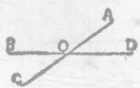
$\therefore ED \perp DF$。

(2) [證明] $\angle BOC + \angle AOB = 180°$。

然 $\angle AOB = \angle COD$。

$\therefore \angle COB + \angle COD = 180°$。

故 OB, OD 爲一直線。



(3) [已知] PQ 爲 $\angle AOB$ 之分角線。

[求證] $\angle COQ = \angle DOQ$。

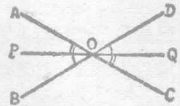
[證明] 從定理 4, 知

$\angle AOP = \angle COQ$

及 $\angle POB = \angle DOQ$。

但 $\angle AOP = \angle POB$, (已知)

$\therefore \angle COQ = \angle DOQ$。



(4) [已知] OC 爲 $\angle AOB$ 之分角線,且 $DOE \perp OC$。

[求證] $\angle AOD = \angle BOE$。

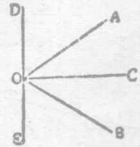
[證明] $\angle DOC = \angle COE = 90°$,

又 $\angle AOC = \angle BOC$。 (已知)

$\therefore \angle DOC - \angle AOC$

$= \angle COE - \angle BOC$,

卽 $\angle AOD = \angle BOE$。



(5) [已知] $\angle BDF = \frac{1}{2}\angle BDC$,

$\angle BDE = \frac{1}{2}\angle ADB$, 且 $DE \perp DF$。

[求證] ADC 爲一直線。

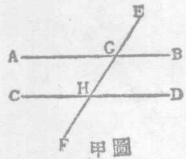
[證明] $\because DE \perp DF$。

$\therefore \angle BDF + \angle BDE = 90°$。

2 倍之,得 $\angle ADB + \angle BDC = 180°$。 故如題云云。

證　　明

(定理 5) 一直線交於他之二直線，若其內錯角相等，則此二直線互相平行。

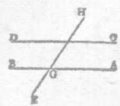


甲圖

〔已知〕 PQ 直線交 AB, CD 二直線於 E,F 及 $\angle AGF=\angle EHD$。

〔求證〕 $AB \parallel CD$。

〔證明〕 將甲圖迴轉如乙圖，卽置乙圖於甲圖上；使乙圖之 GH 重合於甲圖之 GH 上；則乙之 G 落於甲之 H，乙之 H 落於甲之 G，而於甲圖因 $\angle AGH=\angle DHG$，卽乙圖之 $\angle AGH$，等於甲圖之 $\angle DHG$；故乙圖之 GA，重合於甲圖之 HD 上。同樣，乙圖之 HD，重合於甲圖之 GA，故乙圖之各直線部分皆重合於甲圖之各直線部分，卽乙圖之全部與甲圖一致。故如設甲圖之 AB,CD 在任何一方相交，則與其重合之乙圖二直線，必在其反對之方向相交，而因乙圖與甲圖重合，故其結果卽二直線 AB, CD 在 EF 之兩側各有交點，此與平行線之公理相反，故 AB, CD 不相交。



乙圖

問　　題

(1) 一直線與他之二直線相交，若其同位角相等，或同傍內角相補，則此二直線必平行。

(2) 二直線因垂直於一直線上，則此二直線互爲平行。

(3) 一直線垂直於二平行線之一，則亦垂直於其他。

(4) 同直線之垂線與斜線相交。

(5) 平行於同一直線之二直線，必互爲平行。

解 答

(1) (前圖) [已知] $\angle PEB=\angle EFD$。

[求證] $AB \parallel CD$。

[證明] $\angle PEB=\angle AEF$。 (定理 4)

$\therefore$ $\angle AEF=\angle EFD$。

$\therefore$ $AB \parallel CD$。 (定理 5)

又 $\angle BEF+\angle EFD=2R\angle$, (已知)

則 $AB \parallel CD$。 (求證)

[證明] $\angle AEF+\angle BEF=2R\angle$。 (定理1)

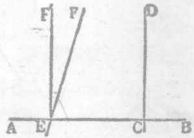
$\therefore$ $\angle AEF=\angle EFD$。

$\therefore$ $AB \parallel CD$。 (定理 5)

(2) [證明] 二直線爲同一直線之垂線，則其所成之角皆爲直角，從而內錯角相等，故二直線互爲平行。

(3) [證明] 平行線與一直線之內錯角相等，今其一爲直角，則他角亦然，卽他之直線亦爲垂線。

(4) [已知] CD 爲 AB 之垂線，EF 爲其斜線。



[求證] CD 與 EF 相交。

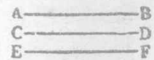
[證明] 過 E 作 AB 之垂線 EF'，則

$\angle DCA+\angle F'EB=2R\angle$。

$\therefore$ $CD \parallel EF'$。

然 EF' 爲 AB 之垂線，而 EF 爲其斜線，故 EF 與 EF' 不一致。然過 E 作 CD 之平行線只 EF' 一直線，是 EF 與 CD 不平行，卽相交。

(5) [已知] $AB \parallel EF, CD \parallel EF$。



[求證] $AB \parallel CD$

[證明] 試令 AB, CD 不平行而相交，則過其交點得作平行於 EF 之二直線，是與公理 4 不合，故 AB, CD 不相交，卽平行。

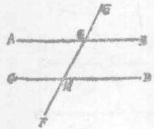
證　　明

(定理 6)　一直線交於二平行線上,則其內錯角必相等。

[已知]　EF 與平行線 AB, CD 交於 G, H。

[求證]　$\angle AGH=\angle GHD$ 或 $\angle BGH=\angle GHC$。

[證明]　過 G 作線使與 EF 成一等於 $\angle GHD$ 之角,則此線必與 CD 平行(定理 5)。然 $AB \parallel CD$ 而過 G 平行於 CD 之直線只有一。



(公理)是過 G 作等於 $\angle GHD$ 之線僅有 AB。

$\therefore\ \angle AGH=\angle GHD$, 其他可同樣證之。

系　一直線與二平行線相交,則其同位角相等,同傍內角相補。

(定理 7)　三角形內角之和等於二直角。

[已知]　延長 BC 至 D。

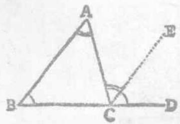
[求證]　$\angle A+\angle B+\angle C=180°$。

[證明]　作 $CE \parallel AB$, 則

$\angle ACE=\angle BAC$, $\angle ECD=\angle ABC$。

$\therefore\ \angle A+\angle B+\angle C$

$=\angle ACB+\angle ACE+\angle ECD=\angle BCD=180°$。

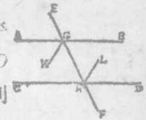


系　三角形之外角等於其內對角之和。

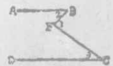
問　　題

(1)　若兩直線被一截線所截,其同旁內角之分角線互相垂直,則此兩直線平行。

(2)　直線 EF 與平行線 AB, CD 交於 G 及 H, 則內錯角 $\angle AGH$, $\angle DHG$ 之分角線 GK, HL 必平行。



(3)　如圖,設 $AB \parallel CD$, 求證 $\angle 1=\angle 2+\angle 3$。



(4)　兩三角形之二角兩兩相等,則第三角亦相等。

(5)　O 為 $\triangle ABC$ 內之一點,則 $\angle BOC=\angle BAC+\angle ABO+\angle ACO$。