中等專業学校教学用書

医藥性質專業适用

代 数

(試用本)

鄒 定 仪 編

高等教育出版社

中等專業学校

医藥性質專業用

代　　　数

（試用本）

鄒定仪編

高等教育出版社出版 北京宣武門内承恩寺7号
（北京市書刊出版業營業許可証出字第054号）
京华印書局印刷　　新华書店發行

統一書号13010·316　開本850×1168 1/32　印張3 15/16　字數96,000　印數31,501—39,500
1957年7月第1版　1958年7月北京第4次印刷　定價(8)￥0.48

本書是根据高等教育部 1956 年批准的中等專業学校（医藥性質）190 小时的数学教学大綱（內代数占 70 小时）編写的。全書共分六章，主要內容包括：簡單函数及其圖象，乘冪与方根、二次方程、二元二次方程組、冪的概念的推广、对数等。本書由鄒定仪先生編写，在編写过程中，曾广泛吸收了有关学校的意見。本書可供中等医藥專業学校教学之用

目　录

第一章　最簡單的函数和它的圖象

§1. 变量与常量

研究自然現象与技术过程和社会生活上的某些問題时，我們必須考察其中所出現的各种量，这些量可分为常量与变量兩类。

定义：在問題所給定的条件下，可以取不同数値的量叫做变量，保持同一数値的量叫做常量。

每个問題的条件，决定了其中那些量是变量，那些量是常量。

例如，三角形 ABC 的底边 AB 一定时，如果它的頂点 C 沿平行于底边的直綫移动，那么它的側边 AC 和 BC 的長与三个內角都是变量，而它的高与面积都是常量(圖 1)。如果三角形的頂点 C 沿着垂直于底边的直綫移动，那么它的高与面积就成为变量(圖 2)。

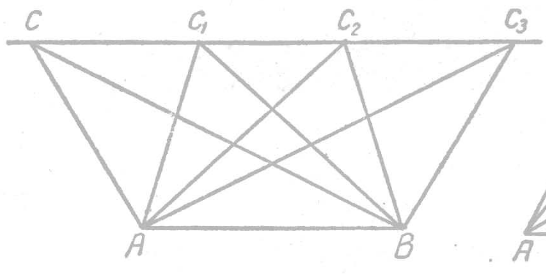

圖 1.

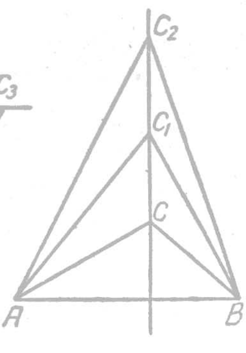

圖 2.

这也說明了同一个量在某种情况下可以是常量，而在另一种情况下却是变量。

习惯上，用开头几个拉丁字母 $a, b, c, d, \cdots$ 等来代表常量，用末尾几个拉丁字母 $x, y, z, u, v, \cdots$ 等来代表变量。

§2. 变量可能取的值

变量虽然可以有各种不同的数值，但根据問題所給定的条件，它有一定的变化范圍。

例如，有一种飞机的上升限度是 15 千米，这种飞机从地面起飞后，所达的高度是一个变量，这个变量可以取 0 与 15 千米之間的任何值。

又如，凸 n 边形各內角的和等于 $2(n-2)$ 个直角，这里，n 是一个变量，它只可以取从 3 起的自然数。

因此我們規定：在所研究的問題的具体条件下，变量所能取的一切数值，叫做該变量可能取的值。

§3. 函数与自变量

在現实問題中，我們所碰到的各种量，一般說来，它們之間总是具有一定的相依关系，例如，正方形的面积 S 与它的边長 x 之間的相依关系可由下列公式来确定，

$$S=x^2.$$

如果我們任意指定变量 x 一个可能取的数值，那么变量 S 就有一个完全确定的值与它对应。

定义：如果对于变量 x 的每一个可能取的数值，变量 y 都有一个完全确定的值与它对应，那么变量 y 叫做变量 x 的函数，变量 x 叫做自变量，联系自变量与函数的关系叫做函数关系。

拿上例来看，我們可以說：正方形的面积 S 是它的边長 x 的函数，x 是自变量，公式 $S=x^2$ 是函数关系。

这个例子的函数值是决定于一个自变量的，也有一个函数的数值是决定于两个或两个以上的自变量的，这时，我們就把該函数

叫做那两个自变量或多个自变量的函数。

例如，矩形面积 $S=bh$，如果給定底 b 和高 h 的数値，那么面积 S 的値也就跟着确定，所以矩形面积的数値决定于它的底和高，因之，矩形面积是两个自变量——矩形的底和高——的函数。

又如長方体的体积 $V=a\cdot b\cdot c$，其中 a, b 和 c 分别表示長方体的長、寬和高，当 a, b, c 的数値給定时，V 的値就跟着完全确定，所以長方体的体积是三个自变量長、寬和高的函数。

§4. 直角坐标系

1. 点在平面上的位置

看电影的人可以根据两个数在电影院中正确地找到他的坐位，这两个数便是印在入場劵上的排数及該排的号数。

如果你告訴电气安裝工友：开关裝在窗子右边距窗 $\frac{1}{2}$ 米又距地面高为 1.5 米，那么他会把开关裝在你所需要的地方。

上述两例，有力地使我們信服：用一对数就可以定出平面上某一个位置。

平面上点的位置也可以采取相仿的方法去确定，这种方法是在平面上作两条互相垂直的直綫 X_1X 与 Y_1Y，它們的交点为 O，在每条直綫上都选取一个正方向，用箭头表明(圖 3)。習慣上水平綫 X_1X 取从左向右的方向作为正向，垂直綫 Y_1Y 取从下向上的方向作为正向，这两条有方向的直綫 X_1X 与 Y_1Y 叫做坐标軸，水平綫 X_1X 叫做**横坐标軸**(簡称**横軸**)，垂直綫 Y_1Y 叫做**縱坐标軸**(簡称**縱軸**)，两坐标軸的交点 O 叫做**坐标原点**(簡称**原点**)。再选定一条适当的綫段作長度單位，如圖 3 上的 e。

这样，在两軸上由 O 点起任一綫段都对应着一个正数或負数，这个数的絕对値是这綫段所含單位長度的倍数，正、負号是表示这

綫段在原点的那一側，我們規定：在横軸上，以原点右方的綫段为正，左方的为負，在縱軸上，以原点上方的綫段为正，下方的为負。

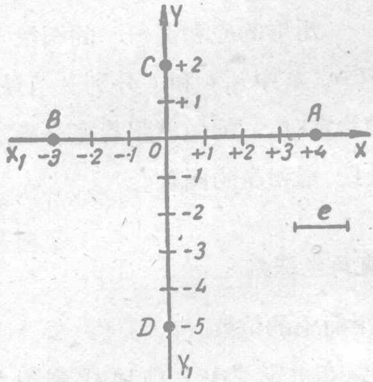

圖 3.

例如：圖 3 上綫段 OA 对应着数$(+4)$，綫段 OB 对应着数(-3)，綫段 OC 对应着数$(+2)$，綫段 OD 对应着数(-5)。

設 M 是平面上任意的一个点，过 M 点引平行于坐标軸的兩直綫，它們分別在坐标軸 X_1X 与 Y_1Y 上截取以 O 为起点的綫段 OA 与 OB，这兩个綫段对应着的数，如果用 x 和 y 来表示，那么它們就可以定出 M 点的位置。事实上，每一点 M 都对应着一确定的数偶 x 和 y，反过来，每一数偶 x 和 y 也对应着平面上一个确定的点。

这样定出来的数偶 x 和 y 叫做点 M 的直角坐标(簡称坐标)，$x=OA$ 叫做 M 点的横坐标，$y=OB$ 叫做 M 点的縱坐标。

記点的坐标时，先写横坐标，再写縱坐标。由坐标 x 和 y 所确定的点 M，我們把它記作 $M(x, y)$。

在圖 4 中　对于 M 点 $x=+2, y=+3$，記作$(+2, +3)$；

对于 M_1 点 $x=-3, y=+2$，記作$(-3, +2)$；

对于 M_2 点 $x=-5, y=-2$，記作$(-5, -2)$；

对于 M_3 点 $x=+4, y=-3$，記作$(+4, +3)$。

为書写簡便起見，通常規定把正数坐标前面的正号$(+)$略去，我們以后不写 $M(+2, +3)$，而写 $M(2, 3)$。

如果点在横坐标軸上，那么它的縱坐标等于零，例如圖 4 中 $M_4(3, 0)$；如果点在縱坐标軸上，那么它的横坐标等于零，例如圖 4 中 $M_5(0, -1)$。原点的横坐标与縱坐标都是零，即 $O(0, 0)$。

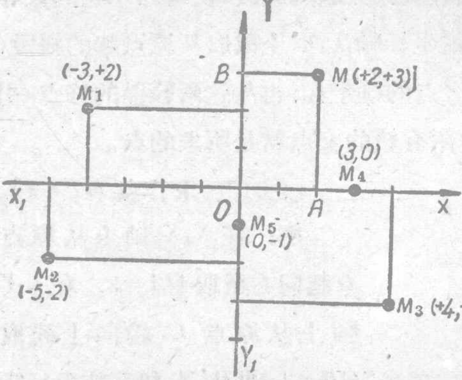

圖 4.

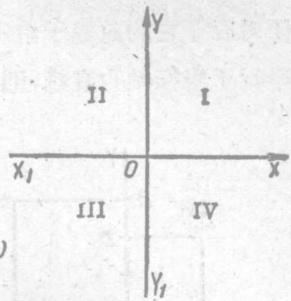

圖 5.

兩坐标軸 X_1X 与 Y_1Y 分平面为四部分，每一部分叫做一个象限，从右上角开始按反时針方向，依次編号，称为第 I, 第 II, 第 III 和 第 IV 象限，如圖 5 所示。在各象限內，点的坐标符号如下表所示：

象限 符号 坐标	I	II	III	IV
横坐标 x	+	−	−	+
縱坐标 y	+	+	−	−

总括起来：凡具备选定的單位長与正方向而以其交点 O 为原点的互相垂直的兩軸 X_1X 与 Y_1Y 叫做直角坐标系。在直角坐标系所在的平面上的一点可用数偶 x 和 y 来表示它的位置。这数偶叫做这点的坐标，第一数 x 叫横坐标，第二数 y 叫縱坐标，坐标不仅表示了点与坐标軸的距离而且表出了它在軸的那一側，因此表示坐标的兩个数可能是正数或負数。

2. 根据点的坐标作出点

根据点的坐标概念，我們可以按照点的給定坐标作出这点，其方法如下：

在横坐标軸 X_1X 上截取从原点起的綫段，使对应于它的数等于給定之点的横坐标，在縱坐标軸 Y_1Y 上截取从原点起的綫段，使对应于它的数等于給定之点的縱坐标；再从这兩綫段的終点，引平行于坐标軸的直綫，則这兩直綫的交点就是所求的点。

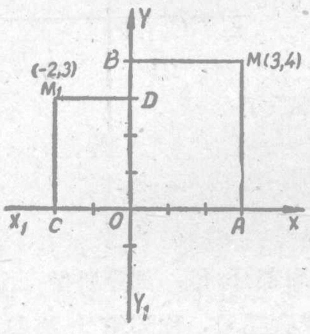

圖 6.

［例 1］ 求作点 $M(3, 4)$。

解：在 X_1X 軸上从原点 O 起向右截取 $OA=3$，在 Y_1Y 軸上从原点 O 起向上截取 $OB=4$，再从 A 和 B 作平行于坐标軸的直綫，其交点 M 就是所求的点（圖 6）。

［例 2］ 求作点 $M_1(-2, 3)$。

解：在 X_1X 軸上从原点 O 起向左截取 OC 使它的長度等于 2（$OC=-2$），在 Y_1Y 軸上从原点 O 起向上截取 $OD=3$，再从 C 和 D 作平行于坐标軸的直綫，其交点 M_1 就是所求的点（圖 6）。

一般地，求作点 $M(x, y)$ 时，如横坐标 x 为（+），則在 XX_1 軸上从原点起向右截取对应綫段；如横坐标 x 为（−），則从原点起向左截取对应綫段。如縱坐标 y 为（+），則在 Y_1Y 軸上从原点起向上截取对应綫段；如縱坐标 y 为（−），則从原点起向下截取对应綫段。

除上述的作法外，也可用下法作出点 $M(x, y)$：

在横坐标軸 X_1X 上截取从原点起的綫段 OA，使对应于它的数等于 M 点的横坐标 x；再从这綫段的終点 A 引平行于縱坐标

軸 Y_1Y 的直綫，在这直綫上，由 A 点起取綫段 AM，使对应于它的数等于 M 点的縱坐标 y，那么这綫段 AM 的終点 M 就是所求的点。

［例］ 求作 $M(3,4)$，$M_1(-2,-3)$ 二点。

解：在横坐标軸 X_1X 上，从原点 O 起向右截取綫段 OA 使它的長度等于 $3(OA=3)$，向左截取綫段 OA_1 使它的長度等于 $2(OA_1=-2)$，再从 A 和 A_1 各作平行于縱坐标軸 Y_1Y 的直綫，在这兩条直綫上分別由 A 点向上截取綫段 $AM=4$，由 A_1 点向下截取綫段 A_1M_1 使它的長度等于 3 $(A_1M_1=-3)$，那么这兩綫段的終点 M 和 M_1 就是所求的二点(圖 7)。

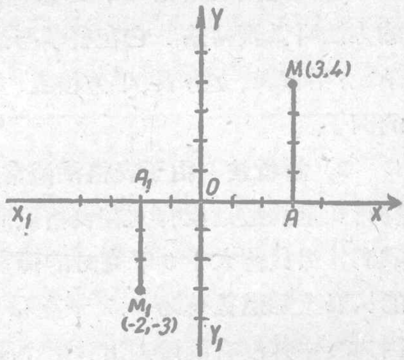

圖 7.

△ 总括起来：任意按次序写出的数偶，如果以第一数作横坐标，第二数作縱坐标，都可以用直角坐标系平面上的一个点来表示。

§5. 函数的三种基本表示法

二个变量間的函数关系，可用各种不同的方法表示出来，但最常用的有下列三种：

1) **表格法** 把一系列的自变量的值与其对应的函数值，排列成表，写了出来，我們很容易看出这二个变量間的函数关系。

例如，我們研究彈簧長度与負荷之間的关系，在作实驗时，把原長(沒有負荷时的長) 12 厘米的彈簧加上負荷，并測量它在各种不同負荷下的長度，記录下来，排列成表。

負荷 x 千克	0	1	2	3	4	5	6
長度 y 厘米	12	12.5	13	13.5	14	14.5	15

上表中第一列数是自变量(負荷)的値,第二列数是函数(彈簧長度)的对应値。从这个表里,我們可以看到彈簧長度随着負荷的增加而逐漸增加。它們之間的函数关系很清楚地看出来。

上面是用表格把二个变量 x, y 間的函数关系表示出来，这样的方法叫做**表格法**。它在科学与技术上用处很大，各种各样的数学表:平方表、立方表、平方根表、立方根表等都是这种函数表示法的例子。

2) **解析法** 由于表格法通常不可能把函数完全給出,总有一些自变量的値是沒有列在表格里的。例如上面的表格就不能告訴我們，当負荷大于 6 千克时的彈簧長度是多少。同样我們也不可能从表上知道負荷为 3.5 千克和 4.5 千克时的彈簧長度是多少。因为表中幷沒有直接列出这兩个彈簧長度，所以用表格表示函数关系显然有一定的局限性。如果能够用公式把兩个变量間的函数关系明确地表示出来,那么我們可以由一切所考虑的自变量的値,根据公式把函数的对应値計算出来。

[例 1] 物体在眞空中自由落下所經过的路程 S 是时間 t 的函数,这个函数可用下面的公式表示出来:

$$S=\frac{1}{2}gt^2,$$ (初速为0)

式中字母 g 表示重力加速度，如果 S 用米作單位，t 用秒作單位，那么 $g=9.8$ 米/秒^2,于是有 $S=4.9t^2$。

如果我們要求 $t=3$ 秒时物体落下所經过的路程,只需將 $t=3$ 代入公式,就得出 S 的对应値,即 $S=4.9\times3^2=44.1$ 米。

[例 2] 圓周長 C 是它的半徑 R 的函数，这函数可以用下面

的公式来表示:

$$C=2\pi R.$$

这里希腊字母 π 表示常数，它的值約为 3.14, 如果要求 $R=15$ 厘米的圓周長，可將数值 $R=15$ 代入公式，就得到圓周 C 的对应值为

$$C=2\pi\times 15\approx 2\times 3.14\times 15\approx 94.2\ 厘米。$$

同样我們可以求出半徑为 20 米的圓周長 $C=2\pi\times 20\approx 2\times 3.14\times 20\approx 126$ 米。

用含有变量的公式来表示这些变量間的函数关系的方法叫做解析法。几何上、物理上、化学上以及其他种种科学上的一切公式都是用来表示各种函数关系的。

3）**圖象法** 为了明显起見，我們常用圖象法来表示两个变量間的函数关系，圖象法是用曲綫来表示函数关系。在直角坐标系中，曲綫上各点的横坐标是自变量的值，而縱坐标則是其对应的函数值，換句話說，如果取横坐标等于自变量的某一个值，那么圖形上的对应点的縱坐标就等于那个自变量值所对应的函数值。

圖 8 是表示圓的直徑 D（用分米作單位）和它的面积 S（用平方分米作單位）之間的函数关系圖。这里横坐标軸上的 $\frac{1}{2}$ 厘米代表直徑的一个單位。縱坐标軸上的 $\frac{1}{20}$ 厘米代表圓面积的一个單位。要用这个圖形去求自变量在給定值之下（例如，$D=4$ 分米）函数 S 所对应的值时，我們应在横坐标軸上取一綫段 $OM=4\times\frac{1}{2}$ 厘米，則 M 点的横坐标等于所給定的自变量 D 的值（4 分米）；然后在曲綫上作出

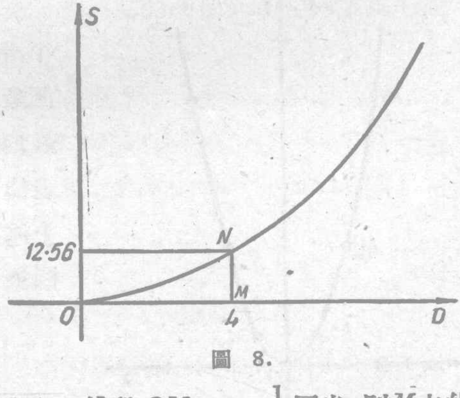

圖 8.

对应于該横坐标的一点 N，并量出該点的縱坐标 S，在所論的情形下，得 $S=12.56$ 平方分米，因为 $MN\approx 12.56\times\frac{1}{20}$厘米。

§6. 函数圖象的作法

在上节函数的圖象表示法里，仅指明用圖象可以表示兩个变量間的函数关系，以及怎样利用圖象求出对应于給定的自变量之值的函数值，但如何作出这种表示函数的圖象，沒有講到，現在我們用例子来說明函数圖象的作法。

［例］ 求作函数 $y=x^2$ 的圖象。

解：1)給自变量 x 以一系列正的及負的任意值，把它們分別代入函数关系式內，求出函数 y 的各对应值，如下表所示：

x	………	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	………
$y=x^2$	………	16	9	4	1	0	1	4	9	16	………

2)取上表中每一組自变量与函数的数偶作为点的坐标，作出这些点：$M_1(-3,9)$, $M_2(-2,4)$, $M_3(-1,1)$, $M_4(1,1)$, …。

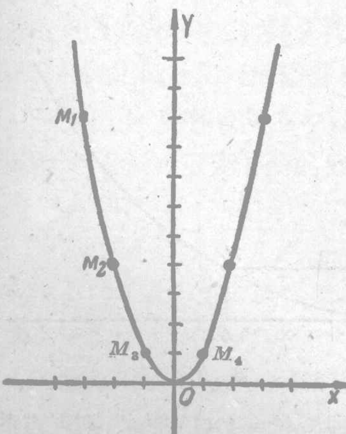

圖 9.

3)过上面所作各点画一条平滑曲綫（圖 9），这曲綫叫做函数 $y=x^2$ 的圖象（抛物綫）。一般地，如果函数关系已用公式表出，那么它的圖象可以按照上述三步手續作出来。函数的圖象可能是曲綫或直綫。

§7. 正比例

正比例关系是函数关系中最簡單的形式。

在算术里，我們已經知道，两个量中，如果一个量的数値扩大(或縮小)若干倍，另一个量的对应値跟着也扩大(或縮小)同样的倍数，这样的两个量之間的关系叫做正比例关系。

成正比例关系的两量具有下列的性質：两个量成正比例时，其中一个量的数値与另一个量的对应値的比等于一个常数。

事实上，設两个成正比例的量，其中一个量的数値为1时，另一个量的对应値为 k，又若第一个量的数値为 x 时，第二个量的对应値为 y，根据两量成正比例关系的定义，得

$$\frac{y}{x}=\frac{k}{1}=k,$$

因此，
$$y=kx.$$

現在我們把算术里的正比例关系的定义，加以推广，一般地給出正比例的定义如下：

定义：两个变量 x 和 y 間的函数关系，能用公式 $y=kx$（这里，k 是一个不等于零的常数）表示时，那么这两个变量間的关系叫做正比例关系，k 叫做正比例系数。

例如　圓的周長 c 和它的半徑 r 間的关系是用公式 $c=2\pi r$ 来表示的，这里 2π 是一个常数，所以圓的周長 c 和它的半徑 r 間的关系是正比例关系。

又如鋁的重量 p（克重）和它的体积 v（厘米^3）間的关系可用公式 $p=2.7v$ 来表示，这里常数 2.7 是鋁的比重的数字（鋁的比重 $=2.7$ 克重/厘米^3），所以鋁的重量 p 和它的体积 v 間的关系是正比例关系。

§8. 正比例函数 $y=kx$ 的圖象

1）$y=kx$ 的圖象。按照§6的作圖法，可把 $y=kx$ 的圖象画出。

例如：画 $y=3x$ 的圖象。

先給 x 以一些正的、負的数值，求出 y 的对应值，列成表格，得

x	0	1	2	3	4	………	-1	-2	-3	-4	………
$y=3x$	0	3	6	9	12	………	-3	-6	-9	-12	………

把上表中每一組数偶看作点的坐标，作出各点：

$O(0,0)$, $M_1(1,3)$, $M_2(2,6)$, $M_3(3,6)$……（圖 10）。

从直观我們看出点 O, M_1, M_2, M_3…… 都在过原点的一根直綫上，这直綫叫做函数 $y=3x$ 的圖象。

一般地：不管 k 是什么值，$y=kx$ 的圖象都是經过原点 O 的直綫。

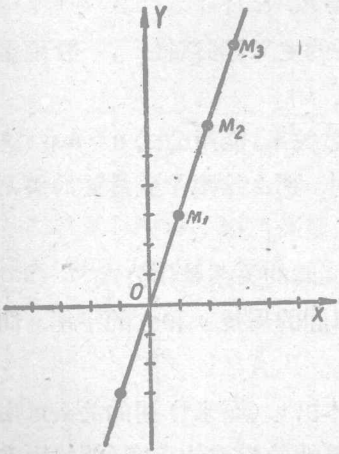

圖 10.

因兩点可以决定一条直綫，所以我們只要在原点以外，另找一点①$(1,k)$，通过原点 $O(0,0)$ 与 $(1,k)$ 点用直尺作一直綫就得到函数 $y=kx$ 的圖象。

2）系数 k 对正比例圖象的影响。

为了說明系数 k 的大小对于正比例圖象位置的影响，我們在同一直角坐标系中画出下列三个函数的圖象。

$$y=\frac{1}{3}x \qquad \left(k=\frac{1}{3}\right)$$

$$y=x \qquad (k=1)$$

$$y=2x \qquad (k=2)$$

这些函数的圖象都是一条直綫，它們的系数 k 都是正的，并且

① 命 $x=1$ 代入 $y=kx$ 中，得到 $y=k$，这样就得到 $(1,k)$ 点。