振動理論及應用詳解

THEORY OF VIBRATION WITH APPLICATIONS

SECOND EDITION

WILLIAM T. THOMSON

曉 園 出 版 社

前　言

研習理工的同學，都有一種認識，那就是：一本書的習題往往是該書的精華所在，藉着習題的印證，才能對書中的原理原則徹底的吸收與瞭解。

有鑒於此，曉園出版社特地聘請了許多在本科上具有相當研究與成就的人士，精心出版了一系列的題解叢書，為各該科目的研習，作一番介紹與舖路的工作。

一個問題的解答方法，常因思惟的角度而異。曉園題解叢書，毫無疑問的都是經過一番精徹的思考與分析而得。其目的在提供對各該科目研讀時的參考與比較；而對於一般的自修者，則有啓發與提示的作用。希望讀者能藉着這一系列題解叢書的幫助，而在本身的學問進程上有更上層樓的成就。

振動理論及應用詳解

(目　　錄)

第一章　振盪運動

1.1　諧調運動之振幅為 0.20 cm，週期為 0.15 sec 求最大速度及加速度。

解　令位移：$x = A\sin(\omega t + \phi)$

則速度：$\dot{x} = A\omega\cos(\omega t + \phi)$

加速度：$\ddot{x} = -A\omega^2\sin(\omega t + \phi)$

已知週期：$\tau = 0.15\,\text{s}$

角頻率：$\omega = 2\pi f = \dfrac{2\pi}{\tau} = \dfrac{2\pi}{0.15} = 41.89\ \text{rad/s}$

$$\dot{x}_{max} = A\omega = 0.2 \times 41.89 = 8.38\ \text{cm/s}$$

$$\ddot{x}_{max} = A\omega^2 = 0.2 \times 41.89^2 = 350.95\ \text{cm/s}$$

1.2　某加速計指出結構在 82 cps 下諧調振動，其最大加速度為 50g，求振幅（cps：cycle/sec）。

解　$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 82 = 515.22\ \text{rad/s}$　，　$g = 980\ \text{cm/s}^2$

$$A = \frac{\ddot{x}_{max}}{\omega^2} = \frac{50 \times 980}{(515.22)^2} = 0.1846\ \text{cm}$$

1.3　頻率 100 cps 的諧調運動，其最大速度為 4.57 m/sec，求其振幅，週期及最大加速度。

解　振幅：$A = \dfrac{\dot{x}_{max}}{\omega} = \dfrac{4.57 \times 100}{2\pi \times 100} = 0.7273\ \text{cm}$

最大加速度：

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{max} &= \omega\dot{x}_{max} = 2\pi \times 100 \times 4.57 \\ &= 2871\ \text{cm/s}^2\end{aligned}$$

週期：$\tau = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{100} = 0.0628\ \text{sec}$

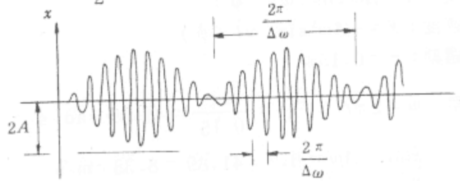
1.4　求兩振幅相等，頻率有微小差值的諧調運動之和，並討論其合成運動之拍擊現象（beat phenomena）。

解　令 $x_1 = A\sin\omega t$　，　$x_2 = A\sin(\omega + \Delta\omega)t$

$$x = x_1 + x_2 = A[\sin\omega t + \sin(\omega + \Delta\omega)t]$$

$$= 2A\cos\frac{1}{2}(\omega + \Delta\omega - \omega)t \cdot \sin\frac{1}{2}(\omega + \omega + \Delta\omega)t$$

$$\simeq 2A\cos\frac{\Delta\omega}{2}t \cdot \sin\omega t$$

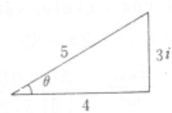


1.5　以指數形式 $Ae^{i\theta}$ 表示複向量 $4 + 3i$ 。

解　$z = 4 + 3i = 5\left(\frac{4}{5} + \frac{3}{5}i\right)$

$= 5(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 5e^{i\theta}$



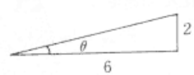
$\theta = \tan^{-1}\frac{3}{4} = 0.6435$ rad

1.6　以 $A\angle\theta$ 表示兩複量 $(2+3i)$ 及 $(4-i)$ 之和。

解　$(2+3i)+(4-i)$

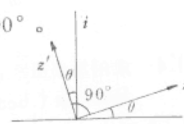
$= 6 + 2i = \sqrt{40}\left(\frac{6}{\sqrt{40}} + \frac{2}{\sqrt{40}}i\right)$

$= 6.325\angle\theta$



$\theta = \tan^{-1}\frac{2}{6} = 18.43°$

1.7　求證向量 $z = Ae^{i\omega t}$ 乘以 i 的結果爲原向量旋轉 $90°$ 。



解　$iz = iAe^{i\omega t}$

$= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)Ae^{i\omega t}$

$$= e^{i\frac{\pi}{2}} A e^{i\omega t}$$

$$= Ae^{i(\frac{\pi}{2}+\omega t)}$$

1.8 求兩向量 $5e^{i\pi/6}$ 及 $4e^{i\pi/3}$ 之和，並找出合向量與原向量之夾角。

解　$z = 5e^{i\pi/6} + 4e^{i\pi/3}$

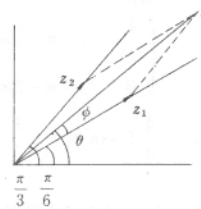
$$= 5(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}) + 4(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3})$$

$$= 5(0.866 + 0.5i) + 4(0.5 + 0.866i)$$

$$= 6.33 + 5.96i$$

$$= \sqrt{6.33^2 + 5.96^2}\, e^{i\theta}$$

$$= 8.69e^{i\theta}$$



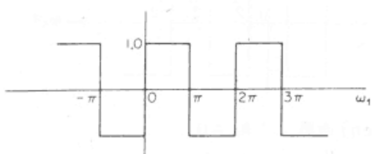
$$\theta = \tan^{-1}\frac{5.96}{6.33}$$

$$= 43.28°$$

合向量與原第一向量之夾角：

$$\phi = \theta - \frac{\pi}{6} = 13.28°$$

1.9 求如圖P1-9所示矩形波之 Fourier 級數。



圖P1-9

解　$x(t)$ 爲奇(odd)函數，$\therefore a_n = 0$

$$x(\omega_1 t) = \sum_{n=0} b_n \sin\omega_n t = \begin{cases} 1, & 0 < x < \pi \\ -1, & \pi < x < 2\pi \end{cases}$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T x \sin n\omega_1 t\, d(\omega_1 t)$$

$$= \frac{2}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} \sin n\tau \, d\tau - \int_{\pi}^{2\pi} \sin \pi\tau \, d\tau\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[-(\cos n\tau)\Big|_0^{\pi} + (\cos n\tau)\Big|_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\cos 2n\pi - 2\cos n\tau + 1\right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}(\cos 2n\pi - 2\cos n\pi + \cos 0)$$

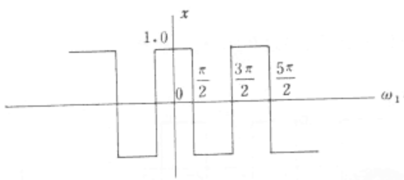
$$= \frac{2}{n\pi}(1 - \cos n\pi)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} , & n = 2m+1 , \\ 0 , & n = 2m , \end{cases} \quad m = 0 , 1 , 2 , \cdots\cdots$$

$$x = \frac{4}{\pi}\left(\sin\omega_1 t + \frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\sin 5\omega_1 t + \cdots\cdots\right)$$

1.10 若題1-9的方波自原點向右偏移$\pi/2$，求其Fourier 級數。

解



$x(t)$ 為偶(even)函數，$\therefore b_n = 0$

$$x(\omega_1 t) = a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos n\omega_1 t$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} x(\omega_1 t)\, d(\omega_1 t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} d\tau - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} d\tau + \int_{3\pi/2}^{2\pi} d\tau\right) = 0$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{2\pi} x(\omega_1 t)\cos n\omega_1 t \; d(\omega_1 t)$$

$$= \frac{2}{2\pi}\left(\int_0^{\pi/2} \cos n\tau \, d\tau - \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos n\tau \, d\tau + \int_{3\pi/2}^{2\pi} \cos n\tau \, d\tau \right)$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left[(\sin n\tau)_0^{\pi/2} - (\sin n\tau)_{\pi/2}^{3\pi/2} + (\sin n\tau)_{3\pi/2}^{2\pi} \right]$$

$$= \frac{1}{n\pi}\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin\frac{3n\pi}{2} + \sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{3n\pi}{2} \right)$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left(\sin\frac{n\pi}{2} - \sin\frac{3n\pi}{2} \right)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} , & n = 4m+1 \\ -\dfrac{4}{n\pi} , & n = 4m+3 , \quad m = 0 , 1 , 2 , \cdots\cdots \\ 0 , & n = 2m \end{cases}$$

$$x(t) = \frac{4}{\pi}\left(\sin\omega_1 t - \frac{\sin 3\omega_1 t}{3} + \frac{\sin 5\omega_1 t}{5} - + \cdots\cdots\cdots\cdots \right)$$

1.11 求圖P1-11 所示三角形波之Fourier 級數。

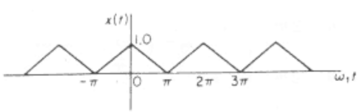


圖 P 1-11

解　$x(t)$ 爲偶函數，$\therefore b_n = 0$

$$x(t) = \begin{cases} \dfrac{-1}{\pi}(\omega_1 t - \pi) , & 0 < \omega_1 t < \pi \\ \dfrac{1}{\pi}(\omega_1 t - \pi) , & \pi < \omega_1 t < 2\pi \end{cases}$$

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1} a_n \cos n\omega_1 t$$

$$a_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(\omega_1 t) \, d(\omega_1 t)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\tau)\,d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} -\frac{1}{\pi}(\tau-\pi)\,d\tau + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{\pi}(\tau-\pi)\,d\tau\right]$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\left[\left(-\frac{\tau^2}{2}+\pi\tau\right)_0^{\pi} + \left(\frac{\tau^2}{2}-\pi\tau\right)_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{T} x(\tau)\cos n\tau\,d\tau$$

$$= \frac{2}{2\pi}\left[\int_0^{\pi}\frac{-1}{\pi}(\tau-\pi) + \int_{\pi}^{2\pi}\frac{1}{\pi}(\tau-\pi)\right]\cos n\tau\,d\tau$$

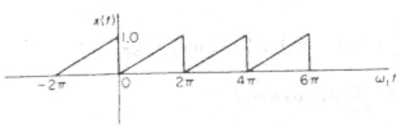
$$= \frac{1}{\pi^2}\left[\left(-\frac{\tau\sin n\tau}{n} - \frac{\cos n\tau}{n^2} + \frac{\pi\sin n\tau}{n}\right)_0^{\pi} + \left(\frac{\tau\sin n\tau}{n} + \frac{\cos n\tau}{n^2} - \frac{\pi\sin n\tau}{n}\right)_{\pi}^{2\pi}\right]$$

$$= \frac{1}{n^2\pi^2}(\cos 2n\pi - 2\cos n\pi + \cos 0)$$

$$= \begin{cases} 0, & n=2m, \\ \dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n=2m-1, \end{cases} \quad m=1,2,\cdots\cdots$$

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos\omega_1 t + \frac{\cos 3\omega_1 t}{3^2} + \frac{\cos 5\omega_1 t}{5^2} + \cdots\cdots\right)$$

1.12 求如圖P1-12所示鋸齒曲線之Fourier 級數，以(1.2-4) 式之指數形式表示其結果。



圖P1-12

解 $x(t)=\dfrac{\omega_1 t}{2\pi}\quad,\quad 0\le\omega_1 t\le 2\pi$

$$2\pi c_0=\int_0^{2\pi}\frac{\tau}{2\pi}\,d\tau=\pi\quad,\quad c_0=\frac{1}{2}$$

$$2\pi c_n=\int_0^{2\pi}\frac{\tau}{2\pi}\,e^{-in\tau}\,d\tau$$

令 $u=\tau\quad,\quad dv=e^{-in\tau}\,d\tau$

$$du=d\tau\ ,\quad v=\frac{-1}{in}\,e^{-in\tau}$$

則

$$4\pi^2c_n=\left[\frac{-\tau}{in}e^{-in\tau}\right]_0^{2\pi}+\frac{1}{in}\int_0^{2\pi}e^{-in\tau}\,d\tau$$

$$=\frac{-1}{in}(2\pi e^{-2\pi in})+\frac{-1}{i^2n^2}\left[e^{-in\tau}\right]_0^{2\pi}$$

$$=\frac{2\pi i}{n}(\cos 2n\pi-i\sin 2n\pi)+\frac{1}{n^2}(\cos 2n\pi-i\sin 2n\pi-1)$$

$$=\frac{2\pi i}{n}$$

$$c_n=\frac{i}{2\pi n}$$

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{i}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{e^{in\omega_1 t}}{n}\quad,\quad(n\neq 0)$$

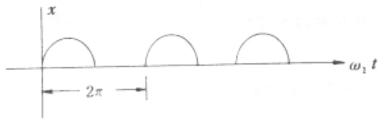
$$=\frac{1}{2}+\frac{i}{2\pi}\Big[(e^{i\omega_1 t}-e^{-i\omega_1 t})+\frac{1}{2}(e^{i2\omega_1 t}-e^{-i2\omega_1 t})$$

$$+\frac{1}{3}(e^{i3\omega_1 t}-e^{-i3\omega_1 t})+\cdots\cdots\Big]$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\Big(\sin\omega_1 t+\frac{1}{2}\sin 2\omega_1 t+\frac{1}{3}\sin 3\omega_1 t+\cdots\cdots\Big)$$

1.13 求出只含正値部分的正弦波 rms 値。

解



$$x(t)=\begin{cases}\sin\omega_1 t & , \quad 0\le\omega_1 t\le\pi \\ 0 & , \quad \pi\le\omega_1 t\le 2\pi\end{cases}$$

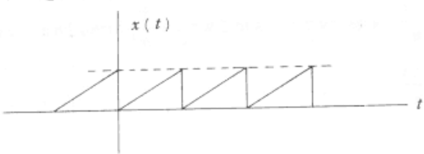
$$\overline{x}^2=\frac{1}{T}\int_0^T x^2\,dt=\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi A^2\sin^2\tau\,d\tau$$

$$=\frac{A^2}{4\pi}\int_0^\pi(1-\cos 2t)\,dt=\frac{A^2}{4}$$

$$\text{rms}=\sqrt{\overline{x^2}}=\frac{A}{2}$$

1.14 求題1-12鋸齒波之均方值，作此題之兩種方法，其一是由平方運算得到，另一是由Fourier 級數得到。

解



$$x(t)=\frac{\omega_1 t}{2\pi}\quad , \quad 0\le\omega_1 t\le 2\pi$$

$$x^2=\frac{(\omega_1 t)^2}{4\pi^2}$$

$$\overline{x^2}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\tau^2}{4\pi^2}\,d\tau=\frac{1}{8\pi^3}\left[\frac{\tau^3}{3}\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{3}$$

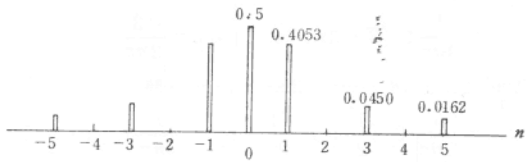
1.15 畫出題1-11中三角形波之頻譜。

解 由習題1-11 所得結果，連續三角形函數展開成 Fourier 級數為

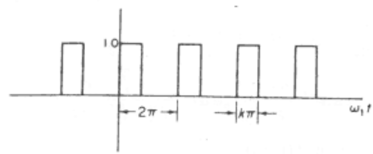
$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\omega_1 t+\frac{\cos 3\omega_1 t}{3^2}+\frac{\cos 5\omega_1 t}{5^2}+\cdots\cdots\right)$$

Fourier 頻譜＝係數圖形。

$\because b_n=0$ ， $c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}=a_n$ ， $n=0$ ，±1 ，±2 ，±3 ，……



1.16 求圖1-16所示一組矩形波之Fourier 級數，並畫出 c_n 及 ϕ_n 對應 n 的關係圖，其中 $k=2/3$ 。



圖P1-16

解　$x(t)=\begin{cases}1.0\ , & 0\leq\omega_1 t\leq k\pi\\ 0 & k\pi<\omega_1 t\leq 2\pi\end{cases}$

$$2\pi c_0=\int_0^{k\pi}d\tau=k\pi$$

$$2\pi c_n=\int_0^{2\pi}xe^{-in\tau}\,d\tau=\int_0^{k\pi}e^{-in\tau}\,d\tau=\frac{i}{n}(e^{-ink\pi}-1)$$

已知

$$k=\frac{2\pi}{3}$$

$$c_0=\frac{\frac{2}{3}\pi}{2\pi}=\frac{1}{3}$$

$$c_n=\frac{i}{2n\pi}(e^{-in\frac{2}{3}\pi}-1)=\frac{i}{2n\pi}(\cos\frac{2}{3}n\pi-i\sin\frac{2}{3}n\pi-1)$$

當 $n=1,4,7,\cdots\cdots,3m-2,\cdots\cdots$ 時

$$\cos\frac{2}{3}n\pi=-\frac{1}{2}\ ,\ \sin\frac{2}{3}n\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c_n=\frac{i}{2n\pi}(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-1)=\frac{i}{4n\pi}(-3-i\sqrt{3})$$

$$= \frac{1}{4n\pi}(\sqrt{3}-3i) \quad , \quad |c_n| = \frac{\sqrt{3}}{2n\pi}$$

當 $n=2,5,8,\cdots\cdots,3m-1,\cdots\cdots\cdots$ 時

$$c_n = \frac{i}{2n\pi}\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-1\right) = \frac{i}{4n\pi}(-3+i\sqrt{3})$$

$$= \frac{-1}{4n\pi}(\sqrt{3}+3i) \quad , \quad |c_n| = \frac{\sqrt{3}}{2n\pi}$$

當 $n=3,6,9,\cdots\cdots\cdots,3m,\cdots\cdots\cdots\cdots$ 時

$$c_n = \frac{i}{2n\pi}(1-0-1)=0$$

相角：$\phi = \tan^{-1}\dfrac{b_n}{a_n} = \tan^{-1}\dfrac{c_n^* - c_n}{i(c_n^* + c_n)}$

$\phi_0 = \tan^{-1}0 = 0$

當 $n=1,4,7,\cdots\cdots,3m-2,\cdots\cdots\cdots$

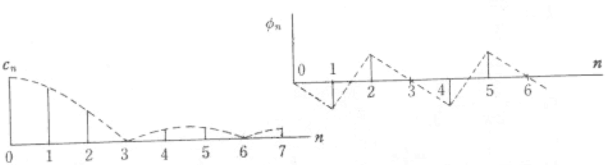
$$\tan\phi_n = \frac{6i}{2i\sqrt{3}} = \sqrt{3} \quad , \quad \phi_n = 60^\circ$$

當 $n=2,5,8,\cdots\cdots,3m-1,\cdots\cdots\cdots$

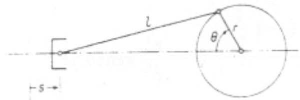
$$\tan\phi_n = \frac{-6i}{2i\sqrt{3}} = -\sqrt{3} \quad , \quad \phi_n = -60^\circ$$

當 $n=3,6,9,\cdots\cdots\cdots,3m,\cdots\cdots\cdots\cdots$

$$\tan\phi_n = 0 \quad , \quad \phi_n = 0$$



1.17　如圖P1-17 所示爲滑塊連桿機構，寫出其滑塊之位移 s 方程式，並求各部之諧調分量及其相對大小。當 $r/\ell = 1/3$ 時，求出第二及第一諧調分量之比爲多少？



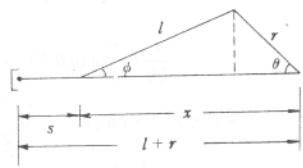
圖P1-17

解 二項式原理：

$$(1+z)^m = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} z^n \quad ,\ n\text{為整數},\ m\text{為實數}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{m!}{(m-n)!\,n!} z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!} z^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} c_n$$



$$\because r\sin\theta = \ell\sin\phi$$

$$\therefore \sin\phi = \frac{r\sin\theta}{\ell}$$

$$\cos\phi = \sqrt{1-\sin^2\phi}$$

$$= \sqrt{1-\frac{r^2}{\ell^2}\sin^2\theta}$$

$$x = \ell\cos\phi + r\cos\theta = \ell\sqrt{1-\frac{r^2}{\ell^2}\sin^2\theta} + r\cos\theta$$

$$s = \ell + r - x = \ell + r - r\cos\theta - \ell\left[1-\left(\frac{r}{\ell}\sin\theta\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

以二項式原理展開$\left[1-\left(\frac{r}{\ell}\sin\theta\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$

$$c_0 = 1$$

$$c_1 = \frac{m}{n!} z^n = \frac{1}{2}\left(-\frac{r^2}{\ell^2}\sin^2\theta\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\ell}\sin\theta\right)^2$$

$$c_2 = \frac{m(m-1)}{n!} z^n = \frac{\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)}{2!}\left(-\frac{r^2}{\ell^2}\sin^2\theta\right)^2$$

$$= -\frac{1}{8}\left(\frac{r}{\ell}\sin\theta\right)^4$$

$$c_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{n!} z^n$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(-\frac{1}{2})(-1\frac{1}{2})}{3\times 2}(-\frac{r^2}{\ell^2}\sin^2\theta)^3$$

$$= \frac{-1}{16}(\frac{r}{\ell}\sin\theta)^6 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_n = \frac{-1}{2^{n+1}}(\frac{r}{\ell}\sin\theta)^{2n}$$

$\because r \ll \ell$ ，$\therefore (\frac{r}{\ell})^4$ 以上各項可以省略不計。

則 $x = \ell + r - r\cos\theta - \ell\,[\,1 - \frac{1}{2}(\frac{r}{\ell}\sin\theta)^2 - \frac{1}{8}(\frac{r}{\ell}\sin\theta)^4$

$$- \frac{1}{16}(\frac{r}{\ell}\sin\theta)^6 - \cdots\cdots]$$

$$\simeq \ell + r - r\cos\theta - \ell + \frac{\ell}{2}(\frac{r}{\ell})^2(\frac{1-\cos 2\theta}{2})$$

$$= r\,(1 + \frac{1}{4}\frac{r}{\ell} - \cos\theta - \frac{1}{4}\frac{r}{\ell}\cos 2\theta)$$

諧調分量（近似值）$a_0 \simeq (1 + \frac{1}{4}\frac{r}{\ell})r$

$$a_1 \simeq -r$$

$$a_2 \simeq -\frac{1}{4}\frac{r^2}{\ell} \quad ,\cdots\cdots\cdots\cdots$$

當 $r/\ell = 1/3$ 時

$$\frac{\text{第二諧調分量}}{\text{第一諧調分量}} = \frac{\frac{1}{4}(\frac{r^2}{\ell})}{r} = \frac{1}{4}(\frac{r}{\ell}) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{12}$$

1.18 求如圖P1-18所示矩形脈衝之均方值，其 $k = 0.10$ ，若振幅爲 A ，則 rms 電壓計的讀值爲多少？

解 $\bar{x}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T x^2(t)dt$

$$= \frac{A^2}{T}(\int_0^{\frac{k}{2}T} dt + \int_{T-\frac{k}{2}T}^{T} dt)$$

$$= \frac{A^2}{T}\left(\frac{k}{2}T + T - T + \frac{\kappa}{2}T \right) = kA^2$$

當 $k = 0.1$ 時

$\bar{x}^2 = 0.1A^2$

$\mathrm{rms} = \sqrt{\bar{x}^2} = 0.3162A$

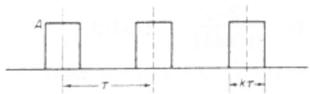
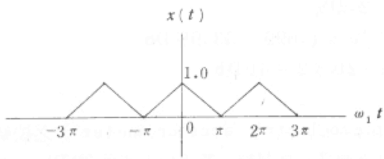


圖 P1-18

1.19 求如圖 P1-11 所示三角形波的均方值。

解



$$x(t)=\begin{cases}\left(1-\dfrac{\omega_1 t}{\pi}\right) & ,\ 0 \le \omega_1 t \le \pi \\ \left(\dfrac{\omega_1 t}{\pi}-1\right) & ,\ \pi \le \omega_1 t \le 2\pi\end{cases}$$

$$x^2 = 1 - \frac{2\tau}{\pi} + \frac{\tau^2}{\pi^2} \quad ,\ 0 \le \omega_1 t \le 2\pi\text{，令}\omega_1 t = \tau$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1 - \frac{2\tau}{\pi} + \frac{\tau^2}{\pi^2}\right)d\tau = \frac{1}{3}$$

1.20 rms 電壓計的精確度設定為±0.5 Db，若量得振動之 rms 為 2.5mm，以公分為單位時，求電壓計讀數之精確度。

解 $\mathrm{Db}(+) = 20\log_{10}\left(\frac{x}{x_0}\right) = 0.5$

$$\frac{x(+)}{2.5} = 10^{\frac{0.5}{20}} = 1.0593$$

$x(+) = 2.5 \times 1.0593 = 2.6481$

$\mathrm{error}(+) = 2.6481 - 2.5 = 0.1481(\mathrm{mm})$

$\mathrm{Db}(-) = 20\log_{10}\left(\frac{x_0}{x}\right) - 0.5$

$$\frac{2.5}{x_0}=10^{\frac{-0.5}{20}}=0.9441$$

$$x_0=\frac{2.5}{0.9441}=2.6481$$

error $(-)=2.5-2.6481=-0.1481$ (mm)

error $=\pm 0.1481$ mm

1.21 由加速計得到的振動，用電壓計測量其輸出，電壓計之放大因數已知爲 10，50及100，求此階段之各個分貝值。

解 $20\log_{10}10=20$Db

$20\log_{10}50=20\times1.699=33.98$ Db

$20\log_{10}100=20\times2=40$Db

1.22 壓電加速計（piezoelectric accelerometer）之校準曲線示於圖 Pi-22，其縱座標爲分貝刻劃，若所見峯值爲 32 Db，在某些低頻如 1000 cps 時，其與共振反應之比爲何？

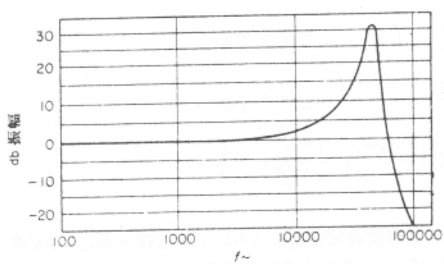


圖 P1-22

解 壓電加速計校準曲線峯值分貝：$\text{Db}=20\log_{10}\frac{A}{A_0}=32$

$\frac{A}{A_0}=10^{1.6}=39.81$ =峯值振幅與1000 cps 振幅之比。

1.23 使用類似於附錄A中圖 A-1 之座標紙，畫出下列振動規格之界限，最大加速度 = 2g，最大位移 = 0.08 in，最小及最大頻率：1 Hz及 200 Hz。