数理化自学丛书

平面解析几何

数理化自学丛书

平面解析几何

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

上海人民出版社

数理化自学丛书

平 面 解 析 几 何

数理化自学丛书编委会
数 学 编 写 小 组 编

（原上海科技版）

上海人民出版社出版　湖南人民出版社重印
湖南省新华书店发行　湖南省新华印刷一厂印刷
开本787×1092 1/32　印张16　字数352,000
1965年9月第1版　1977年12月新1版　1978年4月湖南第1次印刷

统一书号：13171·223　定价：1.05元

重印说明

《数理化自学丛书》是一九六六年前出版的．计有《代数》四册,《平面几何》二册,《三角》一册,《立体几何》一册,《平面解析几何》一册;《物理》四册;《化学》四册．这套书的特点是:比较明白易懂,从讲清基本概念出发,循序前进,使读者易于接受和理解,并附有不少习题供练习用．这套书可以作为青年工人、知识青年和在职干部自学之用,也可供中等学校青年教师教学参考,出版以后,很受读者欢迎．但是在"四人帮"及其余党控制上海出版工作期间,这套书横被扣上所谓引导青年走白专道路的罪名,不准出版．

英明领袖华主席和党中央一举粉碎了祸国殃民的"四人帮"．我国社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期．党的第十一次全国代表大会号召全党、全军、全国各族人民高举毛主席的伟大旗帜,在英明领袖华主席和党中央领导下,为完成党的十一大提出的各项战斗任务,为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国,争取对人类作出较大的贡献,努力奋斗．许多工农群众和干部,在党的十一大精神鼓舞下,决心紧跟英明领袖华主席和党中央,抓纲治国,大干快上,向科学技术现代化进军,为实现四个现代化作出贡献,他们来信要求重印《数理化自学丛书》．根据读者的要求,我们现在在原书基础上作一些必要的修改后,重新出版这套书,以应需要．

十多年来,科学技术的发展是很快的．本丛书介绍的虽仅是数理化方面的基础知识,但对于应予反映的科技新成就方面内容,是显得不够的．同时,由于本书是按读者自学的要求编写的,篇幅上就不免有些庞大,有些部分也显得有些烦琐．这些,要请读者在阅读时加以注意．

对本书的缺点,希望广大读者批评指出,以便修订时参考．

一九七七年十一月

内 容 提 要

本书主要内容包括直线和圆锥曲线的各种方程与性质，以及坐标变换、极坐标和参数方程，同时简单地介绍了在生产劳动中应用较多的经验公式.

本书讲解较详，系统性强，有大量例题和习题，注解与提示较多. 可供具有平面几何、代数方程和平面三角的初步知识的读者阅读. 书中加有"*"号的段落、章节和习题，都是比较难的，初学时如有困难，可暂时略去.

本书主要读者对象是青年工人、知识青年、在职干部，也可供中学教师参考.

目录

第一章　平面直角坐标系

在这一章里，主要是叙述解析几何的一些基础知识:

首先，引进平面直角坐标系，通过平面直角坐标系建立点与数的关系(在第二章建立方程与图形的关系). 必须强调指出，掌握坐标方法对学习解析几何这门课程十分重要.

又，通过坐标法，导出几个基本的计算公式——两点间的距离、直线的倾斜角和斜率、线段的定比分割的分点坐标和三角形面积的计算公式等. 这些都是深入学习解析几何时所必备的基本计算公式，掌握得好不好将直接影响到以后几章的学习.

由于这一章是学习解析几何的开始，概念可能比较多一些. 但如果在学习中能够多思考，反复作些比较，掌握它并不是一件难事.

§1·1　有向直线和有向线段

1. 有向直线　在平面几何里，对于一条直线，我们只考虑它的位置而不考虑它的方向，如图 1·1 是一条经过 B, A 两点的直线，通常我们称它为直线 BA 或直线 AB 是没有什

图 1·1

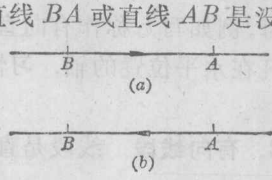


图 1·2

么区别的．但是，假如把这条直线看作是由一个点移动而成的，那就产生了方向的观念．在一条东西向的直线上(图1·2)，由西到东(图 a)与由东到西(图 b)显然是两回事．举一个例子来说，我们可以把一条笔直的路象征地看成是一条直线，一个人在这条路上就有往和返的区别，这种区别主要是方向的不同．在物理学里(尤其在力学中一开始就接触到方向问题)，在生活实际中，考虑直线的方向是有它的实际意义的．因此，除了继续考虑直线的位置外，我们还必须考虑直线的方向问题．

很明显，任意一条直线都具有两个方向，我们可以规定它的一个方向为正向．这样，与它相反的一个方向就是负向了．象这样确定了正方向的直线，叫做**有向直线**，也叫做轴①．

在图形上，为了明确表示有向直线的方向，往往用一个箭头来表示它的正方向，这样，与箭头相反的方向就是负向了．如图1·3的箭头表示自左至右是直线的正方向．

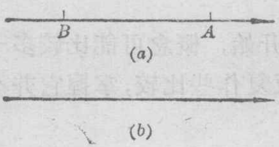


图 1·3

在文字上表示有向直线，可顺着直线的正方向依次取两点，如图上的 B, A, 这时我们就称它是有向直线 BA (图1·3(a))．反过来，有向直线 AB 就是指从 A 到 B 的方向是这条有向直线的正方向．有时，我们不用两个字母表示有向直线，而是在箭头的旁边写一个拉丁字母，例如写 l，称作有向直线 l (图1·3(b))．

凡在水平位置的轴，习惯上取自左至右的方向为它的正方向．

2．有向线段 线段是直线的一部分，它是直线上两个定

① 轴与数轴的概念不同，数轴的概念在1·2节里叙述．

点间的一段．由于我们引进了有向直线的概念，在直线上的线段很自然地也就有考虑它的方向的必要了．

一条线段也有两个相反的方向．如果以线段的一端 B 为起点（图 1·4），则另一端 A 就是终点，由起点 B 到终点 A 是线段的一个方向；反过来，如果以 A 为起点，则 B 就是终点，由 A 到 B 的方向恰好与由 B 到 A 的方向相反．象这样指出了起点与终点的线段称为**有向线段**．我们规定，*有向线段的方向就是从起点到终点的方向*．

图 1·4

为了明确地指出一条有向线段的方向，我们用规定的记号来表示，就是把标志起点的字母写在第一位，接着写上标志终点的字母．以图 1·4 的线段来说，如 B 是起点，A 是终点，则写成有向线段 BA；如果 A 是起点，B 是终点，就写成 AB．反过来，如果有一条有向线段 CD，我们就理解 C 是有向线段的起点，D 是终点．因此 AB 与 BA 虽然是长度相等的线段，但它们的方向却相反．

在平面几何里，线段 AB 与线段 BA 是表示同一条线段，在意义上，指的是它们的长度相同．在解析几何里，除了指明它们的长度相同外，还指出了它们的方向不同．今后在表示线段时就应该注意了．

根据上面的分析，我们对有向线段应该这样来理解：

(1) 有向线段是有规定方向的线段，从起点到终点的方向就是有向线段的方向．

(2) 有向线段可以计算它的长度，计算的方法与平面几何里一样．取一个定长的线段作为单位长度①，用这个单位

① 习惯上，我们把单位长度作为“1”．

长度去度量这条线段，所得到的数称为这有向线段的长度.

3. 有向线段的数量① 有向线段的方向是用正向和负向来表示的. 要确定有向线段的方向是正向还是负向，可以由它所在的直线的方向来说明. 就是说，如果有向线段的方向与它所在的直线的方向相同，我们就说这条有向线段是正向的；如果相反，就说它是负向的. 例如图 1·5 的轴 l，箭头表示轴的正向，则在轴上的有向线段 BA 与轴的方向相同，BA 就是正向的线段，AB 与轴的方向相反，AB 就是负向的线段.

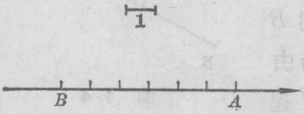


图 1·5

如果我们用单位长度去度量线段 BA 的长度，并且量出的结果设是 6，就是说线段 BA 的长是 6 个单位.

因为有向线段 BA 是正向的，它的长度等于 6，因此，我们就说有向线段 BA 的数量是 6，并且用记号

$$BA=6$$

表示. 同样，因为有向线段 AB 是负向的，它的长度也是 6，因此，我们就说有向线段 AB 的数量是 -6，用记号

$$AB=-6$$

表示. 象这样一条有向线段的长度，连同表示它的方向的正负号，叫做这条**有向线段的数量**. 就是说，有向线段的数量，既表示它的长度，又指出了它的方向.

例 如图 1·6 轴 l 上的每一小格表示一个单位长度，A，

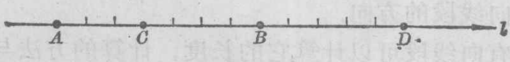


图 1·6

① 有的书上叫做有向线段的值，意义是一样的.

B, C, D 是轴上的四个点，求有向线段 AC, CD, BC, DA 的数量.

【解】 有向线段 AC 与轴同向，它的长度是3，所以

$$AC=3.$$

同理 $$CD=9.$$

有向线段 BC 与轴异向，它的长度是4，所以

$$BC=-4.$$

同理 $$DA=-12.$$

4. 有向线段的长度的表示法 如果只考虑有向线段的长度，而不考虑它的方向，我们就给有向线段的数量加上绝对值的记号. 如图1·6的有向线段 AB 的长度记以 $|AB|$，有向线段 DA 的长度记作 $|DA|$，所以

$$|AB|=|7|=7, \qquad |BA|=|-7|=7;$$

$$|AD|=|12|=12, \quad |DA|=|-12|=12.$$

可以看出，对有向线段的长度来说，

$$|AB|=|BA|, \quad |AD|=|DA|. \tag{1}$$

对有向线段的数量来说，

$$AB=-BA, \quad AD=-DA. \tag{2}$$

就是说，当表示有向线段的始点和终点的两个字母位置互相掉换时，有向线段的符号应改号.

经过移项后，(2)式也可以写成

$$AB+BA=0, \quad AD+DA=0.$$

当然，如点 B 与点 A 重合，有向线段 AB 的数量就等于零，这时可以写成

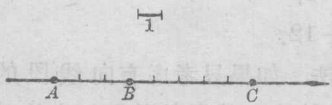
$$AB=0.$$

注 1. 轴上的线段都是有向线段，今后为简便起见，对轴上的有向线段就称为轴上线段，有时只简称为线段.

2. 在解析几何中，表达有向线段或它的数量时，记号中字母排列的次序均包含方向的意义在内(记号 BA 指明方向是由 B 到 A)，所以对记号的理解和使用，其中字母就应当按照它们的位置来处理，不能随便变更的.

练　　习

1. 轴上的有向线段 AB，有向线段 AB 的数量，有向线段 AB 的长度，这三者在意义上有什么不同，它们的表示方法有什么不同？



(第 2 题)

2. 在右图中求：

(1) AB, BC, AC 的数量和它们的长度；

(2) 从数量上看 $AB+BC$ 与 AC 的关系；

(3) 求 AC, CA 的数量，它们在数量上的关系怎样，又它们的长度关系怎样？

§1·2　直线上的坐标系

回忆一下，在代数里我们是怎样在直线上确定点的位置的.

在一条直线(一般是取水平位置的直线) l 上任意取一点 O 作为原点；取一单位长度；再选取一个方向(习惯上是取自左至右的方向)作为直线的正向．于是，对于直线 l 上的任一点 P，我们总可以把 OP 看作是以 O 为起点，P 为终点的有向线段(图 1·7)，用单位长度去度量，就可以得到有向线段 OP 的数量，设这个数量是 x．如果 OP 与 l 的方向相同，则 x 是正数(即 $x>0$)；如果 OP 与 l 的方向相反，则 x 是负数(即 $x<0$)；如果 P 点在 O 点上，则 $OP=0$．我们把 x 叫做是轴上 P 点的坐标(简称 P 点的**坐标**)，用 $P(x)$ 表示．例如 $OP_1=4$,

说明 P_1 点的坐标是 4, 同样 $OP_2=-3$, 说明 P_2 点的坐标是 -3(图 1·8).

图 1·7

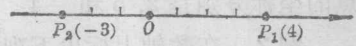


图 1·8

反过来, 对于给定的任意一个实数 x, 我们可以把它看成是以 O 为起点, 某一点 P 为终点的有向线段 OP 的数量, 就是 $OP=x$. 这样, 对于一个给定的实数 x, 我们总可以在直线 l 上找到唯一的点 P, 它以 x 作为坐标. 例如给定一个数是 -5, 我们可以在直线上找到一个点 P, 使得 $OP=-5$. -5 就是 P 点的坐标.

象这样:

(1) 在给定的直线 l 上指定正方向;

(2) 在直线 l 上取一定点作为原点(一般以 O 表示这一点);

(3) 任取一条一定长度的线段作为单位长度.

我们就说在直线 l 上建立了直线坐标系, 这一条直线叫做**坐标轴**, 也叫做**数轴**.

根据上面的分析, 可知实数和数轴上的点可以建立一一对应的关系. 就是说, 对于任何一个实数, 总可以用数轴上的一个(唯一的)点来表示它; 反过来, 数轴上的任何一个点, 都表示一个(唯一的)实数.

例 1. 在数轴(图 1·9)上 O 为原点, 且 $OA=2$, $AB=3$,

图 1·9

$OC=-4$. 求 A, B, C 三点的坐标.

【解】 因为 $OA=2$, $OB=5$, $OC=-4$, 所以 A, B, C 三点的坐标分别是 2, 5 和 -4.

例 2. 在数轴上标出下列各点的位置:

(1) $A_1(-3.5)$, (2) $A_2\left(\frac{8}{3}\right)$,

(3) $A_3(5\sin 15^\circ)$, (4) $A_4(-\sqrt{3})$.

【解】 因为 $5\sin 15^\circ=5\times 0.2588=1.2940\approx 1.3$, 且又 $-\sqrt{3}\approx -1.7$, 所以 A_1, A_2, A_3, A_4 各点的位置如图 1·10 所示.

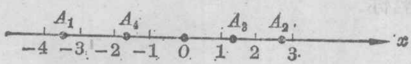


图 1·10

注 如果点的坐标是无理数, 可以取它的近似数代替, 如 $\sqrt{3}\approx 1.7$; $5\sin 15^\circ\approx 1.3$; $\pi\approx 3.1$ 等, 一般只取到小数一位.

练 习

1. 在数轴上的有向线段的数量, 什么时候为正, 什么时候为负?

2. 在数轴上求出下列各点, 已知它们的坐标是:

(1) $-\frac{5}{3}$; (2) 3.475; (3) $2\sqrt{3}$; (4) $\lg 75$;

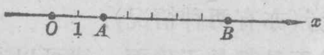
(5) $6\sin 18^\circ$; (6) π; (7) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$; (8) -0.5.

3. 用平面几何作图法求长度为 $2\sqrt{3}$ 的线段, 并以此为坐标, 在数轴上标出与它对应的点的位置.

4. 在数轴上已知 $|OP|=4$, 求 P 点的坐标.

5. 在数轴上(如图) AB 的数量是 5, A 点的坐标是 2, 求 B 点的坐标.

6. 在数轴上(如图), $PQ=8$, Q 点的坐标是 5, 求 P 点的坐标.



(第 5 题)

(第 6 题)

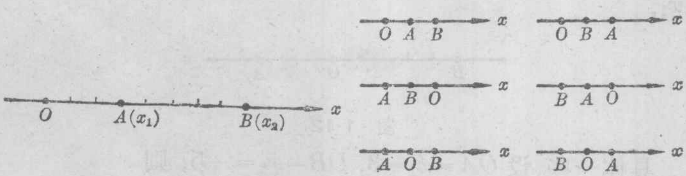
§1·3 数轴上有向线段的数量

设数轴 x 上有两点 A, B, 它们的坐标分别是 x_1 和 x_2. 现在我们来研究, 如何用坐标 x_1 和 x_2 表示有向线段 AB 的数量. 在图 1·11 (a) 中, $OA=x_1$, $OB=x_2$, 线段 AB 的起点为 A, 终点为 B. 从图形上,我们可以直观地看到

$$AB=OB-OA.$$

即

$$\boldsymbol{AB=x_2-x_1}. \tag{1}$$



(a) (b)

图 1·11

就是说, **有向线段** AB **的数量是终点的坐标减去始点的坐标**.

这个结论对于一般的情况是不是也适合呢? 下面让我们来看看 A, B 两点在数轴上的各种位置的情况(如图 1·11 (b)):

(1) A, B 同在原点的右面(有两种情况)；

(2) A, B 同在原点的左面(有两种情况)；

(3) A, B 分列在原点的两旁(亦有两种情况)。

对于各种情况，公式 (1) 是不是都是正确而一律可以通用呢？现在我们任选上面的一种情况再加以证明.

设 A 点在原点的右面，B 点在原点的左面；又 A, B 两点的坐标分别是 x_1 和 x_2，就是

$$OA=x_1, \quad OB=x_2.$$

依照图 1·12，显然有

$$BO+OA=BA.$$

但 $$BA=-AB, \quad BO=-OB,$$

代入上式中得 $$-OB+OA=-AB,$$

就是 $$AB=OB-OA$$

$$=x_2-x_1.$$

有向线段 AB 的数量仍然是终点的坐标 x_2 减去始点的坐标 x_1.

图 1·12

具体一些，设 $OA=x_1=3$, $OB=x_2=-5$，则

$$AB=x_2-x_1=-5-3=-8.$$

再从图上看，AB 的方向与轴的方向相反，又 $|AB|=8$，所以 $AB=-8$. 从公式所计算的与图上实际情况是一致的.

从上面的具体例子看来，在这种情况下，公式 (1) 是正确的.

同理可以证明，A, B 两点在数轴上的其他各种位置时，公式