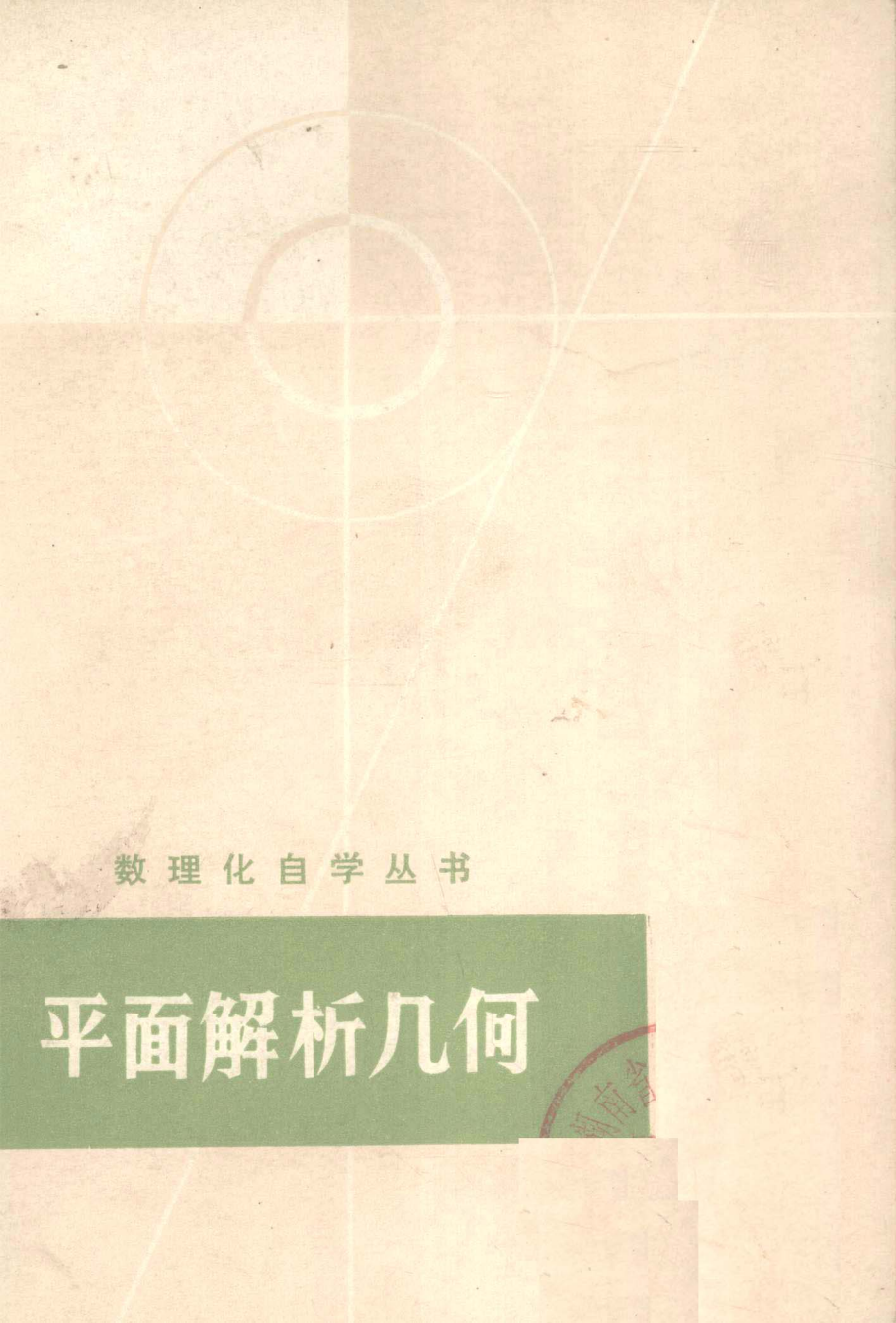


The background of the cover is a light beige, textured surface. In the upper half, there is a faint, large-scale geometric diagram. It consists of a circle with a smaller concentric circle inside it. A vertical line and a horizontal line intersect at the center of the circles. Additionally, a diagonal line extends from the top right towards the center. The overall aesthetic is minimalist and academic.

数 理 化 自 学 丛 书

平面解析几何

数理化自学丛书

平面解析几何

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

上海人民出版社

数理化自学丛书

平面解析几何

数理化自学丛书编委会

数学编写小组编

(原上海科技版)

上海人民出版社出版 湖南人民出版社重印
湖南省新华书店发行 湖南省新华印刷一厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张16 字数352,000

1965年9月第1版 1977年12月新1版 1978年4月湖南第1次印刷

统一书号: 13171·223 定价: 1.05元

重 印 说 明

《数理化自学丛书》是一九六六年前出版的。计有《代数》四册，《平面几何》二册，《三角》一册，《立体几何》一册，《平面解析几何》一册；《物理》四册；《化学》四册。这套书的特点是：比较明白易懂，从讲清基本概念出发，循序渐进，使读者易于接受和理解，并附有不少习题供练习用。这套书可以作为青年工人、知识青年和在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师教学参考，出版以后，很受读者欢迎。但是在“四人帮”及其余党控制上海出版工作期间，这套书横被扣上所谓引导青年走白专道路的罪名，不准出版。

英明领袖华主席和党中央一举粉碎了祸国殃民的“四人帮”。我国社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期。党的第十一次全国代表大会号召全党、全军、全国各族人民高举毛主席的伟大旗帜，在英明领袖华主席和党中央领导下，为完成党的十一大提出的各项战斗任务，为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国，争取对人类作出较大的贡献，努力奋斗。许多工农群众和干部，在党的十一大精神鼓舞下，决心紧跟英明领袖华主席和党中央，抓纲治国，大干快上，向科学技术现代化进军，为实现四个现代化作出贡献，他们来信要求重印《数理化自学丛书》。根据读者的要求，我们现在在原书基础上作一些必要的修改后，重新出版这套书，以应需要。

十多年来，科学技术的发展是很快的。本丛书介绍的虽仅是数理化方面的基础知识，但对于应予反映的科技新成就方面内容，是显得不够的。同时，由于本书是按读者自学的要求编写的，篇幅上就不免有些庞大，有些部分也显得有些烦琐。这些，要请读者在阅读时加以注意。

对本书的缺点，希望广大读者批评指出，以便修订时参考。

内 容 提 要

本书主要包括直线和圆锥曲线的各种方程与性质,以及坐标变换、极坐标和参数方程,同时简单地介绍了在生产劳动中应用较多的经验公式。

本书讲解较详,系统性强,有大量例题和习题,注解与提示较多,可供具有平面几何、代数方程和平面三角的初步知识的读者阅读。书中加有“*”号的段落、章节和习题,都是比较难的,初学时如有困难,可暂时略去。

本书主要读者对象是青年工人、知识青年、在职干部,也可供中学教师参考。

目 录

重印说明

第一章 平面直角坐标系1

§ 1.1 有向直线和有向线段1

§ 1.2 直线上的坐标系6

§ 1.3 数轴上有向线段的数量9

§ 1.4 轴上有向线段的和12

§ 1.5 数轴上线段的定比分点 15

§ 1.6 平面上的直角坐标系21

§ 1.7 两点间的距离31

§ 1.8 直线的倾斜角和斜率36

§ 1.9 平面上线段的定比分点 46

§ 1.10 三角形的面积59

本章提要68

复习题一69

第二章 曲线和方程72

§ 2.1 曲线和方程的关系72

§ 2.2 从方程描出它的曲线74

§ 2.3 从曲线求出它的方程79

§ 2.4 方程的讨论85

§ 2.5 两曲线的交点104

§ 2.6 用图解法求方程的实数解110

本章提要112

复习题二113

第三章 直线115

§ 3.1 直线的方程115

§ 3.2 直线和一次方程的关系118

§ 3.3 确定直线的条件123

§ 3.4 直线方程的几种形式124

§ 3.5 直线的法线式方程136

§ 3.6 化直线的一般式方程为法线式方程143

§ 3.7 直线和点的位置关系148

§ 3.8 直线到点的距离的两应用154

§ 3.9 直线与直线间的关系163

§ 3.10 三线共点的条件171

§ 3.11 直线系177

§ 3.12 经过两直线交点的直线系182

本章提要190

复习题三192

第四章 圆锥曲线195

I. 圆195

§ 4.1 圆的方程195

§ 4.2 决定一个圆的条件202

§ 4.3 圆的切线209

§ 4.4 圆系218

II. 椭圆223

§ 4.5 椭圆的定义223

§ 4.6 椭圆的标准方程224

§ 4.7 椭圆的性质228

§ 4.8 用几何方法画出椭圆上的点239

III. 双曲线242

§ 4.9 双曲线的定义	243
§ 4.10 双曲线的标准方程	244
§ 4.11 双曲线的性质	248
§ 4.12 用几何方法画出双曲 线上的点	264

IV. 抛物线

§ 4.13 抛物线的定义	267
§ 4.14 抛物线的标准方程	268
§ 4.15 抛物线的性质	271
§ 4.16 抛物线方程的其他一 些形式	274
§ 4.17 用几何方法画出抛 线上的点	279
§ 4.18 圆锥曲线	283

V. 圆锥曲线的切线和法线 285

§ 4.19 曲线的切线定义	286
§ 4.20 切线的斜率	287
§ 4.21 切线的方程	290
§ 4.22 已知斜率的切线方程	301
§ 4.23 圆锥曲线的切线和法 线的性质	307
本章提要	316
复习题四	317

第五章 坐标变换和二元二次

方程的讨论

§ 5.1 坐标轴的平行移动	321
§ 5.2 利用移轴化简方程的 方法	324
§ 5.3 方程 $Ax^2 + Cy^2 + Dx$ $+ Ey + F = 0$ 的讨论	330
§ 5.4 坐标轴的旋转	337
§ 5.5 一般二元二次方程的 讨论	344
§ 5.6 化简关于数字系数的	

一般二元二次方程的

实际方法

§ 5.7 圆锥曲线的统一定义	365
*§ 5.8 经过五点的圆锥曲线	373
§ 5.9 圆锥曲线系	375
本章提要	377
复习题五	379

第六章 参数方程

§ 6.1 参数方程	381
§ 6.2 参数方程和消去法	384
§ 6.3 描绘参数方程的图象	386
§ 6.4 直线和圆锥曲线的参 数方程	392
§ 6.5 参数方程的应用	398
§ 6.6 圆锥曲线的直径	405
本章提要	414
复习题六	415

第七章 极坐标

§ 7.1 极坐标的意义	419
§ 7.2 描绘极坐标方程的曲 线	425
§ 7.3 极坐标系和直角坐标 系的关系	437
§ 7.4 应用极坐标求轨迹的 方程	442
§ 7.5 直线和圆锥曲线的极 坐标方程	446
本章提要	451
复习题七	452

附录 经验公式

总复习题	468
习题答案	478

第一章 平面直角坐标系

在这一章里,主要是叙述解析几何的一些基础知识:

首先,引进平面直角坐标系,通过平面直角坐标系建立点与数的关系(在第二章建立方程与图形的关系). 必须强调指出,掌握坐标方法对学习解析几何这门课程十分重要.

又,通过坐标法,导出几个基本的计算公式——两点间的距离、直线的倾斜角和斜率、线段的定比分割的分点坐标和三角形面积的计算公式等. 这些都是深入学习解析几何时所必备的基本计算公式,掌握得好不好将直接影响到以后几章的学习.

由于这一章是学习解析几何的开始,概念可能比较多一些. 但如果在学习中能够多思考,反复作些比较,掌握它并不是一件难事.

§1.1 有向直线和有向线段

1. 有向直线 在平面几何里,对于一条直线,我们只考虑它的位置而不考虑它的方向,如图 1.1 是一条经过 B, A 两点的直线,通常我们称它为直线 BA 或直线 AB 是没有什么

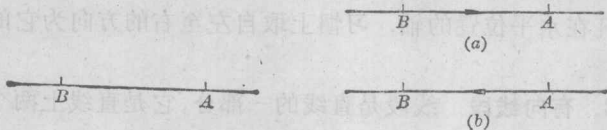


图 1.1

图 1.2

么区别的。但是，假如把这条直线看作是由一个点移动而成的，那就产生了方向的概念。在一条东西向的直线上(图 1.2)，由西到东(图 a)与由东到西(图 b)显然是两回事。举一个例子来说，我们可以把一条笔直的路象征地看成是一条直线，一个人在这条路上就有往和返的区别，这种区别主要是方向的不同。在物理学里(尤其在力学中一开始就接触到方向问题)，在生活实际中，考虑直线的方向是有它的实际意义的。因此，除了继续考虑直线的位置外，我们还必须考虑直线的方向问题。

很明显，任意一条直线都具有两个方向，我们可以规定它的一个方向为正向。这样，与它相反的一个方向就是负向了。象这样确定了正方向的直线，叫做有向直线，也叫做轴^①。

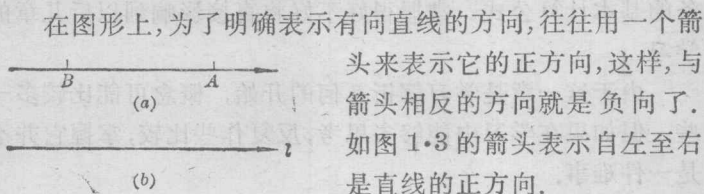


图 1.3

在图形上，为了明确表示有向直线的方向，往往用一个箭头来表示它的正方向，这样，与箭头相反的方向就是负向了。如图 1.3 的箭头表示自左至右是直线的正方向。

在文字上表示有向直线，可顺着直线的正方向依次取两点，如图上的 B, A ，这时我们就称它是有向直线 BA (图 1.3(a))。反过来，有向直线 AB 就是指从 A 到 B 的方向是这条有向直线的正方向。有时，我们不用两个字母表示有向直线，而是在箭头的旁边写一个拉丁字母，例如写 l ，称作有向直线 l (图 1.3(b))。

凡在水平位置的轴，习惯上取自左至右的方向为它的正方向。

2. 有向线段 线段是直线的一部分，它是直线上两个定

^① 轴与数轴的概念不同，数轴的概念在 1.2 节里叙述。

点间的一段。由于我们引进了有向直线的概念，在直线上的线段很自然地也就有考虑它的方向的必要了。

一条线段也有两个相反的方向。如果以线段的一端 B 为起点(图 1.4)，则另一端 A 就是终点，由起点 B 到终点 A 是线段的一个方向；反过来，如果以 A 为起点，则 B 就是终点，由 A 到 B 的方向恰好与由 B 到 A 的方向相反。象这样指出了起



图 1.4

点与终点的线段称为有向线段。我们规定，有向线段的方向就是从起点到终点的方向。

为了明确地指出一条有向线段的方向，我们用规定的记号来表示，就是把标志起点的字母写在第一位，接着写上标志终点的字母。以图 1.4 的线段来说，如 B 是起点， A 是终点，则写成有向线段 BA ；如果 A 是起点， B 是终点，就写成 AB 。反过来，如果有一条有向线段 CD ，我们就理解 C 是有向线段的起点， D 是终点。因此 AB 与 BA 虽然是长度相等的线段，但它们的方向却相反。

在平面几何里，线段 AB 与线段 BA 是表示同一条线段，在意义上，指的是它们的长度相同。在解析几何里，除了指明它们的长度相同外，还指出了它们的方向不同。今后在表示线段时就应该注意了。

根据上面的分析，我们对有向线段应该这样来理解：

(1) 有向线段是有规定方向的线段，从起点到终点的方向就是有向线段的方向。

(2) 有向线段可以计算它的长度，计算的方法与平面几何里一样。取一个定长的线段作为单位长度^①，用这个单位

^① 习惯上，我们把单位长度作为“1”。

长度去度量这条线段,所得到的数称为这有向线段的长度.

3. 有向线段的数量^① 有向线段的方向是用正向和负向来表示的. 要确定有向线段的方向是正向还是负向,可以由它所在的直线的方向来说明. 就是说,如果有向线段的方向与它所在的直线的方向相同,我们就说这条有向线段是正向的;

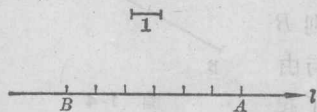


图 1.5

如果相反,就说它是负向的. 例如图 1.5 的轴 l , 箭头表示轴的正向, 则在轴上的有向线段 BA 与轴的方向相同, BA 就是正向的线段, AB 与轴的方向相反, AB 就是负向的线段.

如果我们用单位长度去度量线段 BA 的长度, 并且量出的结果设是 6, 就是说线段 BA 的长是 6 个单位.

因为有向线段 BA 是正向的, 它的长度等于 6, 因此, 我们就说有向线段 BA 的数量是 6, 并且用记号

$$BA=6$$

表示. 同样, 因为有向线段 AB 是负向的, 它的长度也是 6, 因此, 我们就说有向线段 AB 的数量是 -6 , 用记号

$$AB=-6$$

表示. 象这样一条有向线段的长度, 连同表示它的方向的正负号, 叫做这条有向线段的数量. 就是说, 有向线段的数量, 既表示它的长度, 又指出了它的方向.

例 如图 1.6 轴 l 上的每一小格表示一个单位长度, A ,

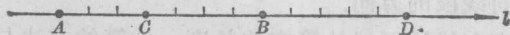


图 1.6

^① 有的书上叫做有向线段的值, 意义是一样的.

B, C, D 是轴上的四个点, 求有向线段 AC, CD, BC, DA 的数量.

【解】 有向线段 AC 与轴同向, 它的长度是 3, 所以

$$AC=3.$$

同理 $CD=9.$

有向线段 BC 与轴异向, 它的长度是 4, 所以

$$BC=-4.$$

同理 $DA=-12.$

4. 有向线段的长度的表示法 如果只考虑有向线段的长度, 而不考虑它的方向, 我们就给有向线段的数量加上绝对值的记号. 如图 1.6 的有向线段 AB 的长度记以 $|AB|$, 有向线段 DA 的长度记作 $|DA|$, 所以

$$|AB|=|7|=7, \quad |BA|=|-7|=7;$$

$$|AD|=|12|=12, \quad |DA|=|-12|=12.$$

可以看出, 对有向线段的长度来说,

$$|AB|=|BA|, \quad |AD|=|DA|. \quad (1)$$

对有向线段的数量来说,

$$AB=-BA, \quad AD=-DA. \quad (2)$$

就是说, 当表示有向线段的始点和终点的两个字母位置互相掉换时, 有向线段的符号应改号.

经过移项后, (2) 式也可以写成

$$AB+BA=0, \quad AD+DA=0.$$

当然, 如点 B 与点 A 重合, 有向线段 AB 的数量就等于零, 这时可以写成

$$AB=0.$$

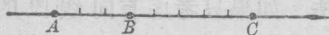
注 1. 轴上的线段都是有向线段, 今后为简便起见, 对轴上的有向线段就称为轴上线段, 有时只简称为线段.

2. 在解析几何中, 表达有向线段或它的数量时, 记号中字母排列的次序均包含方向的意义在内(记号 BA 指明方向是由 B 到 A), 所以对记号的理解和使用, 其中字母就应当按照它们的位置来处理, 不能随便变更的.

练 习

1. 轴上的有向线段 AB , 有向线段 AB 的数量, 有向线段 AB 的长度, 这三者在意义上有什么不同, 它们的表示方法有什么不同?

1



(第2题)

2. 在右图中求:

(1) AB , BC , AC 的数量和它们的长度;

(2) 从数量上看 $AB+BC$ 与 AC 的关系;

(3) 求 AC , CA 的数量, 它们在数量上的关系怎样, 又它们的长度关系怎样?

§1.2 直线上的坐标系

回忆一下, 在代数里我们是怎样在直线上确定点的位置的.

在一条直线(一般是取水平位置的直线) l 上任意取一点 O 作为原点; 取一单位长度; 再选取一个方向(习惯上是取自左至右的方向)作为直线的正向. 于是, 对于直线 l 上的任一点 P , 我们总可以把 OP 看作是以 O 为起点, P 为终点的有向线段(图 1.7), 用单位长度去度量, 就可以得到有向线段 OP 的数量, 设这个数量是 x . 如果 OP 与 l 的方向相同, 则 x 是正数(即 $x > 0$); 如果 OP 与 l 的方向相反, 则 x 是负数(即 $x < 0$); 如果 P 点在 O 点上, 则 $OP=0$. 我们把 x 叫做是轴上 P 点的坐标(简称 P 点的坐标), 用 $P(x)$ 表示. 例如 $OP_1=4$,

说明 P_1 点的坐标是 4, 同样 $OP_2 = -3$, 说明 P_2 点的坐标是 -3 (图 1.8).



图 1.7

图 1.8

反过来, 对于给定的任意一个实数 x , 我们可以把它看成是以 O 为起点, 某一点 P 为终点的有向线段 OP 的数量, 就是 $OP = x$. 这样, 对于一个给定的实数 x , 我们总可以在直线 l 上找到唯一的点 P , 它以 x 作为坐标. 例如给定一个数是 -5 , 我们可以在直线上找到一个点 P , 使得 $OP = -5$, -5 就是 P 点的坐标.

象这样:

- (1) 在给定的直线 l 上指定正方向;
- (2) 在直线 l 上取一定点作为原点 (一般以 O 表示这一点);
- (3) 任取一条一定长度的线段作为单位长度.

我们就说在直线 l 上建立了直线坐标系, 这一条直线叫做坐标轴, 也叫做数轴.

根据上面的分析, 可知实数和数轴上的点可以建立一一对应的关系. 就是说, 对于任何一个实数, 总可以用数轴上的一个 (唯一的) 点来表示它; 反过来, 数轴上的任何一个点, 都表示一个 (唯一的) 实数.

例 1. 在数轴 (图 1.9) 上 O 为原点, 且 $OA = 2$, $AB = 3$,

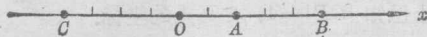


图 1.9

$OC = -4$. 求 A, B, C 三点的坐标.

【解】 因为 $OA = 2, OB = 5, OC = -4$, 所以 A, B, C 三点的坐标分别是 2, 5 和 -4 .

例 2. 在数轴上标出下列各点的位置:

(1) $A_1(-3.5)$, (2) $A_2\left(\frac{8}{3}\right)$,

(3) $A_3(5 \sin 15^\circ)$, (4) $A_4(-\sqrt{3})$.

【解】 因为 $5 \sin 15^\circ = 5 \times 0.2588 = 1.2940 \approx 1.3$, 且又 $-\sqrt{3} \approx -1.7$, 所以 A_1, A_2, A_3, A_4 各点的位置如图 1.10 所示.

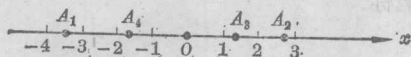


图 1.10

注 如果点的坐标是无理数, 可以取它的近似数代替, 如 $\sqrt{3} \approx 1.7; 5 \sin 15^\circ \approx 1.3; \pi \approx 3.1$ 等, 一般只取到小数一位.

练 习

1. 在数轴上的有向线段的数量, 什么时候为正, 什么时候为负?

2. 在数轴上求出下列各点, 已知它们的坐标是:

(1) $-\frac{5}{3}$; (2) 3.475; (3) $2\sqrt{3}$; (4) $\lg 75$;

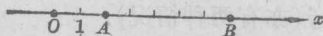
(5) $6 \sin 18^\circ$; (6) π ; (7) $\frac{1}{1+\sqrt{2}}$; (8) -0.5 .

3. 用平面几何作图法求长度为 $2\sqrt{3}$ 的线段, 并以此为坐标, 在数轴上标出与它对应的点的位置.

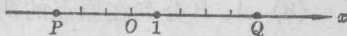
4. 在数轴上已知 $|OP| = 4$, 求 P 点的坐标.

5. 在数轴上(如图) AB 的数量是 5, A 点的坐标是 2, 求 B 点的坐标.

6. 在数轴上(如图), $PQ=8$, Q 点的坐标是 5, 求 P 点的坐标.



(第5题)



(第6题)

§1.3 数轴上有向线段的数量

设数轴 x 上有两点 A, B , 它们的坐标分别是 x_1 和 x_2 . 现在我们来研究, 如何用坐标 x_1 和 x_2 表示有向线段 AB 的数量. 在图 1.11(a) 中, $OA=x_1$, $OB=x_2$, 线段 AB 的起点为 A , 终点为 B . 从图形上, 我们可以直观地看到

$$AB=OB-OA.$$

即

$$AB=x_2-x_1. \quad (1)$$

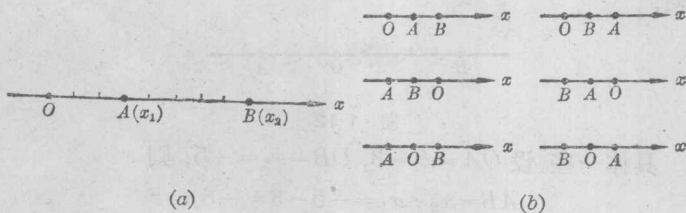


图 1.11

就是说, 有向线段 AB 的数量是终点的坐标减去始点的坐标.

这个结论对于一般的情况是不是也适合呢? 下面让我们来看看 A, B 两点在数轴上的各种位置的情况(如图 1.11(b));

(1) A, B 同在原点的右面(有两种情况);

(2) A, B 同在原点的左面(有两种情况);

(3) A, B 分列在原点的两旁(亦有两种情况)。

对于各种情况, 公式 (1) 是不是都是正确而一律可以通用呢? 现在我们任选上面的一种情况再加以证明。

设 A 点在原点的右面, B 点在原点的左面; 又 A, B 两点的坐标分别是 x_1 和 x_2 , 就是

$$OA = x_1, \quad OB = x_2.$$

依照图 1.12, 显然有

$$BO + OA = BA,$$

但 $BA = -AB, \quad BO = -OB,$

代入上式中得 $-OB + OA = -AB,$

就是 $AB = OB - OA$

$$= x_2 - x_1.$$

有向线段 AB 的数量仍然是终点的坐标 x_2 减去始点的坐标 x_1 。

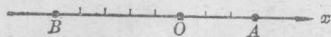


图 1.12

具体一些, 设 $OA = x_1 = 3, OB = x_2 = -5$, 则

$$AB = x_2 - x_1 = -5 - 3 = -8.$$

再从图上看, AB 的方向与轴的方向相反, 又 $|AB| = 8$, 所以 $AB = -8$. 从公式所计算的与图上实际情况是一致的。

从上面的具体例子看来, 在这种情况下, 公式 (1) 是正确的。

同理可以证明, A, B 两点在数轴上的其他各种位置时, 公式