全国180座城市考研辅导班指定用书

文都教育

2009

全国硕士研究生入学统一考试

高等数学辅导讲义

主编：蔡子华

- 高数王牌解读高数重点
- 多年教学辅导经验汇集
- 定义公式定理概括提炼
- 思路方法技巧轻松到手

MATHS

原子能出版社

全国180座城市考研辅导班指定用书

文都教育

2009

全国硕士研究生入学统一考试

高等数学辅导讲义

MATHS

主编：蔡子华

原子能出版社

图书在版编目(CIP)数据

全国硕士研究生入学统一考试高等数学辅导讲义/蔡子华主编.
—北京:原子能出版社,2008.6
ISBN 978-7-5022-4135-3

Ⅰ.全… Ⅱ.蔡… Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 085015 号

全国硕士研究生入学统一考试高等数学辅导讲义

出版发行 原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100037)
责任编辑 谭 俊
特约编辑 师 潭
封面设计 王大龙
印　　刷 湖北新华印务股份有限公司
经　　销 全国新华书店
开　　本 787×1092 毫米 1/16
印　　张 13
版　　次 2008 年 6 月第 1 版 2008 年 6 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5022-4135-3
定　　价 18.00 元

 网址:http://www.aep.com.cn

前 言

本讲义为广大考研学子复习高等数学(微积分)编写,由编者近年来的考研辅导班授课笔记整理而成。全书共分十一讲,均按重点知识结构图、基本内容、重点、典型例题解析顺序编写。

"重点知识结构图"给出了该单元重点知识及其关系,可使读者整体了解需掌握的知识,领会其内在联系。

"基本内容"系统列举了考纲考试内容要求的概念、定理、性质、基本公式、运算法则和方法,并对如何理解有关数学理论进行了阐述,以帮助读者深刻理解、切实掌握、融会贯通。

"重点"指出了根据近年来考研数学真题涉及的程度而归纳的知识名目,便于考生备考时准确把握重点。

"典型例题解析"结合典型例题对考研数学的重点题型分类进行了解题思路的分析及解题方法、技巧的梳理和总结,利于读者有效提高解题能力。该部分例题的选择严格遵循"紧扣硕士研究生入学统一考试数学考试大纲;重视基础,摒弃偏题、怪题;大部分题难度与历年考试真题里中等以上题相仿"的原则,旨在避免难度过高让考生备考时望而生畏丧失信心,难度过低让考生达不到考试要求的水平而导致考研失败。

本书选题精当,内容全面,重点突出,讲述通俗、严谨、条理分明,力求以不大的篇幅让使用本书的读者收效最大化。

由于考纲对各卷种在高等数学(微积分)科目中规定的考试内容大部分相同,且相同内容的考试要求差别不大,讲义没有分理工类和经济类编写。为方便读者使用,讲义中凡考纲仅对数学一考生要求的部分标有"*"记号;仅对数学二、数学三、数学四考生要求的部分相应标有"○"、"△"、"□"记号(依据最新考试大纲)。

在本书编写的过程中,文都考研信息中心的全体同志做了大量有益的工作,在此一并表示感谢。

书中错误和疏漏之处,请广大读者、数学同仁指正。

编者

2008 年 6 月

目 录

第一讲　函数　极限　连续性

A. 重点知识结构图

- 函　　数
  - 函数的定义及定义域
  - 函数的特性
    - 函数的特性的定义及重要结论
    - 导函数的特性
    - 原函数的特性
  - 初等函数
    - 复合函数
    - 反函数
    - 基本初等函数
    - 初等函数
- 极　　限
  - 极限的概念
    - 数列的极限的定义
    - 函数当 $x\to\infty$ 时极限的定义
    - 函数当 $x\to x_0$ 时的极限
      - 定义
      - 左右极限
        - 定义
        - 充要条件
  - 无穷小量
    - 无穷小的定义
    - 无穷小量的运算性质
    - 极限与无穷小的关系
    - 无穷小的比较
      - 定义
      - 等价无穷小替换定理
  - 相互关系
  - 无穷大量
    - 无穷大量的定义
    - 无穷大量与函数无界的关系
  - 极限存在的准则
  - 两个重要极限
  - 极限的运算法则
  - 极限的重要性质
    - 唯一性
    - 有界性
    - 保号性
- 相互关系
- 函数的连续性
  - 函数连续性的定义
  - 间断点的分类
    - 第一类间断点
    - 第二类间断点
  - 连续函数的运算性质
  - 初等函数的连续性
  - 在闭区间上连续函数的性质
    - 最大最小值定理
    - 有界性定理
    - 介值定理
    - 最介值定理

B. 基本内容

一、函数

1. 函数的定义及定义域

(1) 函数的定义及定义域的定义.

(2) 函数定义的两要素:定义域和对应法则.

(3) 两个函数相同的条件:定义域和对应法则都相同的两个函数是相同的函数.

如:① $f(x)=\dfrac{x^2-x-2}{x-2}$ 与 $g(x)=x+1$ 不同,因为定义域不同.

② $f(x)=\sqrt{\sin^2 x}$ 与 $g(x)=\sin x$ 不同,因为对应法则不同.

③ $f(x)=x^2+\sin^2 x+\cos^2 x$ 与 $g(t)=t^2+1$ 相同.

注: ③ 中两个函数的定义域与对应法则都相同,虽然其自变量所用字母不同,但这与两函数是否相同无关.

(4) 单值函数:若在函数的定义域内每一个 x 只对应一个函数值 y,则称其为单值函数.

2. 函数的定义域的求法

(1) 分式函数,分母不等于 0

(2) $\sqrt[2n]{u}$, $u\geqslant 0$ (n 为正整数)

(3) $\ln u$, $u>0$

(4) $\arcsin u$, $\arccos u$ $|u|\leqslant 1$

(5) 多个函数的和、差的定义域是各个函数定义域的交集.

3. 复合函数

(1) 定义:若函数 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 点处有定义,而 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 处有定义,则 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 点处有定义. 将 $y=f[\varphi(x)]$ 称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的复合函数,称 u 为中间变量.

注: 只有当函数 $u=\varphi(x)$ 的值域与 $y=f(u)$ 的定义域的交集不是空集时,才能将它们复合成复合函数.

(2) 函数复合:先利用外层的函数关系,再利用内层的函数关系而构成. 如:

设 $f(x)=\sin x$, $\varphi(x)=e^x$,则 $f[\varphi(x)]=\sin[\varphi(x)]=\sin(e^x)$

(3) 复合函数的分解:先找到外层的函数关系,设其内部整体为中间变量 u,再依次分解. 如:

$$y=[\arctan(x+\sin x)]^{\frac{1}{2}}$$

设 $u=\arctan(x+\sin x)$, $v=x+\sin x$,则所给函数由 $y=u^{\frac{1}{2}}$、$u=\arctan v$、$v=x+\sin x$ 复合而成.

4. 反函数

(1) 若由函数 $y=f(x)$ 得到函数 $x=\varphi(y)$,则称 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数,$y=f(x)$ 为直接函数. 反函数也可记为 $y=f^{-1}(x)$.

(2) 结论: $f^{-1}[f(x)]=f[f^{-1}(x)]=x$.

(3) 单值函数存在反函数的充分条件：若 $f(x)$ 在区间 I 内单调 $\Rightarrow f(x)$ 在区间 I 内一定存在单值反函数.

注： 反过来不成立. 即 $f(x)$ 在区间 I 内存在单值反函数但 $f(x)$ 在区间 I 内不一定单调.

如函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -1\leqslant x<0\\ 1+x, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$ 在区间 $[-1,1]$ 内存在单值反函数，但它在 $[-1,1]$ 上不单调.

(4) 直接函数与反函数的图象的关系：在同一坐标系中，它们关于直线 $y=x$ 对称.

注： 直接函数与反函数的图象关于直线 $y=x$ 对称的前提是直接函数及其反函数都以 x 为自变量，以 y 为函数.

5. 函数的特性

(1) 函数的特性的定义：

① 单调性：设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$. 若对于区间 I 上的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)>f(x_2))$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(减少).

② 奇偶性：对于函数定义域内任一 x，若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 是奇函数；若 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数.

③ 有界性：若存在 $M>0$，对一切 $x\in I$，都有 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在点集 I 上有界.

④ 周期性：设 $f(x)$ 的定义域为 I，若存在 $T>0$，对任意 $x\in I$，都使得 $f(x+T)=f(x)$ $(x+T\in I)$，则称函数 $f(x)$ 为周期函数，称 T 为其周期. 通常周期是指最小的正数 T.

注： ① 函数的有界性、单调性应与相关点集 I 联系起来，离开了点集 I，这些概念是没有任何意义的.

② 奇(偶) 函数的定义域必关于原点对称.

③ 周期函数的定义域必是无限的点集，但也不能说是全体实数，如 $y=\tan x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 且 $x\neq k\pi\pm\frac{\pi}{2}$ $(k=0,1,2,\cdots)$.

(2) 一些重要结论：

① 关于奇偶性

a. 奇函数 + 奇函数 = 奇函数　　　　b. 偶函数 + 偶函数 = 偶函数

c. 奇函数 · 偶函数 = 奇函数　　　　d. 奇函数 · 奇函数 = 偶函数

e. 偶函数 · 偶函数 = 偶函数

f. 任何一个定义域关于原点对称的函数都可以表示成一个奇函数和一个偶函数的和的形式. 其表示式为：

$$f(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}+\frac{f(x)+f(-x)}{2}$$

② 关于周期性

a. 若 $f(x)$ 以 T 为最小正周期，则 $f(\omega x)$ 以 $\frac{T}{|\omega|}$ $(\omega\neq 0)$ 为最小正周期.

b. 多个函数的和、差、积的最小正周期一般为各个函数的最小正周期的最小公倍数. 如 $y=\sin 4x+\cos 3x$ 的最小正周期为 $\frac{2\pi}{4},\frac{2\pi}{3}$ 的最小公倍数 2π. 不过也有例外，如 $\sin x$、$\cos x$ 的

最小正周期均为 2π，但 $y=\sin x\cos x$ 的最小正周期为 π.

(3) 导函数的特性：若函数 $f(x)$ 可导，则

① 奇(偶) 函数的导函数是偶(奇) 函数.

② 周期函数的导函数是和原来函数有相同周期的周期函数.

(4) 原函数的特性：若函数 $f(x)$ 存在原函数，则

① 奇函数的原函数是偶函数.

② 偶函数的原函数中只有一个是奇函数.

注： 周期函数的原函数不一定是周期函数，如 $f(x)=1+\cos x$ 是以 2π 为周期的函数，但其原函数之一 $F(x)=x+\sin x$ 就不是周期函数.

6. 初等函数

(1) 基本初等函数：幂函数，指数函数，对数函数，三角函数，反三角函数这五类函数统称为基本初等函数.

(2) 初等函数：由常数和五类基本初等函数进行有限次的四则运算和复合构成的可用一个式子表示的函数称为初等函数.

注： ① 初等函数不要求四则运算和复合每一种都有，只要有其中的一种或几种就可以，但一定只能是有限次的.

② 初等函数必须能用一个式子表示，不能用一个式子表示的函数不能称为初等函数，故分段函数一般不能叫初等函数.

二、极限

1. 极限的概念

(1) 数列的极限的定义

① 定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists$ 正整数 N，使 $n>N$ 时，不等式

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

都成立，则称当 n 趋于 ∞ 时，数列 $\{x_n\}$ 以常数 a 为极限(亦称 $\{x_n\}$ 收敛于 a)，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，否则称 $\{x_n\}$ 发散.

② 理解极限的定义应注意的问题

a. 其定义的精髓是某一个时刻开始数列的一般项与常数 a 之差的绝对值小于任意小的正数 ε，其意为 x_n 与 a 之间的距离要任意小，即 x_n 要无限趋近于 a，而不是越来越接近于 a.

b. 数列的极限与其子数列的极限的关系：

$x_n\to a(n\to\infty)$ 的充分必要条件是其任一子数列以 a 为极限.

(2) 当 $x\to\infty$ 时函数的极限

① 定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使当 $|x|>X$ 时，对应的函数值都满足

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称当 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 以常数 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

② 理解极限的定义应注意的问题：

a. 定义的精髓同数列的极限.

b. $x\to+\infty(x\to-\infty)$ 时 $f(x)$ 的极限的定义只需将以上定义中的 $|x|>X$ 改为 $x>$

X(或 $x<-X$) 即可.

(3) 当 $x\to x_0$ 时函数极限的定义

① 定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

则称 $x\to x_0$ 时函数 $f(x)$ 以常数 A 为极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

② 理解定义应注意的问题

a. 定义的精髓与数列极限的定义相同.

b. 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，说明不要求在 x_0 点此不等式成立，即意味着 $x\to x_0$ 时 $f(x)$ 以 A 为极限与 $f(x)$ 在 x_0 点是否有定义及即使有定义函数值等于什么无关.

③$x\to x_0$ 时函数的左、右极限

a. 定义：$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $0<x-x_0<\delta(0<x_0-x<\delta)$ 时 $|f(x)-A|<\varepsilon$，则称 A 为 $f(x)$ 在 x_0 点的右(左) 极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A(\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A)$.

b. $x\to x_0$ 时函数极限存在的充要条件

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \quad\Leftrightarrow\quad \lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A$$

2. 无穷小量

(1) 定义：以 0 为极限的变量叫无穷小量.

(2) 无穷小的运算性质

① 有限个无穷小的和为无穷小.

② 有限个无穷小的乘积为无穷小.

③ 有界函数与无穷小的乘积为无穷小.

注：　无穷个无穷小的和或积不一定是无穷小.

如：设　$x_n^{(1)}=\dfrac{1}{n}$　　当 $n=1,2,\cdots$ 时

$$x_n^{(k)}=\begin{cases}1 & \text{当 } n=1,2,\cdots,k-1 \text{ 时}\\ k^{k-1} & \text{当 } n=k \text{ 时}\\ \dfrac{1}{n} & \text{当 } n=k+1,k+2,\cdots \text{ 时}\end{cases}$$

当 $n\to\infty$ 时，$x_n^{(k)}(k=1,2,\cdots)$ 都是无穷小量，但 $\lim\limits_{k\to\infty}x_n^{(1)}\cdot x_n^{(2)}\cdots x_n^{(k)}=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}(\lim\limits_{k\to\infty}x_n^{(1)}\cdot x_n^{(2)}\cdots x_n^{(k)})=1$，它不是无穷小量.

(3) 极限与无穷小量的关系

$f(x)\to A \quad\Leftrightarrow\quad f(x)=A+\alpha$. 其中 α 是在与 $f(x)\to A$ 时自变量的同一变化趋势下的无穷小量.

(4) 无穷小的比较

① 定义：若 $\lim\alpha=0$，$\lim\beta=0$ 且 $\beta\neq0$，则

当 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=0$ 时，称 α 较 β 高阶，记为 $\alpha=o(\beta)$.

当 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \infty$ 时，称 α 较 β 低阶.

当 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = a \neq 0$ 时，称 α 与 β 同阶. 当 $a = 1$ 时，称 α 与 β 等价，记为 $\alpha \sim \beta$.

注： *a*. 无穷小比较中的 α 与 β 必须是在自变量相同变化趋势下的无穷小量.

b. 无穷小的比较只是定性的，即只有阶的高低之别，没有数量上的关系.

c. 不是任何无穷小量都能比较其阶的高低的.

如　当 $x \to \infty$ 时，$\alpha = \dfrac{\sin x}{x^2}$，$\beta = \dfrac{1}{x^2}$ 都是无穷小量，但 $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim\limits_{x\to\infty} \sin x$ 不存在，不能比较其阶的高低.

② 等价无穷小替换定理

若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，则 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha}{\beta'} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

注： *a*. 等价无穷小替换可用来求极限，但要注意的是，在使用时必须分子或分母整体替换，不能分子或分母分项替换.

b. 常用的等价无穷小有：当 $u \to 0$ 时

$\sin u \sim u$，　$\arcsin u \sim u$，　$\tan u \sim u$，　$\arctan u \sim u$，　$\ln(1+u) \sim u$，

$e^u - 1 \sim u$，　$1 - \cos u \sim \dfrac{u^2}{2}$，　$(1+u)^\alpha - 1 \sim \alpha u$.

3. 无穷大量

(1) 定义：设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的某去心邻域内有定义(或 $|x|$ 大于某一正数时有定义)，如果对于任意大的正数 M，总存在 $\delta > 0$(或 $X > 0$)，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$(或 $|x| > X$) 时，不等式

$$|f(x)| > M$$

都成立，则称函数 $f(x)$ 为当 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷大.

(2) 无穷大与无穷小的关系

在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 是无穷大，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小；如果 $f(x)$ 是无穷小且 $f(x) \neq 0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(3) 无穷大与函数无界的关系

① 若 $f(x)$ 是 $x \to x_0$(或 $x \to \infty$) 时的无穷大量，则 $f(x)$ 必在 x_0 点的某个去心邻域内(或 $|x| > X$ 时) 无界.

② 无界的变量不一定是无穷大量. 如 $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 点的任一去心邻域内都无界，但 $x \to 0$ 时它不是无穷大量.

4. 极限的四则运算法则

若　$\lim f(x) = A$　　$\lim g(x) = B$

则　　$\lim[f(x) \pm g(x)] = A \pm B$

$\lim[f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0)$$

注： ① 此处没有注明自变量的变化趋势，意味着等式成立的前提是在自变量的相同变化趋势下.

② 使用极限的四则运算法则的前提是各自的极限存在. 函数的和、差、积、商的极限存在不能保证各自的极限存在.

5. 复合函数极限的运算法则

设复合函数 $y = f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 的某去心邻域内有定义，若 $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = a$，且在 x_0 点的去心邻域内 $\varphi(x) \neq a$，又 $\lim\limits_{u \to a} f(u) = A$，则 $\lim\limits_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = \lim\limits_{u \to a} f(u) = A$.

6. 极限存在的准则

(1) 准则 Ⅰ：若 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$，且 $\lim\limits_{n \to \infty} y_n = \lim\limits_{n \to \infty} z_n = a$ 则 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

(2) 准则 Ⅱ：单调有界数列必存在极限.

注： ① 若数列 $\{x_n\}$ 单调增加（减少），则只要它有上界（下界）即有界. 因为单调增加（减少）的数列必有下界（上界），它的第一项即为其下界（上界）.

② 两个准则都可推广到函数的极限.

7. 两个重要极限

$$\lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{u} = 1 \qquad \lim_{u \to 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = \mathrm{e}$$

8. 关于极限的重要性质

(1) 唯一性：若变量 y 的极限存在，则它的极限必是唯一的.

(2) 有界性（或局部有界性）

① 若 $x_n \to a (n \to \infty)$，则必 $\exists M > 0$，使对一切 n，$|x_n| \leqslant M$.

② 若 $x \to x_0$（或 $x \to \infty$）时，$f(x) \to A$，则 $f(x)$ 在 $0 < |x - x_0| < \delta$（或 $|x| > X$）内有界. 因其只在一定范围内有界，故称局部有界.

(3) 保号性

① 若 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A > 0 (< 0)$，则必 $\exists \delta > 0 (X > 0)$，使当 $0 < |x - x_0| < \delta$（或 $|x| > X$）时，$f(x) > 0 (< 0)$.

② 若 $f(x) > 0 (< 0)$ 且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$，则 $A \geqslant 0 (\leqslant 0)$.

注： 若 $f(x) > 0 (< 0)$ 且 $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ (x \to \infty)}} f(x) = A$，则 $A > 0 (< 0)$ 是错误的. 如 $f(x) = x^2 > 0 (x \neq 0)$，但 $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$.

9. 关于极限的几个重要结论

(1) $\lim\limits_{n \to \infty} q^n = \begin{cases} \infty & |q| > 1 \\ 0 & |q| < 1 \end{cases}$

(2) $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad (a > 0)$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\infty & \text{当 } n>m \text{ 时}\\ \dfrac{a_0}{b_0} & \text{当 } n=m \text{ 时}\\ 0 & \text{当 } n<m \text{ 时}\end{cases}$ （其中 $a_0\neq 0,b_0\neq 0$）

10. 洛必达法则

(1) 条件：

①$x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时，$f(x)$、$g(x)$ 都趋于零或都趋于无穷大.

②$f(x)$，$g(x)$ 在 x_0 点的去心邻域（或 $|x|>X$ 时）可导且 $g'(x)\neq 0$.

③ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在或为无穷大.

(2) 结论：

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

注： *a*. 使用洛必达法则时，一定要验证是否满足条件，否则不能用. 如数列的极限就不能直接使用洛必达法则，因为它不满足条件②；又如 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin x}{x-\cos x}$，由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\cos x}{1+\sin x}$ 不存在也不为无穷大，不满足条件③，故不能用.

b. 其他未定式：$\infty-\infty,0\cdot\infty,0^0,\infty^0,1^\infty$ 都应将其化为 $\dfrac{0}{0}$ 型或 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型未定式再用洛必达法则.

三、函数的连续性

1. 函数连续性的定义

(1) 函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续的定义：

设 $f(x)$ 在 x_0 点的某个邻域内有定义，且

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0\quad(\text{或}\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0))$$

则称函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，x_0 点为函数的连续点.

(2) 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内连续的定义：

若函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内的每一点都连续，则称函数 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续.

(3) 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续的定义：

若 $f(x)$ 在开区间 (a,b) 内连续，且 $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=f(a)$，$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)=f(b)$，则称函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续.

注： ① 判定 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续时，对于区间端点处只要求其在区间的左（右）端点处右（左）连续.

② 函数若在区间 I 内连续，区间 I 叫函数的连续区间.

2. 间断点及其分类

(1) 间断点的定义：函数的不连续点叫它的间断点，即出现下列三种情况之一：

① 在 $x=x_0$ 点无定义；

② 虽在 $x=x_0$ 点有定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在；

③ 虽在 $x=x_0$ 点有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在，但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$；

则函数 $f(x)$ 在 x_0 点不连续.

(2) 间断点的分类：

$$\text{间断点}\begin{cases}\text{第一类间断点(左、右极限都存在)}\begin{cases}\text{可去间断点(左极限}=\text{右极限)}\\ \text{跳跃间断点(左极限}\neq\text{右极限)}\end{cases}\\ \text{第二类间断点：除第一类间断点之外的间断点}\end{cases}$$

3. 连续函数的性质

(1) 连续函数的和、差、积、商(分母的函数值不等于 0) 是连续的.

(2) 复合函数的连续性：若函数 $u=\varphi(x)$ 在 x_0 点连续，函数 $y=f(u)$ 在 $u_0=\varphi(x_0)$ 点连续，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 在 x_0 点连续.

(3) 反函数的连续性：若函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上单值单调且连续，则其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 在相应区间上单值单调且连续.

4. 初等函数的连续性

(1) 一切基本初等函数在其定义域内连续.

(2) 一切初等函数在其定义区间内连续.

注： 初等函数在其定义域内不一定连续. 如 $f(x)=\sqrt{\cos x-1}$ 的定义域为 $x=2k\pi(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$，它在定义域内任一点都不连续. 初等函数只有其定义域构成区间，则其在定义区间内连续.

5. 闭区间上连续函数的性质：

(1) 定理 1(最值定理)：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上必有最小值和最大值.

(2) 定理 2(有界性定理)：若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则它在 $[a,b]$ 上必有界.

(3) 定理 3(介值定理)：

① 介值定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)\neq f(b)$，c 是介于 $f(a)$，$f(b)$ 之间的一个常数，则必 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=c$.

② 零点定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则必 $\exists\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$.

(4) 定理 4：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，m、M 分别是它在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值，$m\leqslant c\leqslant M$，则必 $\exists\xi\in[a,b]$，使 $f(\xi)=c$.

C. 重点

一、函数的特性.　　二、极限的概念.　　三、无穷小量.　　四、极限的求法.

五、函数连续性的概念，间断点的分类及在闭区间上连续函数的性质.

D. 典型例题解析

一、选择题

【例 1】 在每题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内函数 $f(x)>0$，且当 k 为大于 0 的常数时有

$f(x+k)=\dfrac{1}{f(x)}$，则在区间$(-\infty,+\infty)$内函数$f(x)$是(C)

A. 奇函数　　B. 偶函数　　C. 周期函数　　D. 单调函数

(2) 设$0<x_n<1, n=1,2,\cdots$，且有$x_{n+1}=-x_n^2+2x_n$，则(C)

A. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$　　B. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不存在　　C. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$　　D. $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$

(3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x+xf(x)}{x^3}=0$，则$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{6+f(x)}{x^2}=$(C)

A. 0　　B. 6　　C. 36　　D. ∞

(4) 在区间$(-\infty,+\infty)$内方程$|x|^{\frac{1}{4}}+|x|^{\frac{1}{2}}-\cos x=0$(C)

A. 无实根　　B. 有且仅有一个实根

C. 有且仅有两个实根　　D. 有无穷多个实根

(5) 下列说法正确的是(C)

A. 两个无穷大量之和一定是无穷大

B. 有界函数与无穷大量的乘积一定是无穷大

C. 无穷大与无穷大之积一定是无穷大

D. 不是无穷大量一定是有界的

二、解答题

Ⅰ. 有关求极限的问题

求极限的方法：

1. 连续函数的连续点：用公式$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$
2. 洛必达法则
3. 用初等变形法
4. 无穷小量分出法
5. 用无穷小的性质：有界函数与无穷小的乘积为无穷小
6. 等价无穷小替换法
7. 用极限存在的准则
8. 用重要极限
9. 泰勒公式展开法
10. 用中值定理：微分及积分中值定理
11. 用导数的定义
12. 用级数的有关概念：级数收敛的定义、必要条件等
13. 用定积分

【例 2】 求$\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

【解】 原式$=\lim\limits_{x\to+\infty}2\cos\dfrac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{2}$

$$=\lim_{x\to+\infty}2\cos\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{2}\sin\frac{1}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}$$

$=0$.（有界函数×无穷小）

注： ① 本例使用的方法是利用无穷小的运算性质：有界函数与无穷小的乘积为无穷小. 当极限式子为多个因子的乘积时，只要其中有一个因子的极限不存在(不是无穷大)，则可考虑应用此法.

② 此例不能用函数极限的四则运算法则，因为它不满足各自的极限存在的条件.

【例 3】 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x)(1+x^2)\cdots(1+x^n)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$；　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln(\sqrt{n^2+a^2}-n)}$；

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$.

【解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{x^n}\right)}{\left(n^n+\dfrac{1}{x^n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}=\dfrac{1}{n^{\frac{n(1+n)}{2}}}$；

(2) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{\ln a^2-\ln n-\ln\left[1+\sqrt{1+(a/n)^2}\right]}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\ln a^2}{\ln n}-1-\dfrac{\ln\left[1+\sqrt{1+(a/n)^2}\right]}{\ln n}}=-1$(无穷小量分出法)；

(3) 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-1}+\sqrt{x}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x-1}-\sqrt{x+1})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2x^{\frac{3}{2}}}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x})(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+1})}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{\left(\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+1\right)\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x}}\right)}=-\dfrac{1}{4}$.

注： 例 3 使用的方法叫"无穷小量分出法"，即把极限式子中的无穷小量分离出来，再求其极限. 此法在 $x\to\infty$(或 $n\to\infty$) 时当 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 未定式不能用洛必达法则或用洛必达法则求极限太繁琐时用.

【例 4】 求下列各极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{\sin x}}{x-\sin x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\sin^2x+e^x)-x}{\ln(x^2+e^{2x})-2x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+\tan x}-\sqrt{1+\sin x}}{x(1-\cos x)}$；　(4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$.

【解】 (1) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{\sin x}(e^{x-\sin x}-1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to0}e^{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x-\sin x}-1}{x-\sin x}$

$=1\cdot\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x-\sin x}=1$；

(此例用到当 $x\to0$ 时，$e^{x-\sin x}-1\sim x-\sin x$)

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{\sin^2x}{e^x}\right)}{\ln\left(1+\dfrac{x^2}{e^{2x}}\right)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{\sin^2x}{e^x}}{\dfrac{x^2}{e^{2x}}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2x}{x^2}\cdot\lim\limits_{x\to0}e^x$

$=1$(等价无穷小替换法)；