HUALUOGENG JINBEISAI DAOXUE YU XUNLIAN

华罗庚金杯赛
导学与训练

主编　李玉峰　姬翠萍　杨建斌

新世界出版社
NEW WORLD PRESS

前言

“华罗庚金杯”少年数学邀请赛(简称“华杯赛”)是为了纪念和学习我国杰出的数学家华罗庚教授,于1986年始创的全国性大型少年数学竞赛活动,由中国优选法统筹法与经济数学研究会、中国少年报社、中央电视台等单位联合发起并主办。

“华杯赛”是以教育广大青少年从小学习和弘扬华罗庚教授的爱国主义思想、刻苦学习的品质、热爱科学的精神,激发广大中小学生学习数学的兴趣,开发智力,普及数学科学为宗旨的活动。二十年来,“华杯赛”已成功地举办了十一届,全国有近3000万少年儿童参加了比赛。“华杯赛”已成为教育、鼓舞一代又一代青少年勇攀科学高峰和奋发向上的动力,深受广大学生、教师和家长的喜爱。日本、韩国、马来西亚、新加坡等国家和香港、澳门、台湾地区的学生也参加了该项赛事。

“华杯赛”一贯坚持普及性、趣味性、新颖性相结合的命题原则。“华杯赛”主试委员会汇集了一大批经验丰富、以华罗庚教授的学生为主的命题专家。纵观“华杯赛”历届试题,不难看出这些题目并没有脱离学生的知识水平,而是来源于学生的生活实际,形式灵活多变,思路奇特,方法巧妙,这可以使同学们既充分感受到生活中“无处没有数学”,也从中学习到数学灵活多变的思维方法。

“华杯赛”每两年举办一届,自2004年起改为每年一届,每两年举办一次总决赛。赛程分初赛、决赛和总决赛。

《华罗庚金杯赛导学与训练》是为了适应新的赛制和变化,为了帮助中小学生更广泛地参加“华杯赛”并取得优异成绩而编写和出版的。其作者长期从事数学竞赛的研究和辅导,对“华罗庚金杯”数学邀请赛及其试题有深入的理解,并根据“华杯赛”的命题原则和指导思想,结合“华杯赛”的试题特点、变化和自己在培训中的体会及经验,把历届“华杯赛”试题中考查的知识和出现的各种题型系统而又简洁地作了归纳和介绍,适合中小学生学习和阅读。

本书共分三大部分:基础知识、方法原理和实践提高。其中前两部分共14节,系统介绍了“华杯赛”所需要的知识、方法和技巧,突出“竞赛数学”的思想和方法。第三部分包括历届“华杯赛”试题选讲和精心编制的20套模拟试题,供同学们热身训练。

本书可供小学高年级和初中一年级学生参加“华杯赛”使用,其中带有“*”的例题和习题包含初一数学知识。

由于时间仓促,书中难免有不妥之处,敬请广大读者指正。

编　者

2007年2月

目　录

基础知识部分

一、数的运算技巧 …… 1
1. 数的运算技巧(一) …… 1
2. 数的运算技巧(二) …… 3
3. 数的运算技巧(三) …… 5
4. 数的运算技巧(四) …… 7
*5. 数的运算技巧(五) …… 9
*6. 绝对值 …… 11
二、整数 …… 13
1. 整数的整除(一) …… 13
2. 整数的整除(二) …… 14
3. 质数与合数 …… 16
4. 约数和倍数 …… 18
5. 最大公约数 …… 20
6. 最小公倍数 …… 22
7. 分解质因数 …… 24
8. 带余数除法 …… 26
三、应用题 …… 27
1. 平均数问题 …… 27
2. 行程问题 …… 30
3. 分数、百分数应用题 …… 35
4. 工程问题 …… 40
四、概率统计 …… 44
1. 概率统计(一) …… 44
*2. 概率统计(二) …… 46
五、几何 …… 48
1. 长度与角度的计算 …… 48
2. 平面图形的面积 …… 50
3. 割补与等积变换 …… 53
4. 勾股与弦图 …… 56
5. 表面积与体积 …… 59
6. 展开图与相对位置 …… 62

方法原理部分

一、离散最值 …… 66
1. 最值问题(一) …… 66
2. 最值问题(二) …… 68
3. 最值问题(三) …… 70
4. 最值问题(四) …… 72
5. 最值问题(五) …… 74
二、逻辑推理 …… 76
1. 逻辑推理(一) …… 76
2. 逻辑推理(二) …… 80
三、计数原理 …… 84
1. 容斥原理 …… 84
2. 奇偶原理(一) …… 86
3. 奇偶原理(二) …… 88
4. 奇理原理(三) …… 90
5. 奇偶原理的运用 …… 92
6. 计数原理与方法 …… 93
7. 排列组合 …… 96
四、数学建模 …… 97
五、染色与覆盖 …… 101
1. 染色与覆盖(一) …… 101
2. 染色与覆盖(二) …… 104
六、统筹规划 …… 107
1. 统筹规划(一) …… 107
2. 统筹规划(二) …… 108
3. 统筹规划(三) …… 110
七、方程和不等式 …… 112
*1. 方程(一)——含字母系数的方程 …… 112
*2. 方程(二)——绝对值方程 …… 113
*3. 方程(三)——一次方程组 …… 114
4. 方程(四)——不定方程(组) …… 116
*5. 不等式的应用(一)——一次不等式(组) …… 117
*6. 不等式的应用(二)——不等式(组)的应用 …… 118
八、抽屉原理 …… 120
1. 抽屉原理初步(一) …… 120
2. 抽屉原理初步(二) …… 121
3. 抽屉原理提高(一) …… 122
4. 抽屉原理提高(二) …… 124

5.抽屉原理解题实例 …… 125
九、杂题选讲 …… 126
1.杂题(一) …… 126
2.杂题(二) …… 128
3.杂题(三) …… 131
4.杂题(四) …… 133
5.杂题(五) …… 136

实践提高部分

一、历届华杯赛试题选讲 …… 138
1.计算与巧算 …… 138
2.整数问题(一) …… 140
3.整数问题(二) …… 142
4.应用题 …… 144
5.图形问题 …… 146
6.组合数学 …… 149
7.操作与推理问题 …… 152
二、综合练习题 …… 154
综合练习题(一) …… 154
综合练习题(二) …… 155
综合练习题(三) …… 156
综合练习题(四) …… 157
综合练习题(五) …… 158
综合练习题(六) …… 159
综合练习题(七) …… 160
综合训练题(八) …… 161
综合练习题(九) …… 162
综合练习题(十) …… 163
综合练习题(十一) …… 164
综合练习题(十二) …… 164
综合练习题(十三) …… 165
综合练习题(十四) …… 166
综合练习题(十五) …… 167
综合练习题(十六) …… 168
综合练习题(十七) …… 168
综合练习题(十八) …… 169
综合练习题(十九) …… 170
综合练习题(二十) …… 171
参考答案 …… 173

基础知识部分

一、数的运算技巧

数的计算问题是学习数学的一个十分重要的内容，它是我们学习其他科学知识的前提条件，同时也是我们日常的生活、生产不可缺少的基本技能. 如何进行简捷、巧妙的计算是我们非常关心的问题. 本章将通过几个方面来介绍数值运算的常用技巧，来带领大家一同走进奇妙的数的世界.

1. 数的运算技巧(一)

内容与方法

本节主要是利用加法的结合律、乘法的结合律、乘法的分配律来简化运算过程，有时候需要对题目原有的数进行“拆”和“凑”，以方便运算律的应用.

例题讲解

例 1. 用简便的方法计算下列各题：

(1)$991.6+65.2+34.8+8.4$；

(2)$1.25\times2.007\times2.5\times320$.

【分析】 本例在解题过程中要利用加法和乘法的结合律，(1)中 991.6 和 8.4 的小数部分的和为 1，65.2 与 34.8 的小数部分的和为 1，因此结合为$(991.6+8.4)+(65.2+34.8)$则较为简便. (2)中 $1.25\times8=10$，$2.5\times4=10$，故可以把 320 分成 $4\times8\times10$ 的形式，然后结合成为$(1.25\times8)\times2.007\times(2.5\times4)\times10$.

例 2. 计算：$29\frac{3}{5}-1\frac{1}{3}+15\frac{1}{4}+3\frac{2}{3}-2\frac{1}{3}-14\frac{2}{5}-0.25$.

【分析】 这是分数的连续加减问题，先观察是否有和为 0 的数，若有则先结合相加. 把同分母的数结合相加，若既有小数也有分数，通常把小数转化为分数，然后进行结合. 在结合的过程中需要添加括号，做题时，提倡把前面带“+”的数(正数)放在前面，以避免添括号时出现需要变号而引发的错误. 如：$\left(3\frac{2}{3}-1\frac{1}{3}-2\frac{1}{3}\right)+\left(29\frac{3}{5}-14\frac{2}{5}\right)+\left(15\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)$.

例 3. 计算：$1.345\times0.655\times2.69+1.345^3+1.345\times0.655^2$.

【分析】 算式中的每一项都有因数 1.345，可以利用乘法的分配律进行计算. 把式中的 2.69 分成 2×1.345 的形式，原式可变形为 $1.345\times(0.655\times1.345\times2+1.345^2+0.655^2)$. 把式子中的 $0.655\times1.345\times2$ 分成 $0.655\times1.345+0.655\times1.345$，然后分别与 1.345^2、0.655^2 相结合，以简化运算过程. 如果同学们掌握了公式 $a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$，解题过程更

加简便.

例 4. 计算：$2008\times200720072007-2007\times200820082008$.

【分析】 两个乘法算式都有一个相同的因数，可以通过分解法寻找公因数，再利用乘法的分配律，由 3 个数合并的 $200720072007=2007\times100010001$，$200820082008=2008\times100010001$.

实际上被减数和减数是相等的.

例 5. 计算：$1956\times\left(\frac{1}{51}-\frac{1}{2007}\right)+51\times\left(\frac{1}{1956}-\frac{1}{2007}\right)-2007\times\left(\frac{1}{1956}+\frac{1}{51}\right)+3$.

【分析】 "3"是解决本题的关键，可以称之为"题眼"，将"3"分成"1+1+1"，把每一个"1"化为分子分母相同的假分数，提取公因数，从而挖掘出隐藏很深的公因式. 原式可转化为：

$$1956\times\left(\frac{1}{51}-\frac{1}{2007}\right)+\frac{1956}{1956}+51\times\left(\frac{1}{1956}-\frac{1}{2007}\right)+\frac{51}{51}-2007\times\left(\frac{1}{1956}+\frac{1}{51}\right)+\frac{2007}{2007}.$$

提出相应的公因式 1956、51、2007，就可以得到新的公因式$\left(\frac{1}{1956}+\frac{1}{51}-\frac{1}{2007}\right)$.

例 6. 计算：

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2008}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}\right)-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2008}\right)\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}\right).$$

【分析】 本题直接计算复杂而且繁难，注意括号内数字的联系，引入字母，将复杂的数的运算转化为简单的式的计算. 如：

可以设 $a=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2007}$，原式可以转化为$\left(a+\frac{1}{2008}\right)(1+a)-\left(1+a+\frac{1}{2008}\right)a$.

***例 7.** 在数 1，2，3，…，2009，2010 前添符号"+"和"−"并依次运算，所得可能的最小非负数是多少？

【分析】 由于 $1+2+\cdots+2010=\frac{(1+2010)\times2010}{2}=2011\times1005$ 是一个奇数，而且在 1，2，…，2010 之前任意添加符合不改变其代数和的奇偶性，故所得最小非负数不小 1. 现在考虑在自然数 $n,n+1,n+2,n+3$ 之间添加符号，显然 $n-(n+1)-(n+2)+(n+3)=0$. 这题是我们把连续的四个数分成一组，在按上述规则添加符号，造出一系列的 0，最后剩下的将是 2009，2010 两个数，取 $-2009+2010$ 即得 1.

***例 8.** 计算：$(2+1)(2^2+1)(2^4+1)(2^8+1)(2^{16}+1)(2^{32}+1)(2^{64}+1)$

【分析】 式子中的 $2,2^2,2^4,\cdots,2^{64}$，每一个数都是前一个数的平方，在$(2+1)$的前面添加一个$(2-1)$，就可以连续递进地运用公式$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ 进行计算. 掌握一些常用的公式，可以给我们解题带来意想不到的方便.

同步练习

用简便的方法计算下列各题：

1. $12.38+14.4+7.62+5.6$.

2. $9+99+999+9999+99999+999999$.

3. $14.72\times12.5\times3.2\times0.25$.

4. $6666666\times3333333+7777778\times9999999$.

5. $(100+47.23+47.34)\times(47.23+47.34+47.56)-(100+47.23+47.34+47.56)\times(47.23+47.34)$.

*6. $-7.2\times0.125+0.375\times1.1+3.6\times\frac{1}{2}-3.5\times0.375$.

*7. $5\frac{6}{11}-3.125-7\frac{4}{7}-3\frac{4}{11}+8\frac{1}{8}-3\frac{6}{7}-2\frac{2}{11}+6\frac{3}{7}$.

*8. $(-1)+(-1)^2+(-1)^3+\cdots+(-1)^{2008}$.

2. 数的运算技巧(二)

内容与方法

利用分数的性质，把分数进行化简是分数计算中的常见的问题. 在分数求和时，通常会把分数拆分成可以抵消的两项，这是一种常见的方法. 请同学们在看例题和做练习时细心体会.

例题讲解

例 1. 计算：$\frac{123454321}{55555\times55555}$.

【分析】 分子 $123454321=11111\times11111$，分母中的 $55555=5\times11111$，通过把分子分母分解进行约分来求解.

例 2. 计算：$\frac{2008+20082008+200820082008}{2007+20072007+200720072007}-\frac{1}{2007}$.

【分析】 仔细观察，发现前一个分数的分子和分母各数的结构相同，一定隐藏着相同的因数. 找出相同的因数通过约分，可以使运算简便. 式子中的 $20082008=2008\times10001$.

例 3. 计算：$\frac{1234567890}{1234567891^2-1234567890\times1234567892}$.

【分析】 式子中的数目较大，设 $m=1234567891$，分母为 $m^2-(m-1)(m+1)=m^2-(m^2-1)=1$，分子为 $m-1$.

例 4. 试比较下列各组数的大小：

(1) $\frac{200420052006}{200520062007}$ 和 $\frac{200520062007}{200620072008}$；

(2) $\frac{95^{2008}}{95^{2007}}$ 和 $\frac{95^{2008}+2007}{95^{2007}+2007}$.

【分析】 (1)中第一个分数的分子和分母同时加上 100010001，就得到第二个分数. 对一个分数 $\frac{b}{a}$，则有 $\frac{b}{a}<\frac{b+c}{a+c}(a>b)$，即真分数的分子分母同加上一个数，分数值变大. 而对于假分数 $(b>a)$ 是恰好相反.

例 5. 计算：$\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{2007\times2008}$.

【分析】 在做分数的加减法时，根据特点，把其中的一些分数适当的折开，使折开后的一些分数可以互相抵消以达到简化运算的目的，这种方法叫做拆项法. 算式中的$\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$，同类型的问题也能利用$\dfrac{d}{n(n+d)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+d}$或者$\dfrac{1}{n(n+d)}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+d}\right)$.

例 6. 计算：$\dfrac{1}{1\times4}+\dfrac{1}{2\times5}+\dfrac{1}{3\times6}+\cdots+\dfrac{1}{97\times100}$.

【分析】 本例在化简时就是利用上题提到的$\dfrac{1}{n(n+d)}=\dfrac{1}{d}\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+d}\right)$进行化简. 在相互抵消时注意是隔几项才能相互抵消，有时前后都会剩下不能消去的相同数目的项.

例 7. 计算：$\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\dfrac{1}{3\times4\times5}+\cdots+\dfrac{1}{98\times99\times100}$.

【分析】 同学们应该能够想到要进行折项相消，利用$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n+1)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}\right]$把式子中的每一项折开，然后互相抵消以达到化简的目的. 如果每一个分数的分母是四个连续的数相乘，可以利用$\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\dfrac{1}{3}\left[\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}-\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}\right]$进行折分，依次类推.

例 8. 计算：$\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{100^2}\right)$.

【分析】 本题是分数的连乘的形式，要采取新的方法. 我们发现：$1-\dfrac{1}{2^2}=\left(1-\dfrac{1}{2}\right)\left(1+\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{2}$，$1-\dfrac{1}{3^2}=\left(1-\dfrac{1}{3}\right)\left(1+\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{4}{3}$，…，$1-\dfrac{1}{100^2}=\left(1-\dfrac{1}{100}\right)\left(1+\dfrac{1}{100}\right)=\dfrac{99}{100}\times\dfrac{101}{100}$. 变形以后再互相抵消.

同步练习

1. $\dfrac{1757+17571757+175717571757}{2008+20082008+200820082008}$.

2. $\dfrac{7^2+1}{7^2-1}+\dfrac{9^2+1}{9^2-1}+\dfrac{11^2+1}{11^2-1}+\cdots+\dfrac{99^2+1}{99^2-1}$.

3. $\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{12}+\dfrac{1}{20}+\dfrac{1}{30}+\dfrac{1}{42}+\dfrac{1}{56}+\dfrac{1}{72}+\dfrac{1}{90}$.

4. $1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{7}{12}+\dfrac{9}{20}-\dfrac{11}{30}+\dfrac{13}{42}-\dfrac{15}{56}+\dfrac{17}{72}$.

5. $1+\dfrac{1}{1+2}+\dfrac{1}{1+2+3}+\dfrac{1}{1+2+3+4}+\cdots+\dfrac{1}{1+2+3+\cdots+100}$.

·6. $1-\dfrac{2}{1\times(1+2)}-\dfrac{3}{(1+2)(1+2+3)}-\cdots-\dfrac{100}{(1+2+\cdots+99)(1+2+\cdots+100)}$.

7. 2008 减去它的$\frac{1}{2}$，再减去余下的$\frac{1}{3}$，再减去余下的$\frac{1}{4}$，依此类推，一直到减去余下的$\frac{1}{2008}$，那么最后剩下的数是几？

8. 把“1”拆分为十个单位分数的和.

3. 数的运算技巧(三)

内容与方法

我们把按一定次序排列的一列数称为数列，常见的数列是等差数列和等比数列. 如果一个数列中的每一项减去它前面的一项的差都相等，那么就称这个数列是等差数列. 而如果一个数列中的每一项和它前一项的比都相等，就称这个数列为等比数列. 数列方面的运算要注意首项、末项、总项数以及公差(公比)之间的关系.

例题讲解

例 1. 计算：$2+4+6+8+\cdots+296+298$.

【分析】 这是一组等差数列的求和，首项为 2，末项为 298，总项数为$\frac{298-2}{2}+1$. 我们可以设 $S=2+4+6+8+\cdots+296+298$，则 $S=298+296+294+\cdots+4+2$，两式相加就可以得到 $2S=(2+298)+(4+296)+\cdots+(296+4)+(298+2)=\underbrace{300+300+\cdots+300}_{149个300}$. 也可以直接利用等差数列的求和公式进行计算.

例 2. 求 1000 以内所有能被 7 整除的自然数的和.

【分析】 1000 以内所有能被 7 整除的自然数有：0，7，14，21，28，…，987，994.

这是一个等差数列的求和，利用上一题的方法可以计算，也可以直接利用求和公式.

例 3. 设 n 为大于 1 的自然数，计算：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{2}{3}+\frac{3}{3}+\frac{2}{3}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\cdots+\frac{2}{n}+\frac{1}{n}.$$

【分析】 把相同分母的分数分为一组进行计算，对它的一般形式，我们可以发现以下规律：$\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{n-1}{n}+\frac{n}{n}+\frac{n-1}{n}+\cdots\frac{2}{n}+\frac{1}{n}=\frac{(1+2+\cdots+n-1)\times2+n}{n}=n$，把算式转化为一组等差数列的求和.

例 4. 已知 $1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+100\times101=343400$，我们可以求出 $1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2$ 的值，方法如下：设 $a=1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2$，$b=1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+100\times101$，则 $b-a=(1\times2-1^2)+(2\times3-2^2)+\cdots+(100\times101-100^2)=1+2+\cdots+100=5050$，所以可以得到 $a=b-5050=343400-5050=338350$. 如果 $1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n$

$(n+1)(n+2)$，试计算 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$ 的值.

【分析】 本题主要是考查同学们的模仿能力，同时要注意等差数列求和的方法. 同学们或许会想：$1\times2+2\times3+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ 是怎样得到的呢？实际上利用上一节讲过的"裂项相消"的方法，通过对 $n(n+1)=\frac{1}{3}[n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)]$ 的反复运用，就可以求出结果，请同学们自己试一试.

例 5. 计算：$\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{100}}$.

【分析】 本题是一个等比数列的求和，公比为 $\frac{1}{3}$，如果设 $S=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{100}}$，则能得到 $3S=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{3^3}+\cdots+\frac{1}{3^{99}}$，两式进行"错位相减"得：$2S=1-\frac{1}{3^{100}}$. 也可以直接利用等比数列的求和公式 $S=\frac{a_1-a_nq}{1-q}(q\neq1)$ 进行计算.

例 6. 计算：$1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{201}{2^{100}}$.

【分析】 这里给出的一串数并不具有前几个例子所显示的规律，但可以看出其分子成等差数列，分母成等比数列，此类问题仍可以利用上例所使用过的"错位相减法"进行简便运算. 我们如果设 $S=1+\frac{3}{2}+\frac{5}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots+\frac{201}{2^{100}}$，则 $2S=2+3+\frac{5}{2}+\frac{7}{2^2}+\cdots+\frac{201}{2^{99}}$，两式进行错位相减后得：$S=2+2+\frac{2}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2_{99}}-\frac{201}{2^{100}}=4+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{98}}\right)-\frac{201}{2^{100}}$，然后利用等比数列的求和公式进行计算.

例 7. 有这样一数列：1，3，7，15，31，63，…，你能根据它们之间的规律，得到第 100 个数是什么吗？

【分析】 可以断定这一组数既不是等差数列，也不是等比数列. 如仔细观察的话可以看出每一个数都是 2 的乘方减去 1，能得到它的通项公式. 如果用它的后一项减去前一项的话，它们的差恰好是一个等比数列，我们把这样的数列叫做等差比数列. 如果每一项用 a_n 表示的话，我们可以得到以下的式子：

$a_2-a_1=2$

$a_3-a_2=4=2^2$

$a_4-a_3=8=2^3$

……

$a_{100}-a_{99}=2^{99}$

把以上所有的等式进行相加，可得 $a_{100}-a_1=2+2^2+2^3+\cdots+2^{99}$，利用等比数列的求和方法就能很快地得到结果.

同步练习

1. 计算：$1+3+5+7+\cdots+2005+2007$.
2. 设 m 是奇数，且满足 $1+3+5+\cdots+m=361$，试求出 m 的值.

3. 计算：$2008^2-2007^2+2006^2-2005^2+\cdots+2^2-1$.

4. 计算：$1+5+5^2+5^3+\cdots+5^{99}+5^{100}$.

5. 计算：$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{60}\right)+\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{4}+\frac{2}{5}+\cdots+\frac{2}{60}\right)+\left(\frac{3}{4}+\frac{3}{5}+\cdots+\frac{3}{60}\right)+\cdots+\left(\frac{58}{59}+\frac{58}{60}\right)+\frac{59}{60}$.

6. 计算：$\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\cdots+\frac{2007}{2^{2008}}$.

4. 数的运算技巧(四)

内容与方法

在解答问题时，常常会遇到比较复杂的烦难问题，要很快得出答案有些困难，此时先设想与原问题类似的简单化问题，通过研究问题特殊的简单情况，由此得到启发，从而发现规律，总结方法，寻求解答问题的途径，正确解答问题. 通常找规律的方法如下：从简单出发找规律，应用特殊找规律，联想具体找规律，观察试算找规律等. 解此类问题要注意认真审题、仔细观察、灵活思考、分析归纳，从而探索出规律，就会使问题得到妙解.

例题讲解

例 1. 请你将生活中的一些规律性的知识运用到我们数学当中，动脑筋推断一下，这几个加法算式究竟表示什么？推断出来后，便可在括号里填上合理的数字：

(1)$10+2=1$；

(2)$300+60+5=1$；

(3)$50+(\quad)=1$；

(4)$8000+700+(\quad)+0=1$.

【分析】 从前两个问题中应变可以判断出，式子表示的是时间问题，第一题表示一年有12个月，第二题表示一年有365天，第三和第四应该表示一年有52个星期和一年有8760个小时.

例 2. 计算：$\underbrace{111\cdots1}_{2007个}\underbrace{222\cdots2}_{2007个}\div\underbrace{333\cdots3}_{2007个}$.

【分析】 数目较大，直接计算肯定是不行的. 我们找它的规律：

$$12\div3=4$$
$$1122\div33=34$$
$$111222\div333=334$$
$$11112222\div3333=3334$$

从上面几个特例就可以发现规律，问题也就迎刃而解.

例 3. 计算：$2^{2008}-2^{2007}-2^{2006}-\cdots-2^2-2$.

【分析】 $2^{2008}-2^{2007}=2^{2007}\times 2-2^{2007}=2^{2007}$，$2^{2007}-2^{2006}=2^{2006}\times 2-2^{2006}=2^{2006}$，依次类推，很快就会得到答案.

*例 4. 计算：2007 个 1 $\left\{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{1-\cfrac{1}{\cdots\, 1-\cfrac{1}{1-\cfrac{2007}{2008}}}}}\right.$.

【分析】 一共有 2007 个"1"，也就是有 2007 条分数线，解题时只有寻找它的变化规律. 我们自下而上一步步计算：第一层，$1-\frac{2007}{2008}=\frac{1}{2008}$；第二层，$1-\cfrac{1}{1-\frac{2007}{2008}}=1-\cfrac{1}{\frac{1}{2008}}=1-2008=-2007$；第三层，$1-\frac{1}{-2007}=1+\frac{1}{2007}=\frac{2008}{2007}$；第四层，$1-\cfrac{1}{\frac{2008}{2007}}=1-\frac{2007}{2008}$，这又回到第一层的结果了，像这样循环下去，我们可以从中发现规律，很快得到结果. 本题在分析时，也可以利用一个字母代替 $\frac{2007}{2008}$，在推导上更简便一些.

例 5. 学校礼堂前有 10 级台阶，如果规定上楼梯时每次只能跨上一个台阶或者两个台阶，那么从地面到最上层共有多少种不同的走法？

【分析】 我们用 a_1、a_2、a_3、a_4、…分别表示楼梯有 1、2、3、4、…个台阶时，从地面到最上层各有不同走法的数目，显然：$a_1=1$、$a_2=2$、$a_3=3$、$a_4=5$.

如果楼梯有 5 个台阶，有两种情况：第一步跨 1 阶或 2 价. 若第 1 步跨 1 阶，上面有 4 阶有 a_4 种走法；若第一步跨 2 阶，上面还有 3 阶有 a_3 种走法，因此 $a_5=a_3+a_4=8$. 对 6 阶的情况与这类似，很快就可以发现规律. 这一组数实际是费波拉契数列的一部分.

例 6. 在一张纸上画 2008 条直线，最多有多少个交点？

【分析】 一下子要得到结果确实有点困难，我们可以从简单的入手，先看看 2 条直线、3 条直线、4 条直线等的情况，找出"直线的条数"与"交点的最多个数"之间的关系.

直线条数	交点的最多个数	关系式
2	1	1
3	3	1+2
4	6	1+2+3
…	…	…

同步练习

1. 计算：$\underbrace{11\cdots1}_{20\text{个}1}\times\underbrace{99\cdots9}_{20\text{个}9}$.

2. 计算：$\underbrace{99\cdots9}_{2008\text{个}9}\times\underbrace{99\cdots9}_{2007\text{个}9}6$.

3. 计算：$\underbrace{999\cdots9}_{100个9}\times\underbrace{999\cdots9}_{100个9}+\underbrace{1999\cdots9}_{100个9}$.

4. $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{1\times2+2\times3}+\dfrac{1}{1\times2+2\times3+3\times4}+\cdots\dfrac{1}{1\times2+2\times3+3\times4+\cdots+99\times100}$.

5. 有一天小明正在沉思，突然听到一种声音，于是他把这种声音记录下来. 过了一会儿，他又听到了这种声音，他又将这种声音记录下来，就这样他一直在耐心地等待着、记录着，最后他得到了一串有趣的数字：1、12、1、1、1、2、…，你知道这是什么吗？能不能按照这个规律写下去？试一试吧！

*5. 数的运算技巧(五)

内容与方法

在数的运算中，有很多是式的运算，或者利用代数式的运算来简化数的运算过程，因此学习数的运算技巧时一定要掌握一定的代数式的运算知识，掌握几个简单的乘法公式. 本节主要介绍一些代数式的计算以及重新定义的一些新的运算的解题方法.

例题讲解

例 1. 若 $a=2007^2+2007^2\times2008^2+2008^2$，请证明它是一个平方数，试求出它的值.

【分析】 数目较大且结构上有些特殊，直接计算很难发现它是谁的平方，也不容易计算这个数. 可以考虑用一个字母来代替题目中的具体的数，通过代数式的运算来发现规律. 比如：设 $x=2007$，则 $2008=x+1$：

$$\begin{aligned}a&=x^2+x^2(x+1)^2+(x+1)^2\\&=x^2-2x(x+1)+(x+1)^2+2x(x+1)+x^2(x+1)^2\\&=1+2x(x+1)+x^2(x+1)^2\\&=[x(x+1)+1]^2\end{aligned}$$

例 2. 已知三个正数 a、b、c 满足 $abc=1$，求$\dfrac{a}{ab+a+1}+\dfrac{b}{bc+b+1}+\dfrac{c}{ca+c+1}$的值.

【分析】 三个分式的运算，关键要化成相同分母的分式，我们可以发现如果$(ab+a+1)$乘以 c，则结果是 $1+c+ac$；把 $bc+b+1$ 乘以 a，则结果是 $ab+a+1$. 因此可以利用分式的性质对原式进行转化.

例 3. 已知 $ab\neq0$，如果不论 x 取什么值，代数式$\dfrac{ax+3}{bx+4}$(分母不为 0)都得到同样的值. 那么 a、b 之间应该满足什么条件？

【分析】 原代数式可以进行以下变形：

$$\frac{ax+3}{bx+4}=\frac{\frac{a}{b}\cdot bx+\frac{a}{b}\cdot4-\frac{a}{b}\cdot4+3}{bx+4}=\frac{\frac{a}{b}(bx+4)+\left(3-\frac{a}{b}\cdot4\right)}{bx+4}=\frac{a}{b}+\frac{3-\frac{a}{b}\cdot4}{bx+4}$$，显然：

当 $3-\dfrac{a}{b}\cdot4=0$ 时，不论 x 取什么值，代数式$\dfrac{ax+3}{bx+4}$都得到同样的值.

*例 4. 如果 $x^2-x+1=0$,求 $x^{2008}+x^{2007}+\frac{1}{x^{2008}}+\frac{1}{x^{2007}}$ 的值.

【分析】 根据乘法公式 $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$ 可以得到 $x^3=-1$,由 $x^2-x+1=0$ 可以推出:$x+\frac{1}{x}=1$,把 $x^{2008}+x^{2007}+\frac{1}{x_{2008}}+\frac{1}{x^{2007}}$ 进行变形可得:$x^{2007}(x+1)+\frac{1}{x^{2007}}\left(\frac{1}{x}+1\right)$ 就可以代入计算.

*例 5. 已知:$x+y+z=1, x^2+y^2+z^2=2, x^3+y^3+z^3=3$,试求出以下各式的值:

(1)xyz;

(2)$x^4+y^4+z^4$.

【分析】 (1)由于 $x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$,只要求出 $xy+yz+zx$ 的值就能很快计算出 xyz 的值,而又由 $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx$,很容易求出 $xy+yz+zx$ 的值.

(2)因为 $x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)$,而 $x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2=(xy+yz+xz)^2-2xyz(x+y+z)$,把所计算出的有关结果代入即可.

*例 6. 如果 $(3x+1)^5=ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f$,试求出 $a+c+e$ 的值.

【分析】 要把式子中的未知数去掉而只留下系数,只要把 $x=1, x=-1$ 分别代入上式,再把所得的两个等式进行加减运算即可.

例 7. 设 $x*y=x\cdot y+x+y, n!=1\times2\times3\times\cdots\times n$,试求出 $n!-1*2*3*\cdots*(n-1)$ 的值.

【分析】 “$*$”是重新定义的一种运算,而 $1*2*3*\cdots*(n-1)$ 的值和 $n!$ 的值有什么关系,也不是一下子就能看得出的,只有通过推理和归纳,发现其规律. 由 $x*y=x\cdot y+x+y$ 可得:

$x*y=xy+x+y=(x+1)(y+1)-1$,把具体的数代入:

$1*2=(1+1)(2+1)-1=3!-1$

$1*2*3=[(3!-1)+1](3+1)-1=4!-1$

$1*2*3*4=[(4!-1)+1](4+1)-1=5!-1$

……

$1*2*3*\cdots*(n-1)=n!-1$

同步练习

1. 若 a,b,c,d 是四个正数,且 $abcd=1$,

求 $\frac{a}{abc+ab+a+1}+\frac{b}{bcd+bc+b+1}+\frac{c}{cda+cd+c+1}+\frac{d}{dab+da+d+1}$ 的值.

2. “$*$”表示一种新运算符号,它的含义是 $x*y=\frac{1}{xy}+\frac{1}{(x+1)(y+a)}$. 已知 $2*1=\frac{1}{2\times1}+\frac{1}{(2+1)(1+a)}=\frac{2}{3}$,求 $2007*2008$ 的值.

3. 亿晨用电脑设计了 A、B、C、D 四种装置,将一个数输入一种装置后,会输出另一个数,装置 A:将输入的数加 5;装置 B:将输入的数除以 2;装置 C:将输入的数减去 4;装置 D:将输入的数乘以 3. 这些装置可以连接,如果装置 A 后面连接装置 B,就写成 $A*B$,输入 1 后,经过 $A*B$ 输出了 3.

(1)输入 9,经过 $A*B*C*D$ 输出几?

(2)经过 $B*D*A*C$ 输出的是 100,输入的是几?

*4. 已知 $\dfrac{x}{y+z}=\dfrac{y}{x+z}=\dfrac{z}{x+y}$,求 $\dfrac{x}{y+z}$ 的值.

*5. 设 $(2x-1)^5=a_5x^5+a_4x^4+a_3x^3+a_2x^2+a_1x+a_0$,求代数式:

(1)$a_0+a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$;

(2)$a_0-a_1+a_2-a_3+a_4-a_5$;

(3)$a_0+a_2+a_4$.

*6. 绝 对 值

内容与方法

绝对值是初中数学中的一个基本概念,在很多运算中常常会遇到含有绝对值符号的问题,在对含绝对值的问题进行化简时要遵循以下规律:

$$|a|=\begin{cases}a & (a>0)\\0 & (a=0)\\-a & (a<0)\end{cases}$$

绝对值的几何意义可以借助于数轴来认识,它与距离的概念密切相关,就是在数轴上表示一个数的点离开原点的距离.

例题讲解

例 1. 设有理数 a、b、c 在数轴上的对应点如图 1-1 所示,化简:$|b-a|+|a+c|+|c-b|$.

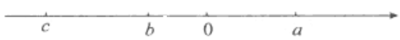

图 1-1

【分析】 化简此类问题,关键是确定绝对值里面的数或式的符号,从数轴可以看出:$b-a<0$,$a+c<0$,$c-b<0$.

例 2. 当 $2\leqslant x\leqslant 4$ 时,化简 $|x-2|+|x-4|$.

【分析】 利用 x 的取值范围 $2\leqslant x\leqslant 4$,根快就可以确定 $x-2$,$x-4$ 的符号,再用绝对值的性质进行化简.

例 3. 化简 $|x-2|+|x-4|$.

【分析】 本题和上一题的区别就在于有没有 x 的取值范围.本例中要去绝对值的符号,就要考虑代数式 $x-2$,$x-4$ 的符号,关键要找出 $x-2=0$,$x-4=0$ 的 x 的值(绝对值的零点).本题的绝对值的零点是 $x=2$,$x=4$.在数轴上,这两点把整个数轴分为三个部分,如图 1-2 所示.

这三部分对应的范围是:$x<2$,$2\leqslant x<4$,$x\geqslant 4$,在每一个范围内判断 $x-2$,$x-4$ 的符号,从而去掉绝对值符号.

图 1-2

例 4. 已知 $x<-3$，化简：$\left|3+\left|2-|1+x|\right|\right|$.

【分析】 这是一个含有多层绝对值符号的问题，可以根据已知条件，从里往外一层一层的去掉绝对值的符号.

例 5. 化简：$\left||3+\left|2-|1+x|\right|\right|$.

【分析】 本例和上例的区别就在没有确定 x 的取值范围，要和例 3 解法一样展开讨论. 从内到外，找出每一个绝对值的零点. $1+x=0$，则 $x=-1$；$2-|1+x|=0$，则 $|1+x|=2$，$1+x=\pm2$，则 $x=1$ 或者 $x=-3$. 而无论 x 取何值，$3+\left|2-|1+x|\right|$ 总是非负数. 因此，本例中的绝对值的零点有三个：$x=-3$，$x=-1$，$x=1$，把数轴分为四个部分，对每一部分进行化简就行了.

例 6. 求 $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-2005|+|x-2006|+|x-2007|$ 的最小值.

【分析】 本题如果用分段讨论的方法去掉绝对值的符号，再去寻求答案几乎是不可能的，因此要利用绝对值的几何意义来解题. 这是在数轴上表示 x 的点与表示 1、2、3、…、2005、2006、2007 的点的距离之和. 显然，当 $x=1004$ 时，距离之和最小. 在解本题时，可以从易到难，从简单问题入手，寻找规律. 如：

当 $1\leqslant x\leqslant2$ 时，$|x-1|+|x-2|$ 取最小值；

当 $x=2$ 时，$|x-1|+|x-2|+|x-3|$ 取最小值；

当 $2\leqslant x\leqslant3$ 时，$|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|$ 取最小值；

当 $x=3$ 时，$|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x-4|+|x-5|$ 取最小值；

……

把绝对值按照里面的减数从小到大排列，若有奇数个绝对值符号，取最中间的那个数有最小值；若有偶数个绝对值符号，则取最中间两数之间的任意数（含这两个数）有最小值.

同步练习

1. 若 $abc\neq0$，则 $\frac{|a|}{a}+\frac{|b|}{b}+\frac{|c|}{c}$ 的所有可能的值是什么？

2. 设 $a<0$，$x\leqslant\frac{a}{|a|}$，化简 $|x-1|-|x-2|$.

3. 设 $a<b<c<d$，求 $|x-a|+|x-b|+|x-c|+|x-d|$ 的最小值.

4. 已知：$y=|2x+6|+|x-1|-4|x+1|$，求 y 的最大值.

5. 若 a、b、c 是整数，且 $|a-b|^{20}+|c-d|^{20}=1$，试计算 $|c-a|+|a-b|+|b-c|$ 的值.

6. 若 $2x+|4-5x|+|1-3x|+4$ 的值是一个常数，求 x 该满足的条件以及此常数的值.

7. 已知：关于 x 的方程 $\left||x-2|-1\right|=a$ 有三个整数解，求 a 的值.