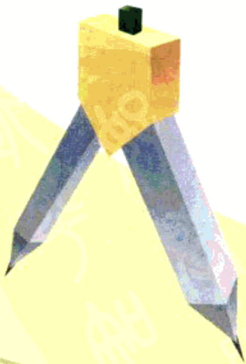
校本培训教材

生活中的数学

初中

第4卷



策划：王建新

主编：许建华　马晓红

山西出版集团　书海出版社

校本培训教材

生活中的数学

初中

第4卷

策划：王建新

山西出版集团　书海出版社

书之源图书发行有限公司发行

图书在版编目(CIP)数据

生活中的数学. 初中. 第4卷/王建新编.—太原：书海出版社，2008.1

ISBN 978-7-80550-782-8

Ⅰ.生… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课–初中–习题 Ⅳ.G634.605

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第016872号

生活中的数学·初中·第4卷

编　　者:王建新
责任编辑:贺　权
助理编辑:徐晓宇
装帧设计:书之源美编室

出版者:山西出版集团·书海出版社
地　址:太原市建设南路21号
邮　编:030012
电　话:0351-4922220(发行中心)
0351-4922235(综合办)
E-mail: fxzx@sxskcb.com
web@sxskcb.com
Renmshb@sxskcb.com
网　址:www.sxskcb.com

经 销 者:山西出版集团·书海出版社
承 印 者:太原市达益印刷厂

开　本:890mm×1240mm　1/32
印　张:30
字　数:600千字
印　数:1-3000(套)
版　次:2008年3月 第1版
印　次:2008年3月 第1次印刷
书　号:ISBN 978-7-80550-782-8
定　价:76.80元(全套6卷)

前　言

儿时的我
还没来得及认字
很早的我
就喜欢识数看图
爸爸说数学是天上的星座
妈妈讲数字是掌上的指头

周围的世界原来是个迷宫
他们向我点头
向我招手
金字塔上传问
天有多高
长城脚下藏谜
地有多厚

十万个为什么
困我难受
导师教我
怎样争得自由
你想得到所向披靡的利器
观察的后面
数学思维开头

大风车让我看到了圆的半径
温度计让我明白了何为数轴
嫦娥奔月变轨妙在切线
鸟巢造型
创意巧同算筹

有限无限在逻辑链上传递
抽象形象在数形台上对流
生活探底原来是一列数据
实践敞开原来是一卷画图

拨动星辰
谁说我胳膊太短
触摸粒子
谁嫌我指纹太粗
数学——你这科技大门的锁钥
数学——你这信息富豪的按钮

——万尔遐

“生活中的数学”

用创新的数学思维方式
解决生活中的实际问题

结　构　特　点

课题学习　◆ 联系生活，点出课题。

典型例题讲解　◆ 典例剖析，细致入微。

解题模型　◆ 开拓思维，总结方法。

挑战自我　◆ 课题训练，学以致用。

目 录

MULU

（第4卷）

第一章 数与式

第1讲 分式变形与求值的技巧 …………………… 1

第2讲 行船问题的推广应用 …………………… 13

第3讲 反比例的性质及其应用 ………………… 35

第二章 空间与图形

第4讲 四边形中的几何变换 …………………… 40

第5讲 折叠型问题 ……………………………… 52

第 6 讲　勾股定理的证明与应用 ……………………… 68

第 7 讲　正方形的求解问题 ……………………………… 81

第三章　统计与概率

第 8 讲　观察、枚举、归纳与猜想 ……………………… 90

第四章　实践与综合应用

第 9 讲　逻辑原理 …………………………………………… 113

第 10 讲　容斥原理 …………………………………………… 129

参考答案 …………………………………………………………… 139

第一章　数与式

第1讲　分式变形与求值的技巧

课题学习

一般地,用 A、B 表示两个整式,则式子$\frac{A}{B}$就叫做分式,注意 B 有两点要求:①B 中含有字母,②$B\neq0$.分式是新课程中"数与式"的重要内容之一,常常因为其复杂的结构而使人望而生畏,成为学习中的难点.要解决有关分式的问题,就必须准确掌握分式的概念、分式的基本性质、分式的四则运算等知识,加以灵活地运用各种方法和技巧才能顺利地解决有关分式的问题.

典型例题讲解

例1　已知 a、b 为整数,且满足$\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}-\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)\times\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\times\frac{1}{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{2}{3}$,求 $a+b$ 的值.

【点拨】先把已知等式的左边化简,然后考虑求出 a、b 的值.

【解答】左边$=\frac{ab}{ab}\times\left(\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}-\frac{\frac{1}{b}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\right)\times\frac{b-a}{ab}\times\frac{1}{\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}}$

$$=\left(\frac{b}{b-a}-\frac{a}{b+a}\right)\times\frac{b-a}{ab}\times\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{b^2+a^2}{b^2-a^2}\times\frac{b-a}{ab}\times\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{ab}{a+b}$$

所以$\frac{ab}{a+b}=\frac{2}{3}$

所以$(3b-2)(3a-2)=4$

而a、b为整数且不相等，故$3b-2$、$3a-2$只可能取值1、4或-1、-4.不妨设$b<a$，则

$\begin{cases}3b-2=1\\3a-2=4\end{cases}$ ①或$\begin{cases}3b-2=-4\\3a-2=-1\end{cases}$ ②

容易得出②无整数解，①的解为$b=1,a=2$.

所以$a+b=2+1=3$.

例2　已知a、b、c为非零实数，且$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}$，求$\frac{(a+b)(b+c)(c+a)}{abc}$的值.

【点拨】应设法由已知关系式找出a、b、c之间的关系，然后再求值.

【解答】设$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=k$，则$a+b=(k+1)c$，$b+c=(k+1)a$，$c+a=(k+1)b$.

三式相加得：

$2(a+b+c)=(k+1)(a+b+c)$

所以$k=1$或$a+b+c=0$.

当$k=1$时，则$a+b=2c$，$b+c=2a$，$c+a=2b$，

原式$=\frac{2a\cdot 2b\cdot 2c}{abc}=8$.

当$a+b+c=0$时，则$a+b=-c$，$b+c=-a$，$c+a=-b$，

原式$=\frac{(-c)(-a)(-b)}{abc}=-1$.

【评注】当已知条件以连比的形式出现时，可引进一个参数来表示这个连比，从而将条件中的分式转化为整式.

例3　将分式$\frac{3x+3}{x^2+x-2}$化为部分分式.

【点拨】由于 $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$，故可利用待定系数法，为使两个部分分式之和的分式的分子为 $3x+3$，则其中每个部分分式的分子应为常数.

【解答】因为 $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$，于是可设

$$\frac{3x+3}{x^2+x-2}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-1}$$

得 $3x+3=A(x-1)+B(x+2)$

即 $3x+3=(A+B)x+(-A+2B)$

比较系数，得

$$\begin{cases}A+B=3\\-A+2B=3\end{cases}$$

解得 $A=1,B=2$，所以

原式$=\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{2}{x-1}$.

【评注】将一个真分式表示成若干个真分式的代数和的恒等变形叫做将分式化为部分分式，待定系数法是化部分分式的常用方法.这种变形在有关分式计算等方面运用较多.

例4　化简 $\dfrac{1}{(a+1)(a+2)}+\dfrac{1}{(a+2)(a+3)}+\cdots+\dfrac{1}{(a+1999)(a+2000)}$.

【点拨】先研究通项 $\dfrac{1}{(a+k)(a+k+1)}$ 的分解变形情况.

【解答】设 $\dfrac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\dfrac{A}{a+k}+\dfrac{B}{a+k+1}$ $(k=1,2\cdots1999)$，

则 $1=A(a+k+1)+B(a+k)$

即 $1=(A+B)(a+k)+A$

比较系数，得

$$\begin{cases}A+B=0\\A=1\end{cases}$$

解得 $A=1,B=-1$，所以

$$\frac{1}{(a+k)(a+k+1)}=\frac{1}{a+k}-\frac{1}{a+k+1}$$

原式$=\left(\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2}\right)+\left(\frac{1}{a+2}-\frac{1}{a+3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a+1999}-\frac{1}{a+2000}\right)$

$=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a+2000}$

$=\frac{1999}{(a+1)(a+2000)}$.

例5 已知$\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}$,求$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值.

【解答】因为$\frac{x}{x^2+x+1}=\frac{1}{3}$

所以$\frac{x^2+x+1}{x}=3$

所以$x+\frac{1}{x}=2$

所以$x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2=2^2-2=2$

所以$\frac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+\frac{1}{x^2}+1=2+1=3$

所以$\frac{x^2}{x^4+x^2+1}=\frac{1}{3}$

【评注】由$x+\frac{1}{x}$的数值求出$x^2+\frac{1}{x^2}$,$x^3+\frac{1}{x^3}$,$x-\frac{1}{x}$的方法在运算中经常用到,希望同学们能熟练地掌握它们之间的关系.

例6 求证:无论a取什么整数,分式$\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}$均不可约.

【点拨】可先证明分式$\frac{a^4+7a^2+11}{a^2+3}$不可约.

【证明】$\frac{a^4+7a^2+11}{a^2+3}=\frac{a^4+7a^2+12}{a^2+3}-\frac{1}{a^2+3}$

$=\frac{(a^2+3)(a^2+4)}{a^2+3}-\frac{1}{a^2+3}$

$=a^2+4-\frac{1}{a^2+3}$

因为无论 a 取什么整数，有 $a^2+3>1$，所以 $\frac{1}{a^2+3}$ 不可约.

所以 $\frac{a^4+7a^2+11}{a^2+3}$ 是不可约的.

所以 $\frac{a^2+3}{a^4+7a^2+11}$ 是不可约的.

【评注】对于某些非零代数式来说，如果从取倒数的角度来分析，有可能揭示出一些内在的特征，从而找到解题的突破口.

例 7　求能使 n^3+100 被 $n+10$ 整除的正整数 n 的最大值.

【解答】$\frac{n^3+100}{n+10}=\frac{n^3+1000-900}{n+10}$

$$=\frac{n^3+1000}{n+10}-\frac{900}{n+10}$$

$$=n^2-10n+100-\frac{900}{n+10}.$$

从上式可看出要能被 $n+10$ 整除，则只需 $n+10$ 整除 900，这时 n 的最大值是 890.

所以能使 n^3+100 被 $n+10$ 整除的正整数 n 的最大值是 890.

【评注】解决整除性问题的一个常用方法是把整式部分分离出来，从而只须考虑后面的分式部分的整除性，这样有利于简化问题.

例 8　已知 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}$，求 $\frac{x+2y-z}{2x-y+z}$ 的值.

【解答】设 $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}=k$，

则 $x=2k$，$y=3k$，$z=4k$.

所以原式 $=\frac{2k+2\times3k-4k}{2\times2k-3k+4k}=\frac{4k}{5k}=\frac{4}{5}$.

【评注】已知连比，常设比值 k 为参数，这种解题方法叫参数法.

例 9　已知 $a^2+ab-6b^2=0$，求 $\frac{a-b}{a+b}$ 的值.

【解答】由 $a^2+ab-6b^2=0$ 得 $(a+3b)(a-2b)=0$，

$\therefore a+3b=0$ 或 $a-2b=0$,

解得 $a=-3b$ 或 $a=2b$.

当 $a=-3b$ 时,原式$=\dfrac{-3b-b}{-3b+b}=2$;

当 $a=2b$ 时,原式$=\dfrac{2b-b}{2b+b}=\dfrac{1}{3}$.

例 10　已知 $a+b+c=0$,求 $c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)+a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)$的值.

【解答】原式 $=c\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)-1+b\left(\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}\right)-1+a\left(\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}\right)-1$

$=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}\right)(c+b+a)-3$

因为 $a+b+c=0$,

所以 原式$=-3$.

例 11　已知 $x+\dfrac{1}{x}=3$,求$\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}$的值.

【点拨】因为 $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}=x^2+1+\dfrac{1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-1$,

所以可先求分式的值的倒数,再求分式的值.

【解答】因为$\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2}=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-1$

$=3^2-1=8$,

所以$\dfrac{x^2}{x^4+x^2+1}=\dfrac{1}{8}$.

例 12　已知$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=3$,则分式$\dfrac{2x+3xy-2y}{x-2xy-y}$的值为 ________.

【解答】

解法 1:因为$\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=3$,

所以 $y-x=3xy \Rightarrow x-y=-3xy$.

因为原式$=\dfrac{2(x-y)+3xy}{(x-y)-2xy}$

$=\frac{2(-3xy)+3xy}{-3xy-2xy}=\frac{3}{5}$.

解法 2:将分子、分母同除以 $xy(xy\neq0)$.

所以原式$=\frac{\frac{2}{y}+3-\frac{2}{x}}{\frac{1}{y}-2-\frac{1}{x}}$

$$=\frac{3-2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}{-2-\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}$$

$$=\frac{3-2\times3}{-2-3}=\frac{3}{5}$$

解法 3:取 $x=\frac{1}{2}$, $y=-1$,

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=2+1=3.$$

所以原式$=\frac{2\times\frac{1}{2}+3\times\frac{1}{2}\times(-1)-2\times(-1)}{\frac{1}{2}-2\times\frac{1}{2}\times(-1)-(-1)}$

$$=\frac{\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}=\frac{3}{5}$$

【评注】特殊值法是解填空题或选择题常用的解题方法或技巧.取特殊值要注意满足条件,其原则是要便于计算.

例 13 已知 $a^2+2a-1=0$,求分式$\left(\frac{a-2}{a^2+2a}-\frac{a-1}{a^2+4a+4}\right)\div\frac{a-4}{a+2}$的值.

【解答】原式$=\left[\frac{a-2}{a(a+2)}-\frac{a-1}{(a+2)^2}\right]\div\frac{a-4}{a+2}$

$$=\frac{(a-2)(a+2)-a(a-1)}{a(a+2)^2}\cdot\frac{a+2}{a-4}$$

$$=\frac{a-4}{a(a+2)^2}\cdot\frac{a+2}{a-4}$$

$$=\frac{1}{a(a+2)}=\frac{1}{a^2+2a}$$

因为 $a^2+2a-1=0$

所以 $a^2+2a=1$

所以原式=1.

【评注】本例是将条件式化为“$a^2+2a=1$”代入化简后的求值式再求值，这种代入的技巧叫做整体代入.

解题模型

分式的运算必须准确掌握分式基本知识，除此之外，还要能够灵活运用各种技巧——整体代入、特殊值法、化为部分分式、设参数等，具体情况具体分析，只要这样就能顺利地解决有关分式的问题.

挑战自我

1. 计算 $\frac{1}{a^2-3a+2}+\frac{1}{a^2-5a+6}+\frac{1}{a^2-7a+12}=$____________.

2. 实数 a、b 满足 $ab=1$，记 $M=\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}$，$N=\frac{a}{1+a}+\frac{b}{1+b}$，则 M、N 的大小关系是什么?

3. 若$\frac{x}{a-b}=\frac{y}{b-c}=\frac{z}{c-a}$,求 $x+y+z$.

4. 将分式$\frac{11x^2-23x}{2x^3-x^2-18x+9}$化为部分分式.

5. 已知 a、b、c 为实数,且$\frac{ab}{a+b}=\frac{1}{3}$,$\frac{bc}{b+c}=\frac{1}{4}$,$\frac{ca}{c+a}=\frac{1}{5}$,求$\frac{abc}{ab+bc+ca}$的值。

6. 设 $y=\frac{x^2+x+2}{x^2+x+1}$，当 x 取任意实数时，求 y 的取值范围.

7. 若在关于 x 的恒等式 $\frac{Mx+N}{x^2+x-2}=\frac{2}{x+a}-\frac{c}{x+b}$ 中，$\frac{Mx+N}{x^2+x-2}$ 为最简分式，且 $a>b$，$a+b=c$，求 N.

8. 已知四个互不相等的正数 x、y、m、n 中，x 最小，n 最大，且 $\frac{x}{y}=\frac{m}{n}$，试比较 $x+n$ 与 $y+m$ 的大小，并证明你的结论.