普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套用书

傅里叶光学

概念·题解

吕乃光　周哲海　编著

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套用书

傅里叶光学

概念·题解

吕乃光　周哲海　编著

机械工业出版社

本书提纲挈领地概述了傅里叶光学即信息光学的基本概念和公式，并对吕乃光编著的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《傅里叶光学　第2版》（机械工业出版社出版）各章习题（共124题）进行了详尽的分析和解答。全书内容包括：傅里叶分析、二维线性系统、标量衍射理论、透镜的位相调制和傅里叶变换性质、光学成像系统的频率特性、部分相干理论、光学全息、光学信息处理、激光散斑及其应用。

全书基本概念和物理图像清晰，注重基本物理思想和分析方法的讨论，有助于读者深入理解傅里叶光学理论，并应用理论去解决实际问题。因而，对于教学和研究两个方面，本书都是一本很有益的参考书。

本书可作为高等学校“光信息科学与技术”、“光电子技术”、“光电信息工程”、“应用物理”、“测控技术与仪器”、“光学工程”、“光学”等专业本科生和研究生学习、考研参考书，也可供从事光信息技术领域的科技人员参考。

图书在版编目（CIP）数据

傅里叶光学概念·题解/吕乃光，周哲海编著．—北京：机械工业出版社，2008.8

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套用书

ISBN 978-7-111-24982-5

Ⅰ．傅…　Ⅱ．①吕…②周…　Ⅲ．傅里叶光学－高等学校－教学参考资料　Ⅳ．O438.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第128930号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）

策划编辑：闫晓宇　责任编辑：卢若薇　责任校对：李　婷

封面设计：张　静　责任印制：邓　博

北京诚信伟业印刷有限公司印刷

2009年1月第1版第1次印刷

169mm×239mm·14.75印张·285千字

标准书号：ISBN 978-7-111-24982-5

定价：28.00元

前　言

傅里叶光学是信息光学的理论基础。它采用傅里叶分析和线性系统理论分析研究光学问题，包括光的传播、衍射、成像和变换等。光学系统本质上是传输和采集信息的系统，傅里叶光学采用通信和信息理论中的方法，在二维空间域及其空间频率域讨论光学系统特性，即空间脉冲响应和传递函数。

随着光信息技术的发展，“傅里叶光学”或“信息光学”课已成为光学工程、光信息科学与技术、光电信息工程等相关学科、专业的本科生或研究生的专业基础课。本书是该课程的教学参考书。

吕乃光编著的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《傅里叶光学　第2版》（机械工业出版社出版）一书中，包含124道习题，其中一部分是作者根据多年教学和科研实践提炼编写的，另有许多习题采集自国外优秀的光学教材。综合考察这些习题，具有鲜明的特色：与理论联系密切，常常是理论的必要补充和延伸；或者源于信息光学的实际问题，要求运用理论给出分析解答。正确地解答这些问题，有助于读者逐步建立起清晰的物理图像，深入理解傅里叶光学的理论，同时掌握运用理论解决信息光学实际问题的分析方法。这正是编写本书的目的。

全书共九章。第1、2章是傅里叶分析和线性系统理论，为在光学中借鉴通信理论中常用的分析方法建立了必要的数学基础。第3、4、5章习题运用空间域和频率域方法分析光波携带信息在自由空间或经过光学系统的传播问题，以及透镜的傅里叶变换性质。第6章讲解了部分相干理论的习题，目的是使读者了解光场相干性质对干涉、衍射、成像的影响，学会时间相干度、空间相干度的计算方法及实际应用。第7、8、9章习题是关于傅里叶光学的应用，即光学全息、光学信息处理、激光散斑技术。

在各章的第一部分，扼要阐述了有关基本概念和重要公式，作为解题的理论基础，便于参考。为方便读者，本书中采用的相关术语、数学符号和公式，尽可能与吕乃光编著的教材《傅里叶光学　第2版》相一致。

回忆起1985年《傅里叶光学（基本概念和习题）》（吕乃光、陈家璧、毛信强编著，科学出版社）的出版，该书曾作为学习傅里叶光学的重要参考书，受到学界欢迎。虽然过去了二十多年，那本小书的影响仍在延续，时至今日一书难觅。期望本书的出版能够满足读者的需要。

本书适用于光信息科学与技术、光电信息工程、光电子技术、测控技术与

仪器、光学、光学工程等专业高年级本科生和研究生作为学习、考研参考书。也可供从事光信息技术的科技人员参考。

感谢北京信息科技大学学科建设基金的资助。

编　者

2008 年 3 月

目　　录

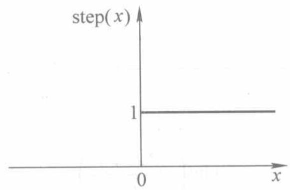
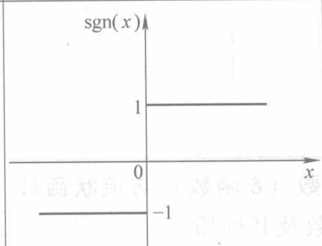
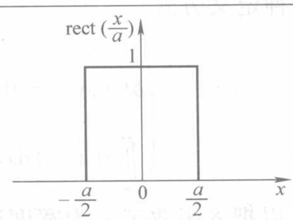
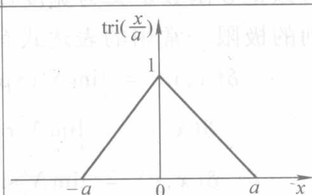
第 1 章　傅里叶分析

Ⅰ. 基本概念与公式

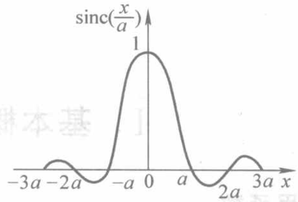
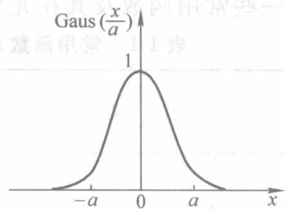
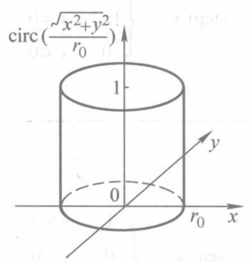
1. 一些常用函数

表 1-1 给出一些常用函数及其在光学中的应用。

表 1-1　常用函数及其在光学中的应用

常用函数 \ 说明	定　义	图形表示	应　用
阶跃函数	$\mathrm{step}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 1/2 & x=0\\ 0 & x<0\end{cases}$		直边（或刀口）的透过率
符号函数	$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x=0\\ -1 & x<0\end{cases}$		孔径的一半嵌有 π 位相板的复振幅透过率
矩形函数	$\mathrm{rect}\left(\frac{x}{a}\right)=\begin{cases}1 & \lvert x\rvert\leqslant a/2\\ 0 & 其他\end{cases}$		狭缝或矩孔的透过率
三角形函数	$\mathrm{tri}\left(\frac{x}{a}\right)=\begin{cases}1-\frac{\lvert x\rvert}{a} & \lvert x\rvert\leqslant a\\ 0 & 其他\end{cases}$		光瞳为矩形的非相干成像系统的光学传递函数

（续）

<table>
<tr><th>说明
常用函数</th><th>定　义</th><th>图形表示</th><th>应　用</th></tr>
<tr><td>sinc 函数</td><td>$\mathrm{sinc}\left(\frac{x}{a}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)}{\frac{\pi x}{a}}$</td><td></td><td>狭缝或矩孔的夫琅和费衍射图样</td></tr>
<tr><td>高斯函数</td><td>$\mathrm{Gaus}\left(\frac{x}{a}\right)=\exp\left[-\pi\left(\frac{x}{a}\right)^2\right]$</td><td></td><td>激光器发出的高斯光束</td></tr>
<tr><td>圆域函数</td><td>$\mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{r_0}\right)=\begin{cases}1 & \sqrt{x^2+y^2}\leqslant r_0\\0 & \text{其他}\end{cases}$</td><td></td><td>圆孔的透过率</td></tr>
</table>

2. 脉冲函数（δ 函数）与梳状函数

（1） δ 函数及其性质

δ 函数有三种定义方式

定义一

$$\begin{cases}\delta(x,y)=0 \quad x\neq 0,y\neq 0\\ \iint\limits_{-\infty}^{+\infty}\delta(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1\end{cases} \tag{1-1}$$

定义二　可以把 δ 函数定义为宽度逐渐减小、高度逐步增大但体积保持为 1 的一个脉冲序列的极限。常用的表达式有

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}N^2\exp[-N^2\pi(x^2+y^2)] \tag{1-2}$$

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}N^2\mathrm{rect}(Nx)\,\mathrm{rect}(Ny) \tag{1-3}$$

$$\delta(x,y)=\lim_{N\to\infty}N^2\mathrm{sinc}(Nx)\,\mathrm{sinc}(Ny) \tag{1-4}$$

定义三 δ 函数是一个广义函数，它赋予检验函数 $\phi(x, y)$ 以一个数 $\phi(0, 0)$，即有

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x,y)\phi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \phi(0,0) \tag{1-5}$$

要求检验函数是连续的、在一个有限区间外为零，并具有所有阶的连续导数。

常用 δ 函数代表点质量、点电荷、点脉冲、点光源或者其他在某一坐标系中高度集中的物理量。

δ 函数的常用性质

筛选性质
$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0, y - y_0)\phi(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \phi(x_0,y_0) \tag{1-6}$$

比例变换性质
$$\delta(ax,by) = \left|\frac{1}{ab}\right|\delta(x,y) \tag{1-7}$$

与普通函数的乘积

$$f(x,y)\delta(x - x_0, y - y_0) = f(x_0,y_0)\delta(x - x_0, y - y_0) \tag{1-8}$$

其中假定 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 点连续。

(2) 梳状函数

沿 x 轴分布，间隔都等于 1 的无穷多脉冲函数，可用梳状函数表示为

$$\mathrm{comb}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n) \tag{1-9}$$

同理，间隔为 τ 的等间距脉冲序列表示为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - n\tau) = \frac{1}{\tau}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{\tau}\right) \tag{1-10}$$

在 x、y 方向间隔分别等于 a 和 b ($a>0$, $b>0$) 的二维脉冲阵列为

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(x - na, y - mb) = \frac{1}{ab}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)\mathrm{comb}\left(\frac{y}{b}\right) \tag{1-11}$$

光学上常用梳状函数表示点光源的阵列或小孔阵列的透过率。

梳状函数与普通函数的乘积是

$$f(x)\frac{1}{\tau}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{\tau}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n\tau)\delta(x - n\tau) \tag{1-12}$$

可以利用梳状函数对其他普通函数作等间距抽样。

3. 卷积和相关

(1) 卷积

两个复值函数 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 的卷积定义为

$$f(x, y) * h(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)h(x - \xi, y - \eta)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1-13}$$

卷积计算过程包括折叠、位移、相乘、积分四步。卷积运算满足交换律、分配律和结合律。

任意函数 $f(x, y)$ 与 δ 函数的卷积

$$f(x,y) * \delta(x,y) = f(x,y) \tag{1-14}$$

$$f(x,y) * \delta(x-x_0,y-y_0) = f(x-x_0,y-y_0)\text{（平移不变性）} \tag{1-15}$$

$f(x, y)$ 与多个脉冲函数卷积，可在每个脉冲所在位置产生 $f(x, y)$ 的波形。

（2）相关

两个复值函数 $f(x, y)$ 和 $h(x, y)$ 的互相关定义为

$$r_{fg}(x,y) = f(x,y) \bigstar g(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)g^*(\xi-x,\eta-y)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1-16}$$

式中，g^* 是函数 g 的复共轭函数。互相关计算过程包括位移、相乘、积分三步。互相关运算不满足交换律，有 $r_{fg}(x, y) = r_{gf}^*(-x, -y)$。

同一函数的相关积分称为自相关，其定义为

$$r_{ff}(x,y) = f(x,y) \bigstar f(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} f(\xi,\eta)f^*(\xi-x,\eta-y)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \tag{1-17}$$

对于复函数，自相关函数是厄米的，即

$$r_{ff}(x,y) = r_{ff}^*(-x,-y) \tag{1-18}$$

对于实函数，自相关函数是实的偶函数，即

$$r_{ff}(x,y) = r_{ff}(-x,-y) \tag{1-19}$$

自相关的模在原点最大，即

$$|r_{ff}(x,y)| \leqslant r_{ff}(0,0) \tag{1-20}$$

4. 傅里叶级数

一个周期性函数 $g(x)$，周期为 $\tau = \dfrac{1}{f}$，它满足狄里赫利条件（函数在一个周期内只有有限个极值点和第一类不连续点），则 $g(x)$ 可以展开为三角傅里叶级数和指数傅里叶级数。

三角傅里叶级数

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(2\pi nfx) + b_n\sin(2\pi nfx)] \tag{1-21}$$

式中，$a_0 = \dfrac{2}{\tau}\displaystyle\int_0^{\tau} g(x)\,\mathrm{d}x$；$a_n = \dfrac{2}{\tau}\displaystyle\int_0^{\tau} g(x)\cos(2\pi nfx)\,\mathrm{d}x$；

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_0^{\tau} g(x)\sin(2\pi nfx)\,\mathrm{d}x\ (n=1,2,\cdots)$$

指数傅里叶级数

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\exp(\mathrm{j}2\pi nfx) \tag{1-22}$$

其中，　　$c_n = \frac{1}{\tau}\int_0^{\tau} g(x)\exp(-\mathrm{j}2\pi nfx)\,\mathrm{d}x \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

两种表达形式之间系数的关系为

$$c_0 = \frac{a_0}{2},\ c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{j}b_n),\ c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{j}b_n)\ (n = 1,2,3,\cdots) \tag{1-23}$$

傅里叶系数 c_n 是频率 nf 的函数，称为频谱函数。一般 c_n 是复函数，它包括振幅频谱和相位频谱。由于周期性函数只包含 0，$\pm f$，$\pm 2f$，$\pm 3f$，…等频率分量，频率取值是离散的，所以只有离散谱。

5. 傅里叶变换

对非周期函数也可以作傅里叶分析，只是其频率取值不再是离散的，而是连续的。

（1）二维傅里叶变换

非周期函数 $g(x, y)$ 在整个无限 xy 平面上满足狄里赫利条件，而且 $\iint_{-\infty}^{\infty} |g(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在，则有

$$g(x,y) = \iint_{-\infty}^{\infty} G(f_x,f_y)\exp[\mathrm{j}2\pi(f_x x + f_y y)]\,\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y = \mathscr{F}^{-1}\{G(f_x,f_y)\} \tag{1-24}$$

其中

$$G(f_x,f_y) = \iint_{-\infty}^{\infty} g(x,y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_x x + f_y y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathscr{F}\{g(x,y)\} \tag{1-25}$$

式中，$G(f_x,f_y)$ 是函数 $g(x,y)$ 的傅里叶变换（或称为傅里叶频谱），$G(f_x,f_y)$ 的作用类似于傅里叶系数 c_n，表示各频率成分的权重因子，描述了各复指数分量的相对幅值和相移；$g(x,y)$ 是频谱函数 $G(f_x,f_y)$ 的傅里叶逆变换。

（2）广义傅里叶变换

若函数可以定义为某个可变换函数所组成的序列的极限，对序列中每一个函数进行变换，组成一个新的变换式序列，这个新序列的极限就是原来函数的广义傅里叶变换。利用广义傅里叶变换的规则，我们可以确定诸如 δ 函数、正/余弦函数、阶跃函数等不满足狄里赫利条件的函数的傅里叶变换。

（3）虚、实、奇、偶函数的傅里叶变换性质

表 1-2 给出虚、实、奇、偶函数的傅里叶变换性质。

表 1-2　虚、实、奇、偶函数的傅里叶变换性质

空域 $g(x,y)$	频域 $G(f_x,f_y)$	空域 $g(x,y)$	频域 $G(f_x,f_y)$
实函数	厄米型函数	虚值偶函数	虚值偶函数
虚函数	反厄米型函数①	虚值奇函数	实值奇函数
实值偶函数	实值偶函数	偶函数	偶函数
实值奇函数	虚值奇函数	奇函数	奇函数

① 若实部为奇函数，虚部为偶函数，则函数是反厄米型函数。

(4) 傅里叶变换定理

设函数 $g(x,y)$ 和 $h(x,y)$ 的傅里叶变换分别是 $G(f_x,f_y)$ 和 $H(f_x,f_y)$，则有线性定理

$$\mathscr{F}\{ag(x,y)+bh(x,y)\} = aG(f_x,f_y)+bH(f_x,f_y) \tag{1-26}$$

相似性定理

$$\mathscr{F}\{g(ax,by)\} = \frac{1}{|ab|}G\left(\frac{f_x}{a},\frac{f_y}{b}\right) \tag{1-27}$$

位移定理

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{g(x-a,y-b)\} &= G(f_x,f_y)\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_x a+f_y b)]\\ \mathscr{F}\{g(x,y)\exp[\mathrm{j}2\pi(f_a x+f_b y)]\} &= G(f_x-f_a,f_y-f_b)\end{aligned} \tag{1-28}$$

帕色伐(Parseval)定理

$$\iint_{-\infty}^{\infty}|g(x,y)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{-\infty}^{\infty}|G(f_x,f_y)|^2\mathrm{d}f_x\mathrm{d}f_y \tag{1-29}$$

卷积定理

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{g(x,y)*h(x,y)\} &= G(f_x,f_y)H(f_x,f_y)\\ \mathscr{F}\{g(x,y)h(x,y)\} &= G(f_x,f_y)*H(f_x,f_y)\end{aligned} \tag{1-30}$$

自相关定理

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\{g(x,y)\bigstar g(x,y)\} &= |G(f_x,f_y)|^2\\ \mathscr{F}\{|g(x,y)|^2\} &= G(f_x,f_y)\bigstar G(f_x,f_y)\end{aligned} \tag{1-31}$$

傅里叶积分定理

$$\mathscr{F}\mathscr{F}^{-1}\{g(x,y)\} = \mathscr{F}^{-1}\mathscr{F}\{g(x,y)\} = g(x,y) \tag{1-32}$$

(5) 可分离变量函数的傅里叶变换

若函数 $g(x,y)$ 在直角坐标系内是可分离变量的函数，即 $g(x,y) = g_x(x)\cdot g_y(y)$，则它的二维傅里叶变换式等于两个一维傅里叶变换式的乘积

$$\mathscr{F}\{g(x,y)\} = \mathscr{F}\{g_x(x)\}\mathscr{F}\{g_y(y)\} \tag{1-33}$$

(6) 傅里叶 - 贝塞尔变换

极坐标系中的函数 $g(r,\theta)$，当它只是半径 r 的函数时，即 $g(r,\theta) = g_R(r)$ 时，则称它为圆对称的。圆对称函数的傅里叶变换式为

$$G(\rho) = 2\pi\int_0^{\infty} rg_R(r)J_0(2\pi r\rho)\mathrm{d}r = \mathscr{B}\{g_R(r)\} \tag{1-34}$$

式中，$\rho = \sqrt{f_x^{\,2}+f_y^{\,2}}$，是用极坐标表示的频率坐标。

显然，$G(\rho)$ 也是圆对称函数，称之为函数 $g_R(r)$ 的傅里叶-贝塞尔变换，记为 $\mathscr{B}\{g_R(r)\}$，而 $G(\rho)$ 的逆变换记为 $\mathscr{B}^{-1}\{G(\rho)\}$，可计算为

$$g_R(r) = 2\pi\int_0^{\infty}\rho G(\rho)J_0(2\pi r\rho)\mathrm{d}\rho = \mathscr{B}^{-1}\{G(\rho)\} \tag{1-35}$$

(7) 常用傅里叶变换对

表 1-3 给出常用傅里叶变换对。

表 1-3　常用傅里叶变换对

原函数	频谱函数	原函数	频谱函数
1	$\delta(x,y)$	$\mathrm{sgn}(x)\mathrm{sgn}(y)$	$\dfrac{1}{\mathrm{j}\pi f_x}\dfrac{1}{\mathrm{j}\pi f_y}$
$\delta(x,y)$	1	$\mathrm{rect}(x)\mathrm{rect}(y)$	$\mathrm{sinc}(f_x)\mathrm{sinc}(f_y)$
$\exp[\mathrm{j}2\pi(f_a x+f_b y)]$	$\delta(f_x-f_a,f_y-f_b)$	$\mathrm{tri}(x)\mathrm{tri}(y)$	$\mathrm{sinc}^2(f_x)\mathrm{sinc}^2(f_y)$
$\delta(x-a,y-b)$	$\exp[-\mathrm{j}2\pi(f_x a+f_y b)]$	$\mathrm{comb}(x)\mathrm{comb}(y)$	$\mathrm{comb}(f_x)\mathrm{comb}(f_y)$
$\cos 2\pi f_0 x$	$\dfrac{1}{2}[\delta(f_x-f_0)+\delta(f_x+f_0)]$	$\exp[-\pi(x^2+y^2)]$	$\exp[-\pi(f_x^{\ 2}+f_y^{\ 2})]$
$\mathrm{step}(x)$	$\dfrac{1}{2}\delta(f_x)+\dfrac{1}{\mathrm{j}2\pi f_x}$	$\mathrm{circ}(r)$	$\dfrac{J_1(2\pi\rho)}{\rho}$

Ⅱ. 习题解答

本章习题主要内容包括:熟悉 δ 函数、梳状函数、其他常用函数及其傅里叶变换式的运用;熟悉卷积、相关运算以及在实际中的应用,并证明它们的性质;傅里叶变换性质的证明,熟悉这些性质的运用,需要经过大量习题的训练。只有扎实地掌握傅里叶分析的数学处理方法,才能熟练运用这一数学工具对傅里叶光学中的各种问题进行分析和加深理解。习题中特别注意训练用卷积定理的图解分析方法求函数的傅里叶变换或频谱。由于用图形表示出函数在空间域和频率域的对应关系,有利于启迪思维,加深对物理图像的认识。建议读者在后续各章中注意这种方法的运用,把它和公式推导方法更好地结合起来。

1.1　已知函数

$$U(x)=A\exp(\mathrm{j}2\pi f_0 x)$$

求下列函数,并画出函数图形:

(1) $|U(x)|^2$　(2) $U(x)+U^*(x)$　(3) $|U(x)+U^*(x)|^2$

解

(1) $|U(x)|^2=|A\exp(\mathrm{j}2\pi f_0 x)|^2=A^2$　(A 为实数)

函数如图 1-1a 所示。

(2) 利用欧拉公式 $\exp(\mathrm{j}\alpha)=\cos\alpha+\mathrm{j}\sin\alpha$, 有

$$U(x)+U^*(x)=A\exp(\mathrm{j}2\pi f_0 x)+A\exp(-\mathrm{j}2\pi f_0 x)=2A\cos(2\pi f_0 x)$$

函数如图 1-1b 所示。

(3) 利用(2)的结果,有

$$\begin{aligned}|U(x)+U^{*}(x)|^{2} &= 4A^{2}\cos^{2}(2\pi f_{0}x)\\ &= 2A^{2}[1+\cos(4\pi f_{0}x)]\end{aligned}$$

函数如图 1-1c 所示。

1.2　已知函数

$$f(x) = \mathrm{rect}(x+2) + \mathrm{rect}(x-2)$$

求下列函数,并作出函数图形:

(1) $f(x-1)$

(2) $f(x)\mathrm{sgn}(x)$

解

$f(x)$ 代表两个中心分别在 $x=2$ 和 $x=-2$ 的矩形函数的和,函数图形如图 1-2a 所示。

(1) 利用已知函数,很容易推出

$$\begin{aligned}f(x-1) &= \mathrm{rect}(x-1+2) + \mathrm{rect}(x-1-2)\\ &= \mathrm{rect}(x+1) + \mathrm{rect}(x-3)\end{aligned}$$

这是两个中心分别在 $x=-1$ 和 $x=3$ 的矩形函数的和,函数如图 1-2b 所示。与图 1-2a 相比,图形沿 x 轴整体向右平移了一个单位。

(2) $f(x)\mathrm{sgn}(x) = \mathrm{rect}(x-2) - \mathrm{rect}(x+2)$

函数如图 1-2c 所示。与图 1-2a 相比,图形在 x 的负半轴进行了反转。

1.3　画出下列函数的图形

(1) $f(x) = \mathrm{rect}\left(\frac{x}{4}\right) - \mathrm{rect}\left(\frac{x}{2}\right)$

(2) $g(x) = 2\mathrm{tri}\left(\frac{x}{2}\right) - \mathrm{tri}(x)$

(3) $h(x) = 2\mathrm{tri}\left(\frac{x}{2}\right) - 2\mathrm{tri}(x)$

(4) $p(x) = \mathrm{tri}(x)\mathrm{step}(x)$

解

(1) 函数 $f(x)$ 是两个中心都在

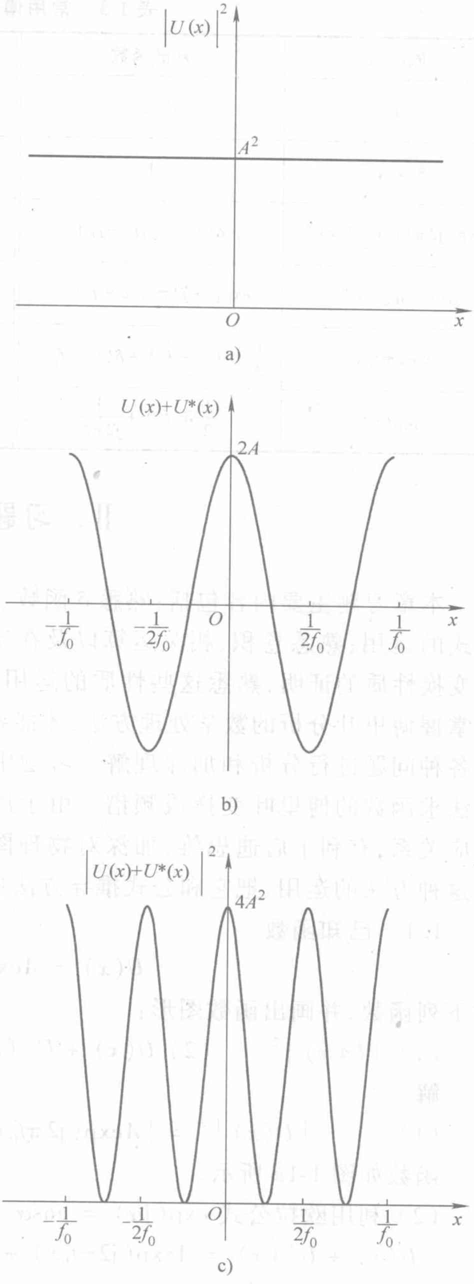


图　1-1

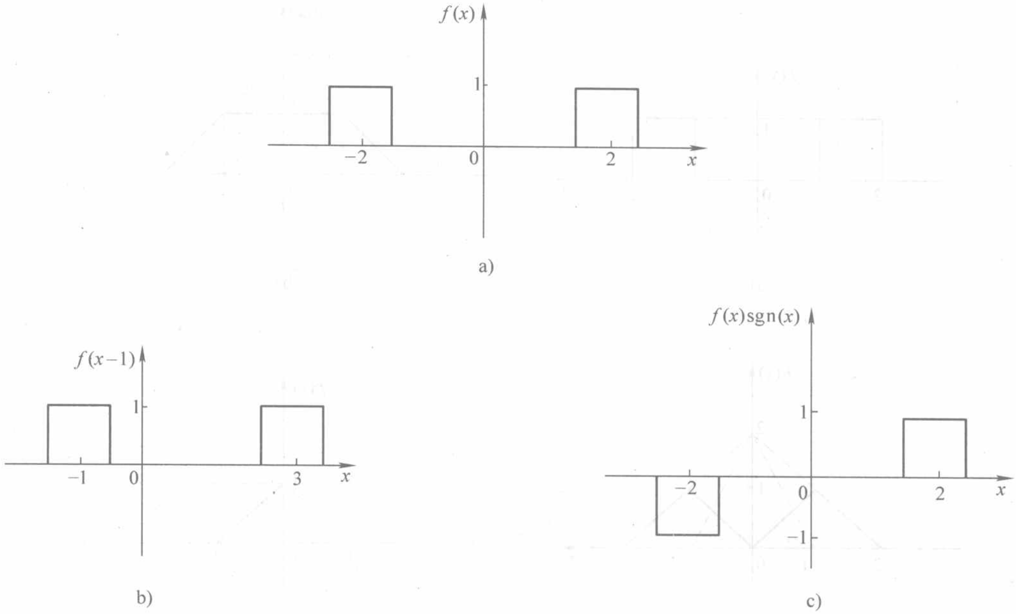


图 1-2

原点，高度都为 1，宽度分别是 4 和 2 的矩形函数的差，如图 1-3a 所示。

（2）函数 $g(x)$ 是两个中心都在原点但中心高度与底边宽度均不同的三角形函数的差，如图 1-3b 所示。

（3）函数 $h(x)$ 是两个中心在原点，中心高度相等，但底边宽度不同的两个三角形函数之差，如图 1-3c 所示。

（4）函数 $p(x)$ 表示用阶跃函数选取三角形函数在 $x>0$ 的区间，如图 1-3d 所示。

1.4 已知连续函数 $f(x)$，若 $x_0>b>0$，利用 δ 函数可筛选出函数在 $x=x_0\pm b$ 的值，试写出运算式。

解

利用 δ 函数的筛选性质，知

$$f(x,y)*\delta(x-x_0,y-y_0)=f(x-x_0,y-y_0)$$

容易推出当 $x_0>b>0$ 时，有

$$f(x_0-b)=f(x)*\delta[x-(x_0-b)]=f(x)*\delta(x-x_0+b)$$

$$f(x_0+b)=f(x)*\delta[x-(x_0+b)]=f(x)*\delta(x-x_0-b)$$

参看图 1-4。

1.5 $f(x)$ 为任意连续函数，$a>0$，求函数

$$g(x)=f(x)[\delta(x+a)-\delta(x-a)]$$

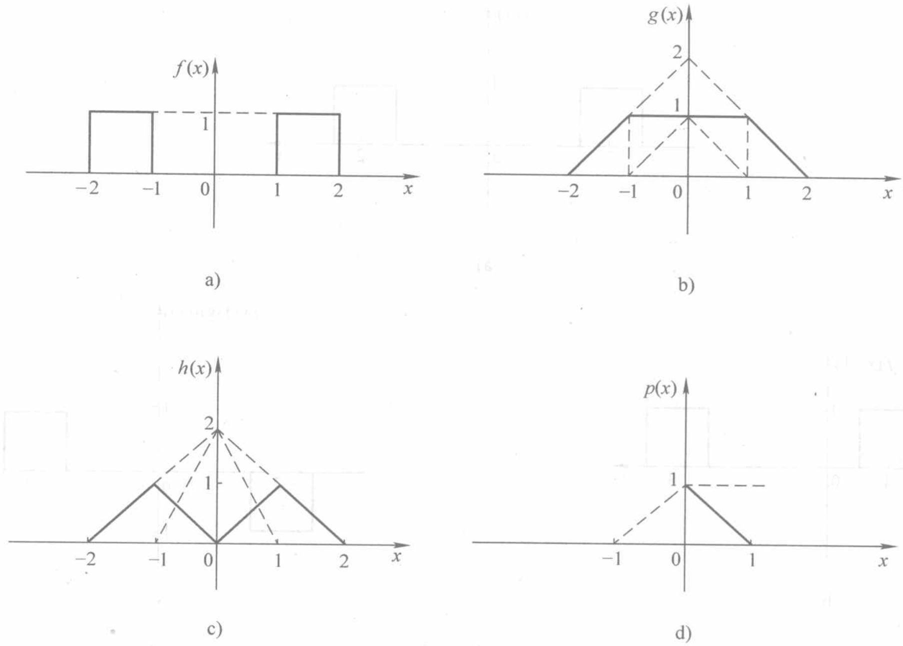


图 1-3

并作出示意图。

解

利用 δ 函数与普通函数的乘积，很容易推出

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x)[\delta(x+a)-\delta(x-a)] \\ &= f(-a)\delta(x+a)-f(a)\delta(x-a) \end{aligned}$$

假设 $f(x)$ 如图 1-5a 示，$g(x)$ 则如图 1-5b所示。

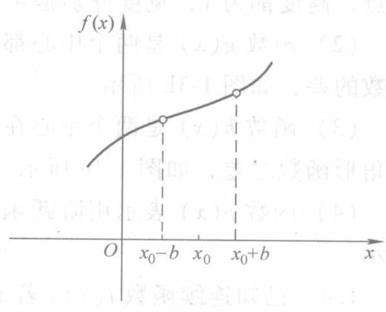


图 1-4

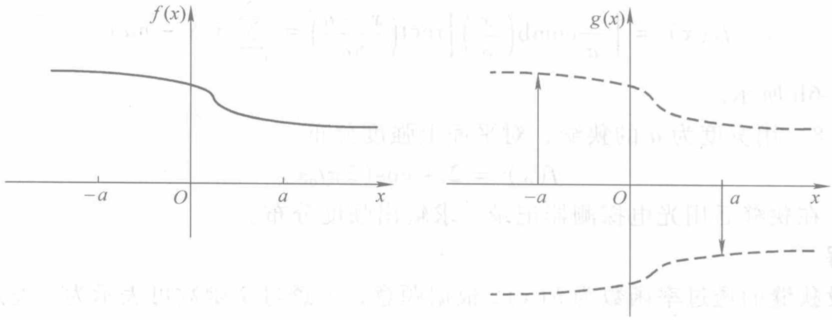
1.6 已知连续函数 $f(x)$，$a>0$ 和 $b>0$，求出下列函数：

(1) $h(x)=f(x)\delta(ax-x_0)$ (2) $g(x)=f(x)\mathrm{comb}\left(\dfrac{x-x_0}{b}\right)$

解

(1) 利用 δ 函数的比例性质和筛选性质，且 $a>0$，有

$$\begin{aligned} h(x) = f(x)\delta(ax-x_0) &= \frac{1}{a}f(x)\delta\left(x-\frac{x_0}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a}f\left(\frac{x_0}{a}\right)\delta\left(x-\frac{x_0}{a}\right) \end{aligned}$$



a)　　　　b)

图　1-5

（2）利用梳状函数的定义，且 $a>0$ 和 $b>0$，有

$$g(x)=f(x)\mathrm{comb}\left(\frac{x-x_0}{b}\right)=bf(x)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(x-x_0-nb)$$

$$=b\sum_{n=-\infty}^{+\infty}f(x_0+nb)\delta(x-x_0-nb)$$

1.7　画出下面函数的图形

（1）$f_1(x)=\left[\frac{1}{a}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x}{5a}\right)$

（2）$f_2(x)=\left[\frac{1}{a}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x-a}{5a}\right)$

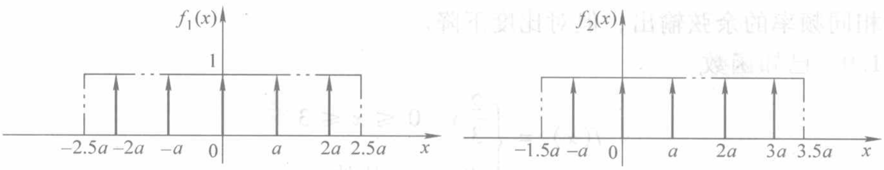
解

（1）利用梳状函数和矩形函数的性质，很容易推出

$$f_1(x)=\left[\frac{1}{a}\mathrm{comb}\left(\frac{x}{a}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x}{5a}\right)=\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(x-na)\right]\mathrm{rect}\left(\frac{x}{5a}\right)$$

$$=\sum_{n=-2}^{2}\delta(x-na)$$

如图 1-6a 所示。



a)　　　　b)

图　1-6

（2）同理有