数学竞赛与考研应试指导

西北工业大学出版社

数学竞赛与考研应试指导

龚冬保　王寿生　赵选民　　编

西北工业大学出版社

1999年4月　西安

一、函数　极限　连续

I　客观题

1.1　设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\ 0, & |x|>1,\end{cases}$ 则 $f[f(x)]=$ $\underline{\ 1\ }$.

对任意 $x\in(-\infty,+\infty)$，$|f(x)|\leqslant 1$

1.2　已知 $f(x)=\sin x$，$f[\varphi(x)]=1-x^2$，则 $\varphi(x)=\underline{\arcsin(1-x^2)}$ 的定义域为 $\underline{[-\sqrt{2},\sqrt{2}]}$.

1.3　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^n=$ $\underline{\ e^{-3}\ }$.

原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{n+1}\right)^{-\frac{n+1}{3}\cdot\left(-\frac{3n}{n+1}\right)}=e^{-3}$

1.4　设 a 为非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$ $\underline{\ e^{2a}\ }$.

1.5　$\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$ $\underline{\ e^6\ }$

$\dfrac{6x}{\sin x}$　e^6

1.6　设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=8$，则 $a=$ $\underline{\ \ln 2\ }$

由 $8=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-1}{3a}\frac{3ax}{x-1}}=e^{3a}$ 得 $a=\ln 2$

1.7　$\lim\limits_{x\to0}x\cot 2x=$ $\underline{\ \dfrac{1}{2}\ }$

1.8　$\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=$ $\underline{\ 0\ }$

1.9　$\lim\limits_{x\to+0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^{\tan x}=$ $\underline{\ 1\ }$

1.10　$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-e^{\frac{1}{x}}}{x+e^{\frac{1}{x}}}=$ $\underline{\ -1\ }$

1.11　$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{e^x-\cos x}=$ $\underline{\ 0\ }$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2/2}{e^x-\cos x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{e^x+\sin x}=0$

1.12　$\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)=$ $\underline{\ \dfrac{1}{6}\ }$

原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\sin x}{x\sin x\tan x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{6}x^3}{x^3}=\dfrac{1}{6}$

1.13　$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+5}{5x+3}\sin\dfrac{2}{x}=$ $\underline{\ \dfrac{6}{5}\ }$

当 $x\to\infty$ 时，$\sin\dfrac{2}{x}\sim$

1.14　$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3\sqrt{n}}-\sqrt{n-\sqrt{n}}\right)=$ $\underline{\ 2\ }$

1.15 $\lim\limits_{x\to\infty}[\sqrt{1+2+\cdots+n}-\sqrt{1+2+\cdots+(n-1)}]=$ $\underline{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$

$\dfrac{(1+n)n}{2}$

$1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

1.16 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{\frac{n^2+n}{2}}{2(n^2+n+1)}$ $\dfrac{n^2+n}{2(n^2+n+n)}$

$\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+n)}\leqslant\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\leqslant\dfrac{n(n+1)}{2(n^2+n+1)}$

1.17 已知当$x\to0$时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$与$\cos x-1$是等价无穷小，则常数$a=\underline{-\dfrac{3}{2}}$

$1+ax^2\sim1$

由$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1}{\cos x-1}=1$即得

1.18 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=\underline{\dfrac{3}{2}}$

原式

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{\ln(1+x)}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{x}$

$=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}\left(3\dfrac{\sin x}{x}+x\cos\dfrac{1}{x}\right)$

$=\dfrac{3}{2}$

1.19 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}-2}{x^2}=\underline{-\dfrac{1}{4}}$

1.20 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x\tan x}\right)=\underline{\dfrac{1}{3}}$

1.21 设$f(x)=a^x(a>0,a\neq1)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\ln[f(1)f(2)\cdots f(n)]=$ $\underline{\dfrac{1}{2}\ln a}$

a a

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln f(1)+\ln f(2)+\cdots+\ln f(n)}{n^2}$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln a\cdot(1+2+\cdots+n)}{n^2}$

$=\dfrac{\ln a}{2}$

1.22 曲线$y=x^2e^{-x^2}$的渐近线方程为$\underline{y=0}$

1.23 若$f(x)=\begin{cases}a+bx^2, & x\leqslant0\\ \dfrac{\sin bx}{x}, & x>0\end{cases}$在$x=0$处连续，则常数$a$与$b$应满足的关系是$\underline{a=b}$.

1.24 若$f(x)=\begin{cases}e^x(\sin x+\cos x), & x>0\\ 2x+a, & x\leqslant0\end{cases}$是$(-\infty,+\infty)$上的

则$a=\underline{\ 1\ }$

求极限:六合一为形 2lny型

1.25 若 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 连续,则 $a=$ $\underline{-2}$

1.26 已知 $f(x)=\begin{cases}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $a=$ $\underline{e^{-\frac{1}{2}}}$

注意 $(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+\cos x-1)}$ 故 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}$

1.27 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\leqslant 0,\\ x^2+x, & x>0,\end{cases}$ 则 $f(-x)$ 等于(D)

(A) $f(-x)=\begin{cases}-x^2, & x\leqslant 0\\ -(x^2+x), & x>0\end{cases}$

(B) $f(-x)=\begin{cases}-(x^2+x), & x<0\\ -x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $f(-x)=\begin{cases}x^2, & n\leqslant 0\\ x^2-x, & x>0\end{cases}$

(D) $f(-x)=\begin{cases}x^2-x, & x<0\\ x^2, & x\geqslant 0\end{cases}$

函数的定义域与对应关系是两要素,而复合函数在高等数学中又有特殊的重要地位,值得注意

1.28 设 $g(x)=\begin{cases}2-x, & x\leqslant 0,\\ x+2, & x>0,\end{cases}$ $f(x)=\begin{cases}x^2, & x<0,\\ -x, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 则 $g[f(x)]=$ (D)

(A) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ (B) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

(C) $\begin{cases}2-x^2, & x<0\\ 2-x, & x\geqslant 0\end{cases}$ (D) $\begin{cases}2+x^2, & x<0\\ 2+x, & x\geqslant 0\end{cases}$

1.29 $f(x)=|x\sin x|e^{\cos x}(-\infty<x<+\infty)$ 是(D)

(A) 有界函数 (B) 单调函数

(C) 周期函数 (D) 偶函数

$|x\sin x|$,$e^{\cos x}$ 均为偶函数

1.30 设函数 $f(x)=x\tan x\cdot e^{\sin x}$,则 $f(x)$ 是(B)

(A) 偶函数 (B) 无界函数

(C) 周期函数 (D) 单调函数

当 $x\to(2n+1)\dfrac{\pi}{2}(n\in z)$ 时,$\tan x\to\infty$,从而 $f(x)\to\infty$

1.31 函数 $f(x)=x\sin x$ (C)

(A) 当 $x\to\infty$ 时为无穷大 (B) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界

(C) 在 $(-\infty,+\infty)$ 内无界 (D) 当 $x\to\infty$ 时有有限极限

1.32 当 $x>0$ 时,曲线 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ (A)

(A) 有且仅有水平渐近线

(B) 有且仅有铅直渐近线

(C) 既有水平渐近线,也有铅直线近线

(D) 既无水平渐近线,也无铅直渐近线

$\because \lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$, $\therefore$ 选 A

1.33 曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$ (D)

(A) 没有渐近线　　(B) 仅有水平渐近线

(C) 仅有铅直渐近线　　(D) 既有水平渐近线又有铅直渐近线

1.34 曲线 $y=e^{1/x^2}\arctan\dfrac{x^2+x+1}{(x+1)(x-2)}$ 的渐近线有 (B)

(A) 1 条　(B) 2 条　(C) 3 条　(D) 4 条

1.35 当 $x\to 1$ 时,函数 $\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极根 (D)

(A) 等于 2　(B) 等于 0　(C) 为 ∞　(D) 不存在但不为 ∞

1.36 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$,其中 a、b 是常数,则(C)

(A) $a=1,b=1$　　(B) $a=-1,b=1$

(C) $a=1,b=-1$　　(D) $a=-1,b=-1$

1.37 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}=2$,则(A)

(A) $a=1,b=-\dfrac{5}{2}$　　(B) $a=0,b=-2$

(C) $a=0,b=-\dfrac{5}{2}$　　(D) $a=1,b=-2$

1.38 设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$,其中 $a^2+c^2\neq 0$,则必有(D)

(A) $b=4d$　　(B) $b=-4d$

(C) $a=4c$　　(D) $a=-4c$

1.39 下列各式中正确的是(A)

(A) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=1$　　(B) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

(C) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x=-e$　　(D) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{-x}=e$

1.40 设数列的通项为 $x_n=\begin{cases}\dfrac{n^2+\sqrt{n}}{n}, & 若 n 为奇数,\\ \dfrac{1}{n}, & 若 n 为偶数,\end{cases}$ 则当 $n\to$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}+1}{e^{x^2}-1}=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to\infty}y=\arctan 1,\lim\limits_{x\to 0}y=\infty$

故有渐近线 $y=\dfrac{\pi}{4}$ 和 $x=0$.

$x\to 1^-$ 时,$e^{\frac{1}{x-1}}\to 0$,

$x\to 1^+$ 时,$e^{\frac{1}{x-1}}\to\infty$

由 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x+1}-ax-b\right)=0$ 得

$1-a=0,a+b=0$,从而 $a=1,b=-1$

由 $2=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)-(ax+bx^2)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]-(ax+bx^2)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-a)x-\left(\frac{1}{2}+b\right)x^2+o(x^2)}{x^2}$

得 $1-a=0,\dfrac{1}{2}+b=-2$,$\therefore a=1,b=-\dfrac{5}{2}$.求极限时,无穷小分析的方法很重要

∞ 时,x_n 是(D)

(A) 无穷大量 (B) 无穷小量

(C) 有界变量 (D) 无界变量

1.41 设 $F(x)=\dfrac{x^2}{x-a}\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$,其中 $f(x)$ 为连续函数,则 $\lim\limits_{x\to a}F(x)$ 等于(B)

(A) a^2 (B) $a^2 f(a)$ (C) 0 (D) 不存在

1.42 当 $x\to 0$ 时,$x-\sin x$ 是 x^2 的(B)

(A) 低阶无穷小 (B) 高阶无穷小

(C) 等价无穷小 (D) 同阶但非等价无穷小

1.43 设 $f(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$,$g(x)=x^3+x^4$,则当 $x\to 0$ 时,$f(x)$ 是 $g(x)$ 的(B)

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cancel{\sin(\sin^2 x)}}{3x^2+4x^3}$ x^2

(A) 等价无穷小 (B) 同阶但非等价无穷小

(C) 高阶无穷小 (D) 低阶无穷小

1.44 设 $\alpha(x)=\displaystyle\int_0^{5x}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$,$\beta(x)=\displaystyle\int_0^{\sin x}(1+t)^{\frac{1}{t}}\mathrm{d}t$,则当 $x\to 0$ 时,$\alpha(x)$ 是 $\beta(x)$ 的(C)

(A) 高阶无穷小 (B) 低阶无穷小

(C) 同阶但不等价的无穷小 (D) 等价无穷小

1.45 当 $x\to 0$ 时,变量 $\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}$ 是(D)

(A) 无穷小 (B) 无穷大

(C) 有界的,但不是无穷小 (D) 无界的,但不是无穷小

1.46 设当 $x\to 0$ 时,$\mathrm{e}^x-(ax^2+bx+1)$ 是比 x^2 高阶的无穷小,则(A)

(A) $a=\dfrac{1}{2},b=1$ (B) $a=1,b=1$

(C) $a=-\dfrac{1}{2},b=1$ (D) $a=-1,b=1$

1.47 当 $x\to 0$ 时,下列四个无穷小量中,哪一个是比其它三个更高阶的无穷小量?(D)

(A) x^2 (B) $1-\cos x$ $\frac{1}{2}x^2$

(C) $\sqrt{1-x^2}-1$ $\sim\frac{1}{2}x^2$ (D) $x-\tan x$

1.48 设 $x\to 0$ 时,$\mathrm{e}^{\tan x}-\mathrm{e}^x$ 与 x^n 是同阶无穷小,则 n 为(C)

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-x}{x^n}$

1.49 设 $f(x)=2^x+3^x-2$,则当 $x\to 0$ 时(B)

$2^x\ln 2+3^x\ln 3$

(A) $f(x)$ 与 x 是等价无穷小量

(B) $f(x)$ 与 x 同阶但非等价无穷小量

(C) $f(x)$ 是比 x 较高阶的无穷小量

(D) $f(x)$ 是比 x 较低阶的无穷小量

注意无穷小分析的方法,包括是不是无穷小量,是几阶无穷小,哪些是等价无穷小等

1.50　设数列 x_n 与 y_n 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$，则下列断言正确的是(D)

(A) 若 x_n 发散，则 y_n 必发散

(B) 若 x_n 无界，则 y_n 必有界

(C) 若 x_n 有界，则 y_n 必为无穷小

(D) 若 $\dfrac{1}{x_n}$ 为无穷小，则 y_n 必为无穷小

注意：平时练习时需学会举反例，如用 $x_n = \sin n$，$y_n = \dfrac{1}{n}$ 排除(A)；用 $x_n = n + (-1)^n n$，$y_n = n + (-1)^{n+1} n$ 否定(B)；用 $x_n = \dfrac{1}{n}$，$y_n = \sin n$ 否定(C)。考试时应很快找出正确的那一个答案

1.51　函数(A)在其定义域内连续

(A) $f(x) = \ln x + \sin x$

(B) $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x \leqslant 0 \\ \cos x, & x > 0 \end{cases}$

(C) $f(x) = \begin{cases} x+1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ x-1, & x > 0 \end{cases}$

(D) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{|x|}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

1.52　设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，$f(x)$ 为连续函数，且 $f(x) \neq 0$，$\varphi(x)$ 有间断点，则(D)

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点　　(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点　　(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点

请举出选项(A)、(B)、(C)不一定对的反例

1.53　设 $f(x) = \begin{cases} \sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 则 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 处(C)

(A) 极限不存在　　(B) 极限存在但不连续

(C) 连续但不可导　　(D) 可导

1.54　设 $f(x)$，$\varphi(x)$ 在点 $x = 0$ 的某邻域内连续，且当 $x \to 0$ 时，$f(x)$ 是 $\varphi(x)$ 的高阶无穷小，则当 $x \to 0$ 时，$\int_0^x f(t)\sin t\,dt$ 是 $\int_0^x t\varphi(t)\,dt$ 的(B)

(A) 低阶无穷小　　(B) 高阶无穷小

(C) 同阶但不等价的无穷小　　(D) 等价无穷小

1.55　设函数 $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+x}{1+x^{2n}}$，讨论函数 $f(x)$ 的间断点，其结论为(B)

(A) 不存在间断点　　(B) 存在间断点 $x = 1$

(C) 存在间断点 $x = 0$　　(D) 存在间断点 $x = -1$

Ⅱ　非客观题

1.56　已知 $f(x) = e^{x^2}$，$f[\varphi(x)] = 1 - x$，且 $\varphi(x) \geqslant 0$，求 $\varphi(x)$ 并写出它的定义域。

注意 $\varphi(x) \geqslant 0$ 的要求

解　由 $\varphi(x) \geqslant 0$，$e^{[\varphi(x)]^2} = 1 - x$，得 $\varphi(x) = \sqrt{\ln(1-x)}$。由 $\ln(1$

$-x)\geq 0$ 得 $1-x\geq 1$ 即 $x\leq 0$，所以 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}, x\leq 0$.

1.57　求 $\lim\limits_{x\to-\infty} x\left(\sqrt{x^2+100}+x\right)$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100x}{\sqrt{x^2+100}-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{100}{-\left(\sqrt{1+\dfrac{100}{x^2}}+1\right)}$

$=-50$

1.58　求 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x(1-\cos\sqrt{x})}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1-\cos x}{x\left(1-\cos\sqrt{x}\right)\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}$

$=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2}{x\cdot\dfrac{1}{2}x\left(1+\sqrt{\cos x}\right)}=\dfrac{1}{2}$

1.59　求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x^2-x-2}{\sqrt{x^2+\sin x}\left(\sqrt{4x^2+x-1}-x-1\right)}$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-\dfrac{1}{x}-\dfrac{2}{x^2}}{-\sqrt{1+\dfrac{\sin x}{x^2}}\left(\sqrt{4+\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}}+1+\dfrac{1}{x}\right)}=1$

1.60　求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}$　2+1

解　因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=0$,

所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^{\frac{1}{x}}=e^0=1$

从 1.60 至 1.63，我们也可以用“换底”方法作，如 1.61

原式

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(2\sin x+\cos x)}{x}}$

$=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin x}{x}}=e^2$

这里用到 $x\to0$ 时 $\ln(2\sin x+\cos x)\sim 2\sin x$

1.61　求 $\lim\limits_{x\to0}(2\sin x+\cos x)^{\frac{1}{x}}$

解　因 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln(2\sin x+\cos x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\cos x-\sin x}{2\sin x+\cos x}=2$,

所以原式 $=e^2$.

1.62　求 $\lim\limits_{x\to+0}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$

解 1 因 $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\pi\ln\cos\sqrt{x}}{x}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{-\pi}{\cos\sqrt{x}}\cdot\dfrac{\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}=-\dfrac{\pi}{2}$,

所以原式 $=e^{-\frac{\pi}{2}}$

解 2 原式 $=e^{\pi\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\cos\sqrt{x}}{x}}=e^{\pi\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=e^{-\frac{\pi}{2}}$

1.62 解 2 中用：$\ln(\cos\sqrt{x})=\ln(1+\cos\sqrt{x}-1)\sim\cos\sqrt{x}-1\sim-\dfrac{x}{2}$.

等价无穷小替代

1.63　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{1}{x}}$，其中 n 是给定的自然数。

解　因$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\ln\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx}}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}=\frac{1+2+\cdots+n}{n}=\frac{n+1}{2},$$

所以原式 $=e^{\frac{n+1}{2}}$

1.64　求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\right]$

解　令 $x=\dfrac{1}{t}$，则原式 $=\lim\limits_{t\to 0}\left[\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}\ln(1+t)\right]$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{t-\ln(1+t)}{t^2}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\dfrac{1}{1+t}}{2t}$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{1}{2(1+t)}=\frac{1}{2}.$$

可用泰勒公式：$\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2x^2}+0\left(\dfrac{1}{x^2}\right)(x\to\infty)$ 则 $x-x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{2}+0(1)(x\to\infty)$

故原式 $=\dfrac{1}{2}$

1.65　求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$

解　令 $x=\dfrac{1}{t}$，则因$\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\ln(\sin 2t+\cos t)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\cos 2t-\sin t}{\sin 2t+\cos t}=2,$$

所以原式 $=e^2$

1.66　求极限$\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}$

解　令 $t=x\ln x$，则 $x^x=e^t$，原式 $=\lim\limits_{t\to+0}\dfrac{e^t-1}{t}=1$

也可这样作：

$$\lim_{x\to+0}\frac{x^x-1}{x\ln x}=\lim_{x\to+0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=1$$

1.67　求$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1-x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{2x}=\dfrac{1}{2}$

1.68　求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^2(e^x-1)}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{6}$

1.69　求极限$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)}{\operatorname{arc\,cot}x}$

解 1 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{\arctan\dfrac{1}{x}}=1$

解 2 原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+x)-\ln x}{\operatorname{arc\,cot}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1+x^2}{x(1+x)}=1$

注意，当 $x\to 0$ 时，$x\sim\sin x\sim\tan x\sim\arcsin x\sim\arctan x\sim e^x-1\sim\ln(1+x)$ 及 $1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$ 是常用的等价无穷小量.

1.70　求极限$\lim\limits_{x\to 1}(1-x^2)\tan\dfrac{\pi}{2}x$

解 1　原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(1+x)\sin\frac{\pi}{2}x(1-x)}{\sin\frac{\pi}{2}(1-x)}=\dfrac{4}{\pi}$

解 2　原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-x^2}{\cot\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-2x}{-\frac{\pi}{2}\csc^2\frac{\pi}{2}x}=\dfrac{4}{\pi}$

1.71　求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}\int_0^x(1+t^2)e^{t^2-x^2}dt$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x(1+t^2)e^{t^2}dt}{xe^{x^2}}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(1+x^2)e^{x^2}}{(1+2x^2)e^{x^2}}=\dfrac{1}{2}$

1.72　求极限 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$

解 1　原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\tan(x-1)}{\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sec^2(x-1)}{-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\dfrac{4}{\pi^2}$

解 2　原式 $=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln[1+\cos(x-1)-1]}{1-\cos\frac{\pi}{2}(1-x)}$

$=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\cos(x-1)-1}{\frac{\pi^2}{8}(1-x)^2}=-\dfrac{4}{\pi^2}.$

1.73　求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{a}{x}-\left(\dfrac{1}{x^2}-a^2\right)\ln(1+ax)\right]\quad(a\neq0)$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax-(1-a^2x^2)\ln(1+ax)}{x^2}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{a+2a^2x\ln(1+ax)-a(1-ax)}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2a^2\ln(1+ax)+\frac{2a^3x}{1+ax}+a^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

如用 $a^2\ln(1+ax)\to0$ 及 $\ln(1+ax)=ax-\frac{1}{2}a^2x^2+0(x^2)(x\to0)$ 那么原式 $=\frac{a^2}{2}$ 是显然的.

1.74　已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=9$,求常数 a

解　由 $9=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{2a}\cdot\frac{2ax}{x-a}}$

$=e^{2a}$,及 $a=\ln3$.

1.74～1.78 均可用换底与等价无穷小替代法或结合泰勒公式(如 1.78 的解 1)作也很简单.

1.75　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+x}{6+x}\right)^{\frac{x-1}{2}}$

解　原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{-3}{6+x}\right)^{-\frac{6+x}{3}\cdot\frac{-3(x-1)}{6+x}\cdot\frac{1}{2}}=e^{-\frac{3}{2}}$

1.76　计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\tan^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{2}{n}\right)$

解　原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^n$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{2\tan\frac{2}{n}}{1-\tan\frac{2}{n}}\right)^{\frac{1-\tan\frac{2}{n}}{2\tan\frac{2}{n}}\cdot\frac{\tan\frac{2}{n}}{\frac{2}{n}}\cdot\frac{4}{1-\tan\frac{2}{n}}} = e^4$$

1.77　求极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^x)^{\frac{1}{x}}$

解原式 $=\lim\limits_{x\to 0}(1+xe^x)^{\frac{1}{xe^x}\cdot e^x}=e$

1.78　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(n\tan\frac{1}{n}\right)^{n^2}$（$n$ 为自然数）

解 1　原式$=\lim\limits_{n\to\infty}e^{n^2\ln(n\tan\frac{1}{n})}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(n\tan\frac{1}{n}-1)n^2}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{3n^2}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)\right]n^2}=e^{\frac{1}{3}}$.

这里 $\tan\frac{1}{n}=\frac{1}{n}+\frac{1}{3n^2}+0\left(\frac{1}{n^2}\right)(n\to\infty)$

解 2∵ $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(1+\frac{\tan x-x}{x}\right)^{\frac{x}{\tan x-x}\cdot\frac{\tan x-x}{x^3}}$

$$=e^{\frac{1}{3}}\left(\lim_{x\to 0^+}\frac{\tan x-x}{x^3}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sec^2 x-1}{3x^2}=\frac{1}{3}\right),$$

取 $x=\frac{1}{n}$，得原式 $=e^{\frac{1}{3}}$

1.79　求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right]$

解∵ $\frac{1}{n+1}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)$

$$<\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}$$

$<\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\cdots+\sin\pi\right)$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx$

$=\frac{2}{\pi}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\cdot\sum\limits_{i}^{n}\sin\frac{i\pi}{n}=\int_0^1\sin\pi x\,dx=\frac{2}{\pi}$，

故由夹逼定理知原式 $=\frac{2}{\pi}$.

这是“无限个无穷小之和”形式的题，一般可用积分来作. 如知道$\frac{1}{n}\sim\frac{1}{n+\frac{1}{k}}(n\to\infty)$ 那么原式 $=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\sin\frac{i\pi}{n}}{n}-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\frac{1}{i}\sin\frac{i\pi}{n}}{n\left(n+\frac{1}{i}\right)}$，前项 $\to\frac{2}{\pi}$，后一项 $\to 0$ 即可.

1.80　设 $x_1=10$，$x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}(n=1,2,\cdots)$，试证数列$\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限。

证　由 $x_1=10$ 及 $x_2=\sqrt{6+x_1}=4$ 知 $x_1>x_2$，设对某正整数 k，有 $x_k>x_{k+1}$，则有 $x_{k+1}=\sqrt{6+x_k}>\sqrt{6+x_{k+1}}=x_{k+2}$，故由归纳法知，对一切整数 n，都有 $x_n>x_{n+1}$，即$\{x_n\}$ 为单调减少数列，又显见 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，即$\{x_n\}$ 有下界，根据极限存在准则，知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则有 $a=\sqrt{6+a}$ 成立，从而 $a^2-a-6=0$. 解得 $a=3$，$a=-2$，但因 $x_n>0(n=1,2,\cdots)$，所以 $a\geq 0$，舍去 $a=-2$，得$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=3$.

x_n 的单调性也可以由 $x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-\sqrt{6+x_{n-1}}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{6+x_n}+\sqrt{6+x_{n-1}}}$ 得到.

1.81 求正常数 a 与 b,使等式 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{bx-\sin x}\displaystyle\int_0^x \dfrac{t^2}{\sqrt{a+t^2}}\mathrm{d}t=1$,成立.

解 由于 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^x\dfrac{t^2}{\sqrt{a+t}}\mathrm{d}t}{bx-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{x^2}{\sqrt{a+x}}}{b-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{a+x}}\cdot\dfrac{x^2}{b-\cos x}$,故必有 $\lim\limits_{x\to 0}(b-\cos x)=0$,于是知 $b=1$. 再由 $1=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{a+x}}\dfrac{x^2}{1-\cos x}=\dfrac{2}{\sqrt{a}}$,知 $a=4$.

1.82 确定常数 a、b、c 的值,使 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\displaystyle\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq 0)$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax-\sin x}{\displaystyle\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=c(c\neq 0)$,$\lim\limits_{x\to 0}(ax-\sin x)=0$,故 $\lim\limits_{x\to 0}\displaystyle\int_b^x\dfrac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t=0$,从而 $b=0$. 又由于

$$\lim_{x\to 0}\frac{ax-\sin x}{\displaystyle\int_0^x\frac{\ln(1+t^3)}{t}\mathrm{d}t}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{\dfrac{\ln(1+x^3)}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(a-\cos x)}{\ln(1+x^3)}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x(a-\cos x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{a-\cos x}{x^2}=c(c\neq 0)$$

故有 $a=1$,从而 $c=\dfrac{1}{2}$.

1.83 求函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在区间 $(0,2\pi)$ 内的间断点,并判断其类型.

解 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 处,$f\left(\dfrac{\pi}{4}+0\right)=+\infty$,在 $x=\dfrac{5\pi}{4}$ 处,$f\left(\dfrac{5\pi}{4}+0\right)=+\infty$,所以 $x=\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$ 为第2类(或无穷)间断点;在 $x=\dfrac{3\pi}{4}$ 处,$\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}f(x)=1$,在 $x=\dfrac{7\pi}{4}$ 处,$\lim\limits_{x\to\frac{7\pi}{4}}f(x)=1$,所以 $x=\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$ 的第一类(或可去)间断点.

积分和

1.84 设 a 为正常数. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a+1}}{n\sum\limits_{k=1}^{n}k^{a}}$ n^{a+1}

注意化为"积分和"的技巧和方法

解 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{a+1}}{\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^{a}}=\dfrac{\displaystyle\int_0^1 x^{a+1}\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 x^a\mathrm{d}x}=\dfrac{a+1}{a+2}$

1.85 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{2^2}\right)\left(1-\dfrac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\dfrac{1}{n^2}\right)$.

约简分数和用加、减消去中间各项的方法. 是求"无穷乘积"与"无穷和"极限的基本方法. 这种技巧研究生

解

原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\dfrac{2\cdot 4}{3^2}\cdot\dfrac{3\cdot 5}{4^2}\cdots\dfrac{(n-2)\cdot n}{(n-1)^2}\cdot\dfrac{(n-1)(n+1)}{n^2}\right)$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}.$$

考题未见出现过.

1.86 求$\lim\limits_{n\to\infty}n^2(\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1})$,$a$ 是常数

解1 设 $\alpha_n=\arctan\frac{a}{n}$,则

$$\tan(\alpha_n-\alpha_{n+1})=\frac{\frac{a}{n}-\frac{a}{n+1}}{1+\frac{a}{n}\cdot\frac{a}{n+1}}=\frac{a}{n(n+1)+a^2}$$

故 $\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}=\arctan\frac{a}{n(n+1)+a^2}\sim\frac{a}{n(n+1)}$,故

$$\lim_{n\to\infty}n^2(\alpha_n-\alpha_{n+1})=\lim_{n\to\infty}n^2\frac{a}{n(n+1)}=a.$$

主要用 $n\to\infty$ 时 $\arctan\frac{a}{n(n+1)+a^2}\sim\frac{a}{n(n+1)}$

解2 用泰勒公式:$\arctan\frac{a}{n}=\frac{a}{n}+0(\frac{1}{n^2})$.

$$\arctan\frac{a}{n+1}=\frac{a}{n+1}+0(\frac{1}{n^2}).$$

故 $\arctan\frac{a}{n}-\arctan\frac{a}{n+1}=\frac{a}{n(n+1)}+0(\frac{1}{n^2})$,从而

原极限值为 a.

1.87 求$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$.

解 记 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=$

$$\begin{cases}\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{2}{3}, & \text{当 } n \text{ 为奇数}\\ \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdots\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}, & \text{当 } n \text{ 为偶数}\end{cases}$$

则 $I_n^2=\frac{n-1}{n^2}\cdot\frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)^2}\cdots\frac{4\cdot 2}{3^2}\cdot 2<\frac{2}{n}$ (当 $n\geqslant 3$ 为奇数)

$$I_m^2\leqslant\frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)^2}\cdots\frac{3\cdot 1}{2^2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$\leqslant\frac{\pi}{2n}\leqslant 2/n$$

(当 n 为正偶数).

本题用中值定理:$\exists\,\xi\in(0,\frac{\pi}{2})\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx=\frac{\pi}{2}\sin^n\xi\to 0$ 是不对的. 因为 ξ 与 n 有关,如果 $n\to\infty,\xi_n\to\frac{\pi}{2}$,就不能得出 $\sin^n\xi_n\to 0$ 的结论.

总之有 $I_n\leqslant\sqrt{\frac{2}{n}}$,自然 $I_n\geqslant 0$,由极限的夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}I_n=0$.

注:由本题的证明我们还可得

$$I_n^2=\frac{1}{n}\frac{(n-1)^2}{n\cdot(n-2)}\cdot\frac{(n-3)^2}{(n-2)(n-4)}\cdots\frac{2^2}{3\cdot 1}$$

$$\cdot\frac{1}{3}\left(\text{或}\frac{3^2}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{4}\right)>\frac{1}{2n}$$

因此,有 $\sqrt{\frac{1}{2n}}<I_n<\sqrt{\frac{2}{n}}$

这样 I_n 与$\frac{1}{\sqrt{n}}$是同阶无穷小量.

1.88 设 $0<x_0<1,x_{n+1}=-x_n^2+2x_n,n=0,1,2,\cdots$ 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

一定要证明$\{x_n\}$收敛后,才能两边同时取极限.

解　$0 < x_1 = 1 - (1-x_0)^2 < 1$. 由归纳法知 $0 < x_n < 1$.

又 $x_{n+1} - x_n = x_n(1-x_n) > 0$, 故 $\{x_n\}$ 单调增有界, 有极限, 设为 A, 易得 $A = 1$.

为证明单调性, 考察 $x_n - x_{n-1}$ 是行之有效的.

1.89　设 $x_1 = \sqrt{2}, x_n = \sqrt{2} + \dfrac{x_{n-1}}{\sqrt{2} + x_{n-1}}$ $(n = 2,3,\cdots)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解　由 $x_n = \sqrt{2} + \dfrac{x_{n-1}}{\sqrt{2}+x_{n-1}} = \sqrt{2} + 1 - \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+x_{n-1}}$ 知

$$\sqrt{2} < x_n < \sqrt{2} + 1 (n = 2,3,\cdots)$$

又　$$x_n - x_{n-1} = \sqrt{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2}+x_{n-2}} - \frac{1}{\sqrt{2}+x_{n-1}}\right]$$

$$= \sqrt{2}\,\frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{(\sqrt{2}+x_{n-1})(\sqrt{2}+x_{n-2})}$$

因此, 由 $x_2 > x_1$ 及数学归纳法可得 $x_n > x_{n-1}$ 故 $\{x_n\}$ 收敛, 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$, 得 $A = 2$.

1.90　设 $t_1, t_2, \cdots, t_k$ 是 k 个正数, 且 $\sum\limits_{i=1}^{k} t_i = 1$, $f(x)$ 连续, 则对任意 $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_k$, 存在 $\xi \in [x_1, x_k]$ 使 $f(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{k} t_i f(x_i)$.

证　设 $M = \max\limits_{i=1,2,\cdots,k} f(x_i)$. $m = \min\limits_{i=1,2,\cdots,k} f(x_i)$, 则

$m \leqslant \sum\limits_{i=1}^{k} t_i f(x_i) \leqslant M$. $f(x)$ 在 $[x_1, x_k]$ 连续,

由介值定理得 $\exists\ \xi \in [x_1, x_k]$, 使 $f(\xi) = \sum\limits_{i=1}^{k} t_i f(x_i)$.

本题如设 $M = \max\limits_{x\in[x_1,x_k]} f(x)$, $m = \min\limits_{x\in[x_1,x_k]} f(x)$ 也是可以的.

1.91　设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 且 $f(f(x)) = x$, 证明存在实数 ξ, 使 $f(\xi) = \xi$.

解　用反证法. 设对 $\forall\ x \in (-\infty, +\infty)$, 有 $f(x) \neq x$, 即 $\varphi(x) = f(x) - x \neq 0$. 由 $\varphi(x)$ 的连续性, 便知 $\varphi(x)$ 不变号, 即总有 $\varphi(x) > 0$ 或 $\varphi(x) < 0$.

不仿设 $\varphi(x) > 0$, 于是令 $y = f(x)$. $\varphi(y) = f(y) - y > 0$.

即　$f(f(x)) > f(x) > x$. 矛盾.

这里是用了介值定理的逆否命题.

1.92　证明方程 $x^6 + 5x^3 + 2x^2 + 1 = 0$ 至少有两个实限.

证: 记 $f(x) = x^6 + 5x^3 + 2x^2 + 1$. 显然 $f(x)$ 连续.

而　$f(-2) = 8\cdot 2^3 - 5\cdot 2^3 + 8 + 1 > 0$, $f(-1) = -1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$. 由介值定理, $\exists\ x_1 \in (-2, -1)$, $x_2 \in (-1, 0)$. 使

$f(x_1) = f(x_2) = 0$.　即 x_1, x_2 是方程的两个实根

用介值定理证明限的存在性, 也提供了求根近似值的方法.

1.93　设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 且 $f(0) = f(1)$, 证明存在 $x_0 \in [0, 1]$, 使 $f(x_0) = f(x_0 + \dfrac{1}{3})$.

解　作 $\varphi(x)=f(x)-f(x+\frac{1}{3})$. 则 $\varphi(x)$ 在 $[0,\frac{2}{3}]$ 上连续. 用反证法. 若对 $\forall x\in[0,\frac{2}{3}]$ 均有 $f(x)-f(x+\frac{1}{3})\neq 0$. 则 $\varphi(x)$ 在 $[0,\frac{2}{3}]$ 内不变号. 不妨设 $\varphi(x)>0$. 取 $x=0$, 有 $f(0)>f(\frac{1}{3})$. 取 $x=\frac{1}{3}$ 有

$f(\frac{1}{3}>f\left(\frac{2}{3}\right)$. 取 $x=\frac{2}{3}$ 有 $f(\frac{2}{3})>f(1)$, 于是 $f(0)>f(1)$, 矛盾. 同样 $\varphi(x)<0$ 也不对, 故至少有 $x_0\in[0,\frac{2}{3}]$

使 $\varphi(x_0)=0$, 即 $f(x_0)=f(x_0+\frac{1}{3})$ 成立.

以上运用介值定理的几个典型的题, 各题采用方法不完全相同, 值得推敲.

1.94　设 $f(x)$ 连续. 且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, 证明 $f(x)$ 必有最小值.

解　由 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$ 知, 取 $M=f(x_0)$, x_0 是任一点, 有 X 存在, 当 $|x|\geqslant X$ 时,

$$f(x)>|f(x_0)|\geqslant f(x_0)(x_0\in[-X,X])$$

这时, $f(x)$ 在闭区间 $[-X,X]$ 上连续, 且　有 $f(x_0)<f(-X)$, $f(x_0)<f(X)$. 故 $f(x)$ 必在 $(-X,X)$ 内取到最小值: $f(x_1)=m$. 由　$m\leqslant f(x_0)<f(x)$. (对一切 $|x|\geqslant X$ 成立). 故　m 也是 $f(x)$ 的最小值.

注意, 将问题导入在闭区间连续函数, 再用最值定理的方法.

二、一元函数微分学

I 客观题

2.1 设 $y=\ln(1+ax)$，其中 a 为非零常数，则 $y'=\underline{\dfrac{a}{1+ax}}$，$y''=\underline{\dfrac{-a^2}{(1+ax)^2}}$

2.2 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$，则 $f'(t)=\underline{(2t+1)e^{2t}}$

$\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$
$=t\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x\cdot 2t}$
$=te^{2t}$

2.3 设 $f(x)=x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)$，则 $f'(0)=\underline{n!}$

可用定义，也可用泰勒公式即 x 项的系数，还可用乘积求导公式作.

2.4 设 $y=e^{\tan\frac{1}{x}}\sin\dfrac{1}{x}$，则 $y'=\underline{-\dfrac{1}{x^2}e^{\tan\frac{1}{x}}\left(\tan\dfrac{1}{x}\sec\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)}$

2.5 设 $y=\cos(x^2)\sin^2\dfrac{1}{x}$，则 $y'=\underline{-2x\sin(x^2)\sin^2\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{2}{x}\cos(x^2)}$

2.6 设 $y=\left(x+e^{-\frac{x}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$，则 $y'|_{x=0}=\underline{\dfrac{1}{3}}$

2.7 设 $y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$，则 $y''|_{x=0}=\underline{-\dfrac{3}{2}}$

$y=\ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x^2}}$
$=\dfrac{1}{2}[\ln(1-x)-\ln(1+x^2)]$

2.8 设 $f(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$，对 $f^{(n)}(x)=\underline{\dfrac{(-1)^n2\cdot n!}{(1+x)^{n+1}}}$

2.9 设 $y=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$，则 $y'''\big|_{x=\sqrt{3}}=\underline{\dfrac{5}{32}}$

2.10 已知 $y=f\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)$，$f'(x)=\arctan x^2$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{x=0}=\underline{\dfrac{3\pi}{4}}$

$\dfrac{dy}{dx}=\arctan\left(\dfrac{3x-2}{3x+2}\right)^2\cdot\left(1-\dfrac{4}{3x+2}\right)'\Big|_{x=0}$

2.11 设 $\begin{cases}x=f(t)-\pi,\\ y=f(e^{3t}-1),\end{cases}$ 其中 f 可导，且 $f(0)\neq 0$，则 $\dfrac{dy}{dx}\Big|_{t=0}=\underline{3}$