函数方程与微分方程的解析解

●李文荣 张全信 著

科学出版社
www.sciencep.com

函数方程与微分方程的解析解

李文荣 张全信 著

滨州学院学术著作出版基金资助

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统论述了函数方程与微分方程解析解的存在性问题，书中既有关于不含偏差变元函数方程与微分方程解析解存在性的经典工作的回顾，又包括近年来有关迭代函数方程与迭代微分方程解析解的许多最新成果．本书内容翔实、深入浅出，是一本系统涉猎方程解析解的参考书．

本书可供大学数学系高年级学生、研究生、教师及其他感兴趣的数学工作者阅读参考．

图书在版编目(CIP)数据

函数方程与微分方程的解析解/李文荣，张全信著．—北京：科学出版社，2008

ISBN 978-7-03-021982-4

Ⅰ. 函… Ⅱ. ①李… ②张… Ⅲ. ①泛函方程 ②微分方程 Ⅳ. O177 O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008) 第 069064 号

责任编辑：范庆奎 唐保军／责任校对：赵桂芬
责任印制：赵德静／封面设计：王 浩

科 学 出 版 社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 7 月第 一 版 开本：B5(720 × 1000)
2008 年 7 月第一次印刷 印张：17 3/4
印数：1—3 000 字数：301 000

定价：49.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈文林〉)

前言

微分方程理论在数学与自然科学领域中的重要地位是众所周知的. 函数方程理论是一个十分古老的学科, 由于它异常复杂和困难, 二百多年间发展缓慢、步履维艰. 直到 20 世纪初, 特别是近 50 年来, 人们发现函数方程理论在动力系统、分形几何、泛函分析、概率论、数学规划、理论物理、量子场论和经济决策等领域有许多意想不到的、美妙的应用, 函数方程理论才有了较大的发展. 尤其是所谓的迭代函数方程和迭代微分方程 (指方程中包含未知函数的迭代), 更成为热门课题.

当一个函数方程或微分方程的解能展开成幂级数时, 我们就说这个方程可以用幂级数解法来求解. 如果这个函数方程或微分方程的幂级数解有正的收敛半径, 就称这个幂级数解为解析解. 事实上, 幂级数解法是求解函数方程、微分方程的非常有效的方法. 所求得方程的解析解为研究解的性质和解的数值求法奠定了基础.

不言而喻, 微分方程的解析解理论的经典性成果可以追溯到 Cauchy 的工作. 函数方程的解析解的早期工作是属于 Koenigs, Siegel 和 Smajdor 等的, 而迭代函数方程和迭代微分方程解析解的研究则分别肇始于 Babbge 与 Eder 等的工作. 应该指出, 近年来关于迭代函数方程与迭代微分方程的理论有了长足的发展.

本书是专门论述函数方程和微分方程解析解的, 其中既有关于经典工作的回顾, 又有对近几十年来有关的重要结果的较系统的介绍, 其中包括我国学者司建国、张伟年等的重要工作, 也包括作者近年来所做的一些工作.

本书共分 5 章. 第 1 章主要叙述在实域或复域上一元与多元幂级数、解析函数的知识, 在幂级数运算方面着重阐述了幂级数代入幂级数的表示方法. 这在本书中会经常用到. 最后, 归纳出在实域或复域上用幂级数法求函数方程与微分方程解析解的步骤. 第 2 章专门论述函数方程解析解的问题, 先从线性函数方程谈起, 接着讨论了 Schröder 方程和 Poincaré方程等非线性函数方程解析解的存在性, 引述了著名的 Siegel 引理和 Schröder 变换, 以备本书在许多地方的应用. 最后, 从讨论 Babbage 型方程入手, 论述了一些较广泛的迭代函数方程解析解的存在性问题. 它们中的某些方程在混沌理论、不变曲线理论研究中起着重要作用; 不含偏差变元的常微分方程与偏微分方程的解析理论是微分方程理论的重要组成部分. 第 3 章引述了 Cauchy 关于常微分方程以及 Cauchy 和 Kowalewskaja 关于偏微分方程解析解存在性的经典性工作. 接下来, 又在实域上讨论了二阶常微分方程与几类 Jabotinsky 方程的解析解的存在性问题. 众所周知, 关于泛函微分方程的解析解的研究相对滞后, 第 4 章就是论述有关偏差变元不依赖于未知函数的泛函微分方程

的解析解的存在性. 首先讨论线性泛函微分方程 (组) 的解析解的存在性问题. 再论及几个颇有意义的非线性泛函微分方程的解析解的存在性问题. 第 5 章论述偏差变元依赖于未知函数的泛函微分方程 (即迭代微分方程) 的解析解存在性. 先分别讨论了几类一阶迭代微分方程与二阶迭代微分方程的解析解的存在性, 然后, 采用一种待定函数方法讨论了一类 n 阶迭代微分方程解析解的存在性.

由于作者水平有限, 书中难免有疏漏之处, 敬请读者指正. 若能引起读者研究函数方程和微分方程解析解的兴趣, 我们将感到欣慰.

作　者

2008 年 4 月

目　录

第1章 预备知识

如果一个方程 (指函数方程、常微分方程、泛函微分方程、偏微分方程和积分方程等, 以下统称方程) 的解可以展开成幂级数, 那么就可以用幂级数解法来求这些方程的解. 通常, 这种有正的收敛半径的解被称为*解析解*. 众所周知, *幂级数解法*是求方程解析解或寻找方程解析解存在唯一性的有效方法, 所求得方程的解析解为讨论方程解的渐近性态和解的近似表达式创造了有利条件, 为许多有重要意义的特殊函数的产生开辟了蹊径, 所有这些在自然科学的许多领域中有着广泛的应用.

1.1 幂 级 数

在函数级数及其一切无穷级数中幂级数占有最重要的地位. 所谓*幂级数*是指下面的函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \tag{1.1}$$

或更一般的形式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots + a_n(x-x_0)^n + \cdots, \tag{1.2}$$

其中, $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 叫*系数*, x_0 是一个固定的常数. 不难看出, (1.1) 是 (1.2) 的特殊形式. 在 (1.1) 中以 $x-x_0$ 代换 x 就能得到 (1.2), 因而, 不失一般性, 我们着重讨论特殊形式的幂级数 (1.1).

还要指出, 上面的幂级数不局限于实的幂级数 (指系数与变数均为实的), 对于具有复变量和复系数的幂级数理论, 它完全平行于实的幂级数理论. 鉴于此, 我们的叙述不再区分实的幂级数与复的幂级数. 虽然习惯于用 z 表示复变量, 但在本节中, x 表示实变数或复变数.

1.1.1 幂级数的收敛半径

下面叙述的 Abel 定理表明了幂级数收敛性的特征.

定理 1.1.1(Abel) 若幂级数 (1.1) 在 $x=\xi$ 处收敛, 则它对任一个适合 $|x|<|\xi|$ 的值 x 都绝对收敛; 反之, 若 (1.1) 在 $x=\xi$ 处发散, 则它对任何适合 $|x|>|\xi|$ 的值 x 都发散.

证明 如果 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} a_n\xi^n = 0$, 故存在 $M > 0$, 使 $|a_n||\xi|^n < M$. 当 $|x| < |\xi|$ 时, 令 $q = \left|\frac{x}{\xi}\right| < 1$, 就有

$$|a_n x^n| < M\left|\frac{x}{\xi}\right|^n = Mq^n.$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ 收敛, 定理第一部分得证.

第二部分证明是明显的. 因为如果适合 $|x| > |\xi|$ 的 x 使 (1.1) 收敛, 则由定理第一部分结论, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\xi^n$ 必收敛, 这与假设相矛盾.

根据 Abel 定理, 可以看出幂级数 (1.1) 的收敛范围的大致情况, 并可以给出下面的定义.

定义 1.1.1 若数 $R \geqslant 0$ 满足

(i) 当 $|x| < R$ 时, (1.1) 绝对收敛;

(ii) 当 $|x| > R$ 时, (1.1) 发散;

则称数 R 为幂级数 (1.1) 的**收敛半径**.

不言而喻, 当 $0 < R < +\infty$, 就意味着实幂级数 (1.1) 在区间 $(-R, R)$ 上收敛, 而复幂级数 (1.1) 在开圆盘 $|x| < R$ 上收敛; 当 $R = 0$, 就意味着 (1.1) 仅在原点 $x = 0$ 处收敛; 当 $R = +\infty$, 就意味着实幂级数 (1.1) 在 $(-\infty, +\infty)$ 内收敛, 而复幂级数 (1.1) 在整个复平面上处处收敛.

为了求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, 下面的公式是有用的.

定理 1.1.2(Cauchy-Hadamard) 幂级数 (1.1) 的收敛半径

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}}. \tag{1.3}$$

证明 式 (1.3) 显然等价于

$$R = \underline{\lim_{n\to\infty}} |a_n|^{-\frac{1}{n}}. \tag{1.4}$$

故只需证明 (1.4) 成立即可.

首先, 假设 $0 < R < +\infty$. 一方面, 由 (1.4) 知, 对任意的 $\varepsilon > 0$, 必存在正整数 N, 当 $n > N$ 时, 有

$$|a_n|^{-\frac{1}{n}} > R - \varepsilon,$$

或

$$|a_n| < \frac{1}{(R-\varepsilon)^n}.$$

这样, 必存在常数 $M > 0$, 使对于一切 n 成立

$$|a_n| < \frac{M}{(R-\varepsilon)^n}.$$

因而, 当 $|x| < R$, 可取 ε, 使得 $\left|\dfrac{x}{R-\varepsilon}\right| < 1$, 于是

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n < M \sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{x}{R-\varepsilon}\right|^n$$

收敛, 故 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 绝对收敛.

另一方面, 仍由 (1.4), 对任意 $\varepsilon > 0$, 必存在无穷多个 n_k, 使 $|a_{n_k}|^{-\frac{1}{n_k}} < R+\varepsilon$, 即

$$|a_{n_k}| > \frac{1}{(R+\varepsilon)^{n_k}}.$$

若 $|x| > R$, 则可取 ε, 使得 $\left|\dfrac{x}{R+\varepsilon}\right| > 1$, 于是 $a_{n_k} x^{n_k}$ 不趋于 0, 因而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 发散. 从而 (1.4) 得证.

关于 $R = 0$ 及 $R = +\infty$ 的情况, 证明略.

1.1.2 幂级数的性质

幂级数有许多重要性质, 它们在以后讨论解析函数性质时起作用.

1. 幂级数的微分与积分

不难确定幂级数 (1.1) 经逐项求导与逐项求积后所得到的幂级数分别为

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n x^n)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \tag{1.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}. \tag{1.6}$$

定理 1.1.3 幂级数 (1.5)、(1.6) 与幂级数 (1.1) 具有相同的收敛半径.

证明 只需证明 (1.5) 与 (1.1) 具有相同的收敛半径即可. 因为将 (1.6) 逐项求导就得到 (1.1).

设 x_0 是幂级数收敛域 $|x| < R$ 内任一不为零的点. 由定理 1.1.1 的证明可知存在正数 M 与 $r(r < 1)$ 对一切自然数 n, 都有

$$|a_n x_0^n| < Mr^n.$$

于是,

$$\left|na_n x_0^{n-1}\right| = \left|\frac{n}{x_0}\right| |a_n x_0^n| < \frac{M}{|x_0|} nr^n.$$

由正项级数比较判别法知, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nr^n$ 收敛. 由此不等式及比较判别法, 可推知幂级数 (1.5) 在点 x_0 是绝对收敛的. 考虑到 x_0 是 $|x| < R$ 内任一点, 就证得 (1.5) 在 $|x| < R$ 内收敛.

现在证明幂级数 (1.5) 对一切满足 $|x| > R$ 的 x 都发散. 若不然, (1.5) 在点 x_0(这里 $|x_0| > R$) 收敛, 则必存在一数 $\overline{x}$, 使 $|x_0| > |\overline{x}| > R$. 由定理 1.1.1 幂级数 (1.5) 在 $x = \overline{x}$ 处绝对收敛. 但是, 当取 $n \geqslant |\overline{x}|$ 时, 就有

$$\left|na_n \overline{x}^{n-1}\right| = \frac{n}{|\overline{x}|} |a_n \overline{x}^n| \geqslant |a_n \overline{x}^n|.$$

由比较原则推得 (1.1) 在 $\overline{x}$ 处绝对收敛, 这与所设 (1.1) 的收敛区间为 $(-R, R)$ 相矛盾. 从而证得幂级数 (1.5) 也有收敛域 $|x| < R$. 证毕.

2. 幂级数的相等

定义 1.1.2　若两个幂级数在原点某邻域内有相同的和函数, 则称这两个幂级数在这个邻域内**相等**.

定理 1.1.4　若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 在原点某邻域内相等, 则它们的同次幂项的系数相等, 即 $a_n = b_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$.

证明　根据定义 1.1.2, 两幂级数的和函数是相同的, 求这两个幂级数的差, 就可得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = 0.$$

其中, $c_n = a_n - b_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$. 这表明幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在原点某邻域内处处收敛于 0. 特别地, 对于原点 $x = 0$, 幂级数和必为 0, 从而c_0=0, 即 $a_0 = b_0$. 现在在此邻域内对 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 逐项求导, 显然 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1}$ 也在这个邻域内处处收敛于 0. 特别地, 对于 $x = 0$, 又可得 c_1=0, 即 $a_1 = b_1$. 继续进行求导并令 $x = 0$, 就能求得所有 c_n=0, 即得到 $a_n = b_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$. 证毕.

3. 幂级数的四则运算

对于收敛幂级数来说, 有着同多项式类似的运算性质.

定理 1.1.5 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径分别为 R_a 和 R_b, 则

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n x^n, \qquad |x| < R_a,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \quad |x| < R,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \qquad |x| < R,$$

其中, λ 为常数, $R = \min\{R_a, R_b\}$, $c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k b_{n-k}$.

证明 由数项级数的相应性质可推得要证的结论.

依照上述定理中的乘法公式, 得到如下的推论.

推论 若 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R, 则在 $|x| < R$ 内成立

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0) x^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^n, \quad m = 1, 2, \cdots,$$

其中, 系数 $a_n^{(m)}$ 是由原级数的系数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ 施行加法与乘法就能得到的.

最后, 简单地介绍关于幂级数的除法运算. 因为

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \cdot \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n},$$

所以只需讨论如何将 $\dfrac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n}$ 表示成幂级数, 剩下的问题就是两个幂级数相乘的问题.

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 有正的收敛半径, 且 $b_0 \neq 0$. 假定

$$\frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

为求出 $c_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$, 将上式表示为

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = 1.$$

应用待定系数法, 应有

$$b_0 c_0 = 1 \text{ 或 } c_0 = \frac{1}{b_0};$$

$$b_0 c_1 + b_1 c_0 = 0 \text{ 或 } c_1 = -\frac{b_1 c_0}{b_0} = -\frac{b_1}{b_0^2};$$

$$b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 = 0 \text{ 或 } c_2 = -\frac{b_1 c_1 + b_2 c_0}{b_0} = \frac{b_1^2}{b_0^3} - \frac{b_2}{b_0^2}.$$

依次继续下去, 可以求得所有的 $c_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$. 可以证明所得的幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 在原点的某邻域内收敛, 在此, 证明过程略去.

4. 幂级数代入幂级数

为了讨论将一个幂级数代入另一个幂级数的问题, 先来讨论由已知幂级数序列 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} (m = 0, 1, 2, \cdots)$ 组成的所谓二重级数

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n\right\}. \tag{1.7}$$

根据绝对收敛的二重级数的可交换性, 可以得到如下的结论: 若对于取定的 x 值, 级数 $\sum_{m=0}^{\infty}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} |a_{nm}||x|^n\right\}$ 收敛, 则二重级数 (1.7) 也收敛, 且

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n x^n,$$

其中, $F_n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$. 换言之, 在所述的条件下, 存在可交换性

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nm} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}\right) x^n. \tag{1.8}$$

定理 1.1.6 设

$$\varphi(y)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n y^n,\qquad |y|<R,$$

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,\quad |x|<r.$$

若 $|a_0|<R$, 则复合函数 $\phi(f(x))$ 在原点某邻域内可以展开成 x 的幂级数.

证明 设 $|x|<r$. 考察级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|a_n||x|^n$. 因为它的和函数是连续的, 注意到 $|a_0|<R$, 所以存在原点足够小的邻域, 对于这个邻域中的 x 成立

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n x^n|<R,$$

从而级数

$$|b_0|+\sum_{m=1}^{\infty}|b_m|\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x|^n\right)^m \tag{1.9}$$

是收敛的. 依定理 1.1.5 的推论, 可假定

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x|^n\right)^m=\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(m)}|x|^n.$$

于是, (1.9) 又可写成

$$|b_0|+\sum_{m=1}^{\infty}|b_m|\left(\sum_{n=0}^{\infty}A_n^{(m)}|x|^n\right).$$

因为 $A_n^{(m)}$ 是由 $|a_0|,|a_1|,\cdots,|a_n|$ 经加法和乘法计算得到, 而 $a_n^{(m)}$ 是由 a_0, $a_1,\cdots,a_n$ 经同样步骤计算得到的, 显然有 $\left|a_n^{(m)}\right|\leqslant A_n^{(m)}$. 因而, 对于上述原点邻域内的 x, 级数

$$|b_0|+\sum_{m=1}^{\infty}|b_m|\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n^{(m)}||x|^n\right)$$

收敛. 另外, 利用上面叙述的结论, 有

$$b_0+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^m=b_0+\sum_{m=1}^{\infty}b_m\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(m)}x^n\right)=b_0+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}b_ma_n^{(m)}\right)x^n.$$

因此, 在原点的上述邻域内, 有

$$\varphi(f(x))=b_0+\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}b_ma_n^{(m)}\right)x^n. \tag{1.10}$$

定理证毕.

附注　在方程解析解的研究中, 要经常遇到将一个幂级数代入另一个幂级数的运算. 特别地, 在定理 1.1.6 中, 当 $a_0 = 0$ 时, 定理的条件 $|a_0| < R$ 肯定得到满足, 而且此时将幂级数 $f(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 代入 $\varphi(y) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n y^n$, 所得的幂级数 (1.10) 可写成

$$\varphi(f(x)) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m a_n^{(m)} \right) x^n. \tag{1.11}$$

当考虑到 $a_0 = 0, a_n^{(m)}$ 就有简洁的表达式, 即

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m a_n^{(m)} = \sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=n \\ m=1,2,\cdots,n}} b_m a_{l_1} \cdots a_{l_m},$$

其中, $\sum$ 是对一切分拆 $n = l_1 + \cdots + l_m$ 求和, 以后总假设 $l_1, l_2, \cdots, l_m$ 是整数, 且 $0 < l_m \leqslant \cdots \leqslant l_1$. 于是就有

$$\varphi(f(x)) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{\substack{l_1+\cdots+l_m=n \\ m=1,2,\cdots,n}} b_m a_{l_1} \cdots a_{l_m} \right) x^n. \tag{1.12}$$

这个结果以后要多次用到.

另外, 定理 1.1.6 中给出了复合函数 $\varphi(f(x))$ 在原点某邻域内展开成幂级数的条件. 在以后的研究中通常只需在原点的充分小的邻域内展开 $\varphi(f(x))$, 并不需要确定展开式的具体的收敛范围.

现在, 利用定理 1.1.5 和定理 1.1.6, 也可以进一步讨论两个幂级数商的问题. 假设

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < R_1, \tag{1.13}$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \quad |x| < R_2. \tag{1.14}$$

为讨论 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 的幂级数展开问题, 我们考察

$$F(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}.$$

根据定理 1.1.5 的乘法法则, 只需证明函数 $\dfrac{1}{g(x)}$ 在原点某邻域内能展成幂级数即

可. 假定 $b_0 \neq 0$, 不妨设 $b_0 = 1\left(否则就以\ \frac{1}{b_0}f(x)\ 代替\ f(x)\right)$, 就有

$$\frac{1}{\varphi(x)} = \frac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - \cdots, \quad |y| < 1,$$

$$y = b_1 x + b_2 x^2 + \cdots,$$

这样根据定理 1.1.6, 将这后一个幂级数代入前一个幂级数就能完成展开 $\frac{1}{g(x)}$ 的工作. 至此, 就得到下面的定理.

定理 1.1.7 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 分别可展成幂级数 (1.13) 和 (1.14), 则函数 $F(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ 可在原点某邻域上展成幂级数.

1.1.3 多变数的幂级数

定义 1.1.3 按照变数 x 与 y(x, y 为复数或实数) 的正整数次幂排列的形如

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j \tag{1.15}$$

的二重级数, 叫做两变数 x 和 y 的幂级数, 其收敛范围在许多方面与单变量幂级数不相同, 但仍有下面的定理.

定理 1.1.8 若在 $x = x_0$, $y = y_0$(x_0 与 y_0 均异于零), 幂级数 (1.15) 收敛, 则在满足 $|x| < |x_0|$ 与 $|y| < |y_0|$ 的所有点幂级数 (1.15) 绝对收敛.

证明 由于二重级数 $\sum\limits_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} x_0^i y_0^j$ 收敛, 故存在正数 L, 使 $\left|a_{ij} x_0^i y_0^j\right| \leqslant L$. 若 $|x| < |x_0|, |y| < |y_0|$, 则

$$\left|a_{ij} x^i y^j\right| \leqslant \left|a_{ij} x_0^i y_0^j\right| \left|\frac{x}{x_0}\right|^i \left|\frac{y}{y_0}\right|^j,$$

于是

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \left|a_{ij} x^i y^j\right| \leqslant L \sum_{i,j=0}^{\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right|^i \left|\frac{y}{y_0}\right|^j,$$

而右边是收敛的, 所以定理得证.

不难看出, 在定理 1.1.8 的条件下, 可以推知: $\sum\limits_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j$ 在以坐标原点为中心, 以点 (x_0, y_0) 为一个顶点的整个开矩形内绝对收敛.

现在能够进一步推广定理 1.1.6 到下面的定理.

定理 1.1.9　设

$$\varphi(y,z)=\sum_{k,m=0}^{\infty}c_{km}y^kz^m,\quad |y|<R,|z|<R,$$

$$y=f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad z=g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n,\quad |x|<r.$$

若 $|a_0|<R,|b_0|<R$, 则复合函数 $\varphi(f(x),g(x))$ 在原点的某邻域内可以展开成 x 的幂级数.

证明可仿照定理 1.1.6 的证明给出.

最后, 还可以用同样的方法给出*多变数幂级数*

$$\sum_{l_1,l_2,\cdots,l_n=0}^{\infty}a_{l_1l_2\cdots l_n}x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$$

的定义, 并讨论它的收敛范围等性质.

1.2　解析函数与解析解

众所周知, 能够由幂级数表示的函数被称为*解析函数*, 这个解析函数首先是 Laplace 认识到它的重要性的. 后来又被 Weierstrass 发展了. 由此可见, 解析函数的概念是与函数的幂级数展开式有密切关系的. 另外, 在本书中研究方程的解析解, 也就是讨论方程解析函数或幂级数形式的解的存在性、唯一性及求解方法.

1.2.1　函数的幂级数展开式

1. *熟知的结论*

本节罗列几个常用的结论:

(1) 每一个幂级数在它的收敛区域内部都表示一个具有各阶连续导数的连续函数, 换言之, 每一个幂级数的和函数在其收敛域内都是具有任意阶导数的连续函数.

(2) 收敛的幂级数是其和函数的 Taylor 展开式.

(3) 一个函数若能展开成幂级数, 它就只能用一种方式展开. 换言之, 一个函数展开成幂级数的表示式是唯一的.

2. *函数幂级数展开的方法*

如上所述, 收敛的幂级数是其和函数的 Taylor 级数, 这就意味着要把函数展开成幂级数, 归根结底是要求出它的 Taylor 级数, 并证明这个级数收敛于给定的函数. 但这并不是说要把函数展开为幂级数就一定直接用 Taylor 级数不可, 在好多情况下, 不用 Taylor 公式反而更容易. 我们介绍两种幂函数展开方法.