普通高等教育“十一五”规划教材
普通高等院校数学精品教材

概率论与数理统计

涂　平　汪昌瑞　主编

華中科技大學出版社
http://www.hustp.com

普通高等教育"十一五"规划教材
普通高等院校数学精品教材

概率论与数理统计

涂　平　汪昌瑞　主编
叶　鹰　阎国辉　易校尉　编写

华中科技大学出版社
中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/涂平　汪昌瑞　主编.—武汉:华中科技大学出版社,2008年8月

ISBN 978-7-5609-4685-6

Ⅰ.概…　Ⅱ.①涂…　②汪…　Ⅲ.①概率论-高等学校-教材　②数理统计-高等学校-教材　Ⅳ.O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第102047号

概率论与数理统计　　涂　平　汪昌瑞　主编

策划编辑:李　德　　封面设计:潘　群

责任编辑:田　密

责任校对:张　琳　　责任监印:周治超

出版发行:华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山　邮编:430074　电话:(027)87557437

录　排:武汉众心图文激光照排中心

印　刷:华中科技大学印刷厂

开本:710mm×1000mm　1/16　印张:12.5　字数:248 000

版次:2008年8月第1版　印次:2008年8月第1次印刷　定价:19.80元

ISBN 978-7-5609-4685-6/O·454

内容提要

本书由华中科技大学数学系和文华学院老师编写而成.本书依据国家教育部颁布的“概率论与数理统计课程教学基本要求”组织教材内容.本书内容包括:随机事件及其概率;随机变量及其分布;二维随机变量及其分布;随机变量的数字特征;大数定律和中心极限定理;样本及其分布;参数估计;假设检验.

本书可供高等院校不同层次各专业的概率统计课程作为教材使用,也可供工程技术人员和管理人员自学以及有关人员参加自学考试作为参考书使用.

前 言

经过几年的办学实践，独立学院的办学指导思想更加实际，更加贴切社会的需要，对独立学院学生的基础情况也更加了解。其办学的规模和生源相对稳定。在这样的一个背景下，我们编写了这本教材。

概率论和数理统计是高等院校各专业的一门必修基础课，也是一门应用性很强的课程。本教材以国家教学大纲的基本要求为基准，对部分理论性较强的内容做了一定的删减，力求做到通过通俗的语言来帮助读者建立基本概念，并希望通过较多的例题，帮助读者掌握一些较难掌握的方法。

本教材分两个部分：第 1 章至第 5 章为概率论基础，计划学时数为 30～36 学时；第 6 章至第 8 章为数理统计方法，计划学时数为 16～24 学时。

本教材在每一章后都安排了一定数量的习题供读者练习。习题分 A、B 两套，其中 A 套为基本题，B 套为综合题。读者可以根据自己的实际情况取舍。

本教材由涂平、汪昌瑞主编，第 1 章由阎国辉编写，第 2 章由汪昌瑞编写，第 3 章由易校尉编写，第 4 章、第 5 章由涂平编写，第 6 章、第 7 章、第 8 章由叶鹰编写。教材的编写得到了华中科技大学数学系的大力支持和热心帮助，得到了林益教授的悉心指导，在此表示衷心感谢。

由于编者的水平有限，时间仓促，不足之处在所难免。恳请各位专家、同行和广大读者批评指正。

目　　录

第一部分　概　率　论

第二部分　数 理 统 计

第一部分 概 率 论

第 1 章 随机事件及其概率

概率论与数理统计是一门研究随机现象的学科，有着系统、丰富的内容和许多深刻的结论，同时作为研究和揭示随机现象的规律的主要理论工具，它已经在自然科学、国民经济、工程技术科学以及社会活动的几乎所有方面都得到了广泛的应用.

本章将先介绍随机现象、随机试验、样本空间、随机事件、随机事件的概率等概念，然后，讨论随机事件间的关系与运算、概率的性质和计算方法等. 最后，将对相互独立的随机事件作专门讨论.

1.1 随机现象及其统计规律性

1.1.1 随机现象举例

在客观世界中存在着两类不同的现象. 有一类现象称为确定性现象，其特点是在一定的条件下必然发生，或必然不发生. 例如，一枚硬币向上抛后必然下落；在市场经济条件下，某商品供过于求，其价格必不会上涨；在大气压等于 1 Pa 时，水加热到 100 ℃，必然会沸腾；在直角三角形中，斜边边长的平方是另两直角边边长的平方之和；鸡蛋得不到持续的适当温度，就一定不会孵出小鸡等. 而另一类现象称为非确定性现象，其特点是在一定的条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，且在试验和观察之前，不能预知确切的结果. 例如，随意抛掷一枚硬币，其结果可能是正面朝上，也可能是反面朝上；一堆产品中混有合格品和不合格品，从中随意抽取一件，则抽到的可能是合格品，也可能是不合格品；病人的病虽已是客观事实，但确诊之前，在医生看来病人究竟得的是什么病有多种可能. 因此，这里的“非确定性”有两方面的含义，一是客观结果的非确定性，一是主观猜测或判断的非确定性.

从另一角度看，非确定现象又可分为两类. 一类称为个别现象，是指原则上不能在相同条件下重复试验或观察的非确定现象. 例如，某人于某年某月某日出生；某一天是晴天还是雨天. 另一类称为随机现象，是指可以进行大量重复试验或观察，且其结果呈现出某种规律性的非确定现象.

1.1.2 随机现象的统计规律性

随机现象在个别或少量的试验或观测中呈现出不确定性，但是切不可认为随机现象就没有一定的规律了. 事实上，如果做了大量的重复试验或观察，就会发现一个随机现象中各个结果的出现总是服从一定规律的.

例如，在相同条件下，多次抛掷一枚均匀硬币，得到正面朝上的次数与抛掷的总次数之比随着次数的增多会呈现出集中在 0.5 附近的渐近趋势. 下面的表 1-1 列出了历史上一些科学家在抛掷硬币试验中得到的相关数据.

表 1-1

试验者	n	n_H	$f_n(H)=\frac{n_H}{n}$
德摩根	2 048	1 061	0.518 1
蒲丰	4 040	2 048	0.506 9
K. 皮尔逊	12 000	6 019	0.501 6
K. 皮尔逊	24 000	12 012	0.500 5
罗曼诺夫斯基	80 640	39 699	0.492 3

表 1-1 中 n 表示抛掷硬币的总次数，n_H 表示出现正面的次数，$f_n(H)=\frac{n_H}{n}$ 表示出现正面的次数占抛掷总次数的比例.

从表 1-1 中可以看到，随着试验次数的增加，$f_n(H)$ 的值将逐渐稳定于 0.5. 随机现象的这种在大量重复试验中呈现出来的稳定性或固有规律性称为统计规律性. 这种规律性的存在使得利用数学工具研究随机现象成为可能. 概率论与数理统计研究的主要问题就是研究随机现象的统计规律性.

1.2 随机试验与随机事件

1.2.1 随机试验

在研究自然现象和社会现象时，常常需要做各种试验. 把对某种自然现象作一次观察或进行一次科学试验，统称为一个试验. 以随机现象为观察对象的试验统称为随机试验，简称试验，并用字母 E 表示. 随机试验应具有如下三个特征：

1° 可以在相同条件下重复进行；

2° 试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3° 进行试验之前不能确定会出现哪一个结果.

例如：

E_1：掷一颗均匀对称的骰子，观察它朝上一面出现的点数；

E_2：掷一枚硬币，观察正面 H、反面 T 出现的情况；

E_3：一个人进行射击，接连射击两次，观察各次中靶与否；

E_4：在某一批产品中任选一件，检验其是否合格；

E_5：在一批灯泡中随意抽取一只，测试它的寿命；

E_6：记录某大超市一天内光顾的顾客人数.

显然，上述 6 个试验都具有特征 $1^\circ \sim 3^\circ$，故都是随机试验。

1.2.2　随机事件

在随机试验中，试验的每个可能的结果称为一个随机事件，简称事件，一般用英文大写字母 A、B、C 等表示事件. 例如，对上述的试验 E_1 来说，{出现 1 点}，{出现 2 点}，…，{出现 6 点} 都是随机事件. 而{出现偶数点} 也是一个随机事件. 值得注意的是，这些事件有的简单，有的复杂. 复杂的事件是由若干简单事件组成的. 当且仅当组成它的简单事件之一发生时它才发生. 如{出现偶数点} 是由{出现 2 点}，{出现 4 点}，{出现 6 点}3 个简单事件组成的. 因此，事件又分为基本事件和复合事件.

基本事件是指不能再分解的事件. 如某射手的射击结果，即{中靶} 和{脱靶}. 复合事件是指由若干基本事件组成的事件，如 E_1 中的{出现奇数点} 和{出现偶数点}. 必须指出，一个事件是否是基本事件，是相对试验的目的而言的，不可绝对化. 例如，E'：射击一次，观察命中与否；E''：射击一次，观察命中的环数. 这两个试验的方式相同，但目的不同，{命中} 这个事件在 E' 中是基本事件，在 E'' 中则是由{命中 1 环}，{命中 2 环}，…，{命中 10 环} 这十个基本事件复合而成的事件. 还须指出，每做一次随机试验，有且仅有一个基本事件发生.

随机事件中有两个极端情况值得注意，一个是每次试验都必然发生的事件，称为必然事件，记作 Ω. 必然事件可以认为是由全部的基本事件组成的. 另一个是每次试验中都不发生的事件，称为不可能事件，记作 $\varnothing$.

1.2.3　样本空间

随机试验的每一个基本结果称为样本点，记作 $w_1, w_2, \cdots$；随机试验的所有样本点组成的集合称为样本空间，记作 Ω，即 $\Omega = \{w_1, w_2, \cdots\}$.

例如，由上述试验 E_1，可得样本空间 $\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_6\}$，其中 $w_k = \{$出现 k 点$\}$ $(k = 1, 2, \cdots, 6)$ 就是样本点.

样本空间的引入使得我们能用集合这一数学工具来研究随机事件. 这样一来，试验 E 的任一事件都是其样本空间的一个子集. 特别地，E 的必然事件是其样本空间 Ω 自身，E 的不可能事件 $\varnothing$ 对应着空集. 前面所述 $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$ 的样本空间分别为：

$\Omega_1=\{1$ 点,2 点,3 点,4 点,5 点,6 点$\}$;

$\Omega_2=\{$正面,反面$\}=\{H,T\}$;

$\Omega_3=\{$(中,中),(中,未中),(未中,中),(未中,未中)$\}$;

$\Omega_4=\{$合格,不合格$\}$;

$\Omega_5=\{t\mid t\geqslant 0\}$;

$\Omega_6=\{0,1,2,\cdots\}$.

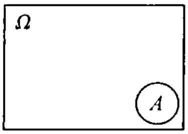

图 1-1

样本空间常用平面上一指定区域 Ω 来表示,而区域中的点,就是组成样本空间的样本点.在这种几何表示下,任一事件 A,可用区域 Ω 中一部分区域 A 来表示,部分区域 A 中的点就是组成 A 的样本点,如图 1-1 所示.

1.3 事件的关系及运算

在一个样本空间中,可以有许多随机事件,如果希望通过对简单事件的了解掌握较复杂的事件,需要研究事件间的关系和运算.因为事件是样本空间 Ω 的子集,所以事件之间的运算关系与集合之间的运算关系是一致的.但为了学习上的方便,下面介绍一些概率论中常用的事件之间运算关系的有关说法.

1. 包含与相等关系

注意到事件 A 发生是指当且仅当 A 中的样本点有一个发生.因此,若事件 A 发生必导致事件 B 发生,即 A 中的每个样本点必在 B 中,则称事件 A 包含于事件 B,或称事件 B 包含事件 A,记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$.例如,在"掷骰子"试验中,令 $A=\{$出现 2 点或 4 点$\}$,$B=\{$出现偶数点$\}$,则 $A\subset B$.

若事件 $A\supset B$ 且 $B\supset A$,则称事件 A 与事件 B 相等,记作 $A=B$.

2. 和(并)事件

由"事件 A 与事件 B 至少有一个发生"构成的事件,称为事件 A 与事件 B 的和(并)事件,记作 $A\cup B$.

例如 E_3 中,设 $C=\{$第一次命中$\}$,$D=\{$第二次命中$\}$,则 $C\cup D=\{$至少命中一次$\}$.

一般地,"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中至少有一个发生"是一个事件,称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的和(并)事件,记作 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$,简记为 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.类似地,称 $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的和(并)事件.

3. 积(交)事件

由"事件 A 与事件 B 同时发生"构成的事件,称为事件 A 与事件 B 的积(交)事件,记作 $A\cap B$ 或 AB.

例如 E_3 中,$C\cap D=\{$两次都命中$\}$.

与和事件情形相同，可把积事件的概念推广到 n 个事件及可列无穷多个事件的场合，即"n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 同时发生"是一事件，称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 的积(交)事件，记作 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$ 或 $A_1A_2\cdots A_n$，简记为 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$；称 $\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}A_k$ 为可列无穷多个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 的积(交)事件.

4. 差事件

由"事件 A 发生而事件 B 不发生"构成的事件，称为事件 A 与事件 B 的差事件，记作 $A-B$.

例如 E_3 中，$C-D=\{$第一次命中但第二次未命中$\}=\{$仅第一次命中$\}$.

5. 互不相容关系

若事件 A 与事件 B 不能同时发生，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 互不相容或互斥. 显然，基本事件之间都是互不相容的. 若多个事件中任意两个事件都互不相容，则称这多个事件两两互不相容.

例如 E_3 中，事件 $C=\{$第一次命中$\}$ 与事件 $E=\{$仅第二次命中$\}$ 是互不相容的.

当事件 A、事件 B 互不相容时，$A\cup B$ 可记作 $A+B$.

6. 互逆关系

若事件 A 与事件 B 必有一个发生，且仅有一个发生，即 $A\cup B=\Omega$，$AB=\varnothing$，则称事件 A 与事件 B 为互逆的，亦称事件 A 与事件 B 是对立事件，即称 A 是 B 的对立事件(或 B 是 A 的对立事件)，记作 $A=\overline{B}$(或 $B=\overline{A}$). 显然，$\overline{A}$ 发生是指 A 不发生，且有 $\overline{A}=\Omega-A$，$\overline{\overline{A}}=A$.

值得注意的是，若 A、B 互为逆事件则必互斥，但反之不然. 另外当事件 A 较为复杂而 $\overline{A}$ 较为简单时，往往通过研究 $\overline{A}$ 来研究 A.

当将事件看做集合时，上述 6 种关系和运算与集合中对应的关系和运算完全一致(见表 1-2). 例如，积事件 $A\cap B$ 是由那些既属于 A 又属于 B 的样本点构成的集合，A 与 B 互不相容则意味着构成 A 的样本点的集合与构成 B 的样本点的集合没有公共元素. 所有 6 种关系和运算都可由文氏图直观地表示出来(见图 1-2).

表 1-2

记　号	概　率　论	集　合　论
Ω	样本空间，必然事件	全集
$\varnothing$	不可能事件	空集
ω	样本点	元素
A	事件	子集
$\overline{A}$	逆事件	A 的余集
$A\subset B$	事件 A 发生导致事件 B 发生	A 是 B 的子集

续表

记　号	概　率　论	集　合　论
$A=B$	事件 A 与事件 B 相等	A 与 B 相等
$A\cup B$	事件 A 与事件 B 至少一个发生(和事件)	A 与 B 的和(并)集
$A\cap B$	事件 A、事件 B 同时发生(积事件)	A 与 B 的交集
$A-B$	事件 A 发生而事件 B 不发生	A 与 B 的差集
$A\cap B=\varnothing$	事件 A、事件 B 互不相容	A 与 B 无公共元素

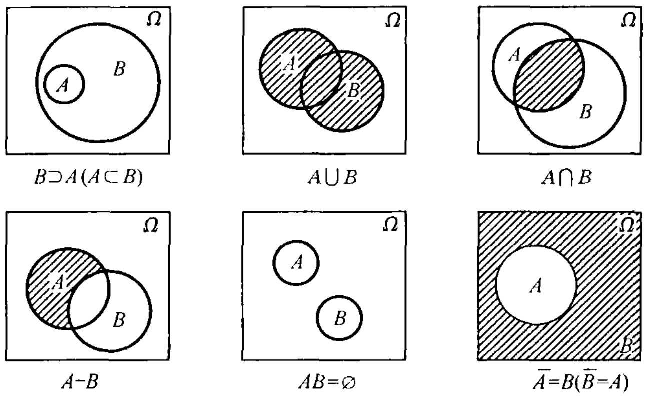

图 1-2

与集合论中集合的运算性质一样,事件之间的运算满足下述运算规律:

(1) 交换律　$A\cup B=B\cup A, AB=BA$;

(2) 结合律　$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C, (AB)C=A(BC)$;

(3) 分配律　$A(B\cup C)=AB\cup AC, A\cup BC=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(4) 对偶律　$\overline{A\cup B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

对有限和可列无穷多个事件的情形有

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{n}A_i}=\bigcap_{i=1}^{n}\overline{A}_i,\qquad \overline{\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcap_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k;$$

$$\overline{\bigcap_{k=1}^{n}A_k}=\bigcup_{k=1}^{n}\overline{A}_k,\qquad \overline{\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k}=\bigcup_{k=1}^{\infty}\overline{A}_k.$$

对偶律是很有用的性质,所以经常要被使用到. 另外易证下列常用等式的正确性:

$$A\cup A=A,\quad A\cup\Omega=\Omega,\quad A\cup\varnothing=A,\quad AA=A,\quad A\Omega=A,$$
$$A\varnothing=\varnothing,\quad A-B=A-AB=A\overline{B},\quad A\cup B=A+B\overline{A}=B+\overline{B}A.$$

例 1　设 A、B、C 是三个事件,试用 A、B、C 表示下列事件:

(1) A 发生,B 与 C 都不发生;　(2) A、B、C 中恰好有一个发生;

(3) A、B、C 中至少有一个发生；　(4) A、B、C 都发生；

(5) A、B、C 都不发生；　(6) A、B、C 中不多于两个发生.

解　(1) $(A-B)-C=A\bar{B}\bar{C}$；

(2) $A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C$；

(3) $A\cup B\cup C=\overline{\bar{A}\bar{B}\bar{C}}$；

(4) $ABC=\overline{\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}}$；

(5) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}=\overline{A\cup B\cup C}$；

(6) $\overline{ABC}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$

$$=\bar{A}\bar{B}\bar{C}\cup A\bar{B}\bar{C}\cup\bar{A}B\bar{C}\cup\bar{A}\bar{B}C\cup\bar{A}BC\cup A\bar{B}C\cup AB\bar{C}.$$

例 2　从图书馆中任取一本书，设事件 A 为“取到的是数学书”，事件 B 为“取到的是中文版图书”，问(1) AB 表示什么？(2) $A\subset B$ 表示什么？

解　(1) AB 表示的是事件“取到的是中文版的数学书”；

(2) $A\subset B$ 说明只要取到的是数学书，则该书一定是中文版的，所以 $A\subset B$ 表示这个图书馆中的数学书全是中文版的.

例 3　某城市由甲、乙两个水源与三部分管道 1,2,3 组成(见图 1-3)，每个水源都是用于供应城市的用水，设事件

$A_i=\{$第 i 号管道正常工作$\}$　$(i=1,2,3)$.

于是，“城市能正常供水”这一事件可表示为 $(A_1\cup A_2)\cap A_3$，“城市断水”这一事件可表示为

$$\overline{(A_1\cup A_2)\cap A_3}=\overline{(A_1\cup A_2)}\cup\bar{A}_3=(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2)\cup\bar{A}_3.$$

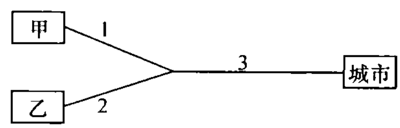

图 1-3

1.4　随机事件的概率

研究随机现象不仅要知道可能出现哪些事件，更重要的是研究各种事件出现的可能性的大小. 例如，商业保险机构为获得较大利润，就必须研究个别意外事件发生的可能性的大小，由此去计算保险费和赔偿费应多少为宜. 因此，要求有一个刻画事件发生可能性大小的数量指标，这种指标应能反映随机现象所呈现出的统计规律性. 在一次试验中事件 A 发生的可能性大小的量度，称为事件 A 的概率，记作 $P(A)$.

在此，只获得了 $P(A)$ 的一种定性描述. 在概率论的发展历史上，人们曾针对不同的问题，从不同的角度给出了定义和计算概率的各种方法. 然而，之前概率的定义都存在一定的缺陷. 正是在这些局限性较强的定义和算法的基础之上，人们才获得了概率论公理化定义的丰富营养，并由此建立了现代概率论.

下面介绍概率论发展早期的三种简单的概率定义，以及在这三种概率定义下给

出的计算公式所共有的性质.

1.4.1 概率的统计定义

定义 1.1 在相同条件下,进行了 n 次试验.如果事件 A 在这 n 次重复试验中出现了 n_A 次,则称比值 $\frac{n_A}{n}$ 为事件 A 发生的频率,记作 $f_n(A)$,即

$$f_n(A) = \frac{n_A}{n}.$$

显然,频率 $f_n(A)$ 的大小表示了在 n 次试验中事件 A 发生的频繁程度.频率越大,说明事件 A 发生就越频繁,在一次试验中 A 发生的可能性就越大,也就是事件 A 发生的概率越大,反之亦然.因此,直观的想法是用频率来描述概率.

具体分析一下本章开始时表 1-1 中给出"抛硬币"的试验结果,发现这样的想法是可行的.通过大量实验可知,对于可重复进行的试验,当试验次数 n 逐渐增大时,事件 A 的频率 $f_n(A)$ 都逐渐稳定于某个常数 p,即呈现出所谓的"稳定性".这种"稳定性"也就是通常所说的统计规律性.因此,可以用频率来描述概率,定义概率为频率的稳定值.这一定义被称为概率的统计定义.由此可知,在"抛硬币"试验中,事件 $A=\{出现正面\}$ 发生的概率为 0.5,这与人们的直观判断是一致的.显然,$f_n(A)$ 具有如下三条性质:

(1) 非负性　对任意的随机事件 A 有　$0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$;

(2) $f_n(\Omega) = 1$,　$f_n(\varnothing) = 0$;

(3) 有限可加性　若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 k 个两两互不相容的事件,则

$$f_n\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right) = \sum_{i=1}^{k} f_n(A_i).$$

用频率来刻画事件发生的可能性的大小,虽然直观,计算也简单,但应用上只有当 n 相当大时才可行.事实上人们不可能对每个事件都做出大量的试验进行观察,从而获得频率稳定值的近似值;当 n 较小时,由于频率有较大的波动性,也就不能将频率视作概率.

1.4.2 概率的古典定义

若随机试验 E 具有如下两个特征:

(1) 有限性　试验的样本空间只含有限个元素,即 $\Omega = \{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$;

(2) 等可能性　试验中每个基本事件发生的可能性相同,即

$$P(\{w_1\}) = P(\{w_2\}) = \cdots = P(\{w_n\}),$$

则称这样的试验为等可能概型.由于它是概率论发展初期的主要研究对象,所以也称为古典概型.

定义1.2 设E是只含有n个基本事件的古典概型,A是由m个基本事件组成的随机事件,则A的古典型概率定义为

$$P(A)=\frac{A\text{包含的基本事件数}}{\Omega\text{中基本事件总数}}=\frac{m}{n}. \tag{1-1}$$

式(1-1)给出了等可能概型中事件A的概率计算公式.

例4 将一枚硬币抛两次,观察出现正反面的情况.

(1) 设事件A_1为"恰好有一次出现正面",求$P(A_1)$.

(2) 设事件A_2为"至少有一次出现正面",求$P(A_2)$.

解 (1) 设随机试验E为:将一枚硬币抛两次,观察正反,则样本空间为$\Omega=\{HH,HT,TH,TT\}$.

Ω中包含$n=4$个元素,每个基本事件发生的可能性相同,故此试验为等可能概型.又$A_1=\{HT,TH\}$中包含的基本事件数$m=2$,故

$$P(A_1)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

(2) 因为$\overline{A}_2=\{TT\}$,或$A_2=\{HH,HT,TH\}$,于是

$$P(A_2)=1-P(\overline{A}_2)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\quad \text{或}\quad P(A_2)=\frac{3}{4}.$$

值得注意的是,本题中若设试验E为:将一枚硬币抛两次,观察正面出现的次数.这时样本空间$\Omega=\{0,1,2\}$中的每个基本事件发生的可能性是不一样的.因此就不能用式(1-1)来计算$P(A_1)$,$P(A_2)$.

例5 设电话号码由0,1,2,…,9共10个数字中任意5个数字组成(可以重复),某户的电话号码是51710,问当不知道这个电话号码时,一次拨号就能拨对该电话号码的概率是多少?

解 依题意全部电话号码有10^5个.当不知道电话号码时,拨10^5个电话中的任一电话号码的可能性是相等的.令A表示"一次拨号就能拨对该用户号码"这一事件,则这时全部基本事件数$n=10^5$,而事件A只包含一个基本事件,即$m=1$,按式(1-1)计算得

$$P(A)=\frac{1}{10^5}=0.000\,01.$$

可见,当不知道该用户电话号码时,一次拨号就能拨对该电话号码的可能性是很小的.

例6 箱中有100件外形一样的同批产品,其中正品60件,次品40件.现按下列两种方法抽取产品:

(1) 每次任取一件,经观察后放回箱中,再任取下一件,这种抽取方法称为有放回抽样;

(2) 每次任取一件,经观察后不放回,在剩下的产品中再任取一件,这种抽取方

法称为无放回抽样.

试分别用这两种抽样方法,求从这 100 件产品中任意抽取 3 件,其中有 2 件次品的概率.

解 (1) 有放回抽样.

由于每次抽取后都放回,故每次抽取产品都是从原 100 件中抽取,则从 100 件中任意抽取 3 件的所有可能的取法共有 100^3 件. 因此,样本空间中样本点总数 $n=100^3$. 再考虑事件 $A=\{3$ 件中有 2 件次品$\}$ 所含样本点数. 由于任取 3 件中有 2 件次品的所有可能取法有 C_3^2 种. 而 2 件次品是从 40 件次品中任意取出的,可能的取法又有 40^2 种. 另一件正品是从 60 件正品中任意抽取的,有 60 种取法. 由加法原理和乘法原理,A 包含的样本点数 $m=40^2\times 60+40\times 60\times 40+60\times 40^2=C_3^2\times 40^2\times 60$. 因此,由式(1-1) 有

$$P(A)=\frac{C_3^2\times 40^2\times 60}{100^3}=0.288.$$

(2) 无放回抽样.

由于每抽取一件经观察后不放回,因此第一次是从 100 件中任意抽取一件,第二次是从第一次抽取后剩下的 99 件中再任取一件,第三次是从第二次抽取后剩下的 98 件中任取一件. 从而,样本空间中样本点总数 $n=100\times 99\times 98$,A 中所含样本点的总数 $m=C_3^2\times 40\times 39\times 60$,再由式(1-1) 得

$$P(A)=\frac{C_3^2\times 40\times 39\times 60}{100\times 99\times 98}\approx 0.289.$$

一般地,采用有放回抽样和采用无放回抽样在计算事件的概率时结果是不一样的. 特别地,当被抽取对象的数目较小时,差异会更大. 但当被抽取对象的数目较大,而抽取的数目又较小时,在这两种抽样方式下所计算的概率数值相差不大. 本例的计算结果已显示出了这一事实.

例 7 袋中有 a 个白球、b 个黑球,现随机地将球一个个取出,问第 $k(1\leqslant k\leqslant a+b)$ 次取到黑球的概率是多少?

解 将 $a+b$ 个球看做是可以识别的,而将球一个个取出就相当于把 $a+b$ 个球排成一列,这样的排列共有 $(a+b)!$ 种,即 Ω 的样本点数为 $(a+b)!$.

设 A_k 为"第 k 次取到黑球"的事件,因为黑球有 b 个,故第 k 次取到黑球的方法有 b 种. 而除去第 k 次后,其他 $a+b-1$ 次取出 $a+b-1$ 个球的不同方法有 $(a+b-1)!$ 种. 所以 A_k 中的样本点数为 $b(a+b-1)!$. 于是

$$P(A_k)=\frac{b(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{b}{a+b},\quad k=1,2,\cdots,a+b.$$

注意到此题的解法有多种,这里是用排列的方法来求解的. 也可以用组合的方法来求解,请读者自己试一下. 另外,此题求得的概率与 k 无关,这说明这种情形与次序