普通高等教育"十一五"国家级规划教材

复变函数

卢玉峰　刘西民　编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

复变函数

卢玉峰 刘西民 编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，覆盖了复变函数的基本内容，力求语言简洁，并且对读者的数学基础要求较低。书中强调几何背景和应用，给出了许多在工程技术以及物理学等学科中的应用实例，同时配有大量难易程度不同的习题供读者选做。

全书共分八章，包括：复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、解析函数的级数展开、留数、保形映射、解析开拓、调和函数，其中有些内容在教学中可以根据实际情况作出取舍。

本书可作为数学类专业复变函数课程的教材，也可作为工程技术人员的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

复变函数/卢玉峰，刘西民编. —北京：高等教育出版社，2008.5

ISBN 978-7-04-023598-2

Ⅰ.复…　Ⅱ.①卢…②刘…　Ⅲ.复变函数-高等学校-教材　Ⅳ.O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第048996号

策划编辑 张长虹　**责任编辑** 张耀明　**封面设计** 王凌波　**责任绘图** 宗小梅
版式设计 马敬茹　**责任校对** 杨凤玲　**责任印制** 宋克学

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京新华印刷厂	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008年5月第1版
印　　张	13.25	印　　次	2008年5月第1次印刷
字　　数	240 000	定　　价	17.00元

物料号　23598-00

前　言

复变函数理论是在 17 和 18 世纪伴随着微积分的发展和解决实际问题的需要而发展起来的数学分支。复变函数理论不仅在数学许多分支有重要的作用，如: 微分方程、积分方程、算子理论、概率论等，而且是现代许多数学分支的鼻祖，如流形理论、同调理论等。同时复变函数理论又非常完美地应用到空气动力学、流体力学、电学、热学、理论物理等许多自然科学和工程技术领域。因此这门课程不仅对数学工作者是必备的，对其他自然科学和工程技术领域的工作者也是必不可少的。

复变函数又称为复分析，是实变函数微积分的推广和发展。因此它不仅在内容上与实分析有许多类似之处，而且在研究问题的方法与逻辑结构方面也很类似。当然，复变函数也有自身的特点，有自己的研究工具和方法。在学习过程中，应注意其与微积分理论之间的比较，从而加深理解，同时也需注意复变函数本身的特点，并掌握它自身所固有的理论和方法。

本书覆盖了复变函数的基本内容，强调复变函数的几何背景和应用，给出了许多复变函数在工程技术及物理学等各个学科应用的例子。同时配有大量难易程度不同的习题供读者选做。本书适合数学各个本科专业，可作为理工类高年级和研究生以及工程技术人员的复变函数教材和教学参考书，其中有些内容在教学中可以根据具体情况作出取舍。我们力求用简洁的语言介绍复变函数的基本理论，并且对读者的数学基础要求较低。

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，曾在大连理工大学应用数学系以及工科院系试用多年。本书的编写得到了大连理工大学应用数学系王仁宏先生的热情鼓励，应用数学系的全力支持，以及高等教育出版社的大力支持。编者谨向他们表示衷心的感谢！由于编者的水平所限，书中缺点、谬误在所难免，恳请专家、同行和广大读者批评指正。

编者

2007 年 10 月于大连理工大学

目　　录

第一章　复数与复变函数 1
§1.1　复数与复平面 1
§1.2　复平面上的点集与复变函数 11
第二章　解析函数 18
§2.1　解析函数 18
§2.2　初等函数 24
§2.3　解析函数的物理意义 33
第三章　复变函数的积分 37
§3.1　复积分的定义与计算 37
§3.2　积分与道路的无关性 46
§3.3　柯西 (Cauchy) 积分定理 51
§3.4　柯西积分公式及其应用 56
第四章　解析函数的级数展开 68
§4.1　复级数的基本性质 68
§4.2　泰勒 (Taylor) 级数 73
§4.3　幂级数 79
§4.4　洛朗 (Laurent) 级数 85
§4.5　零点与孤立奇点 91
第五章　留数 100
§5.1　留数定理 100
§5.2　留数定理在实积分计算中的应用 106
§5.3　辐角原理与儒歇 (Rouché) 定理 127
第六章　保形映射 135
§6.1　保形映射的几何意义 135
§6.2　分式线性变换 139
§6.3　初等函数构成的保形映射 151
§6.4　施瓦茨 – 克里斯托费尔 (Schwarz-Christoffel) 变换 156

§6.5 黎曼 (Riemann) 映射定理与边界对应定理 164
第七章 解析开拓 167
§7.1 解析开拓的概念与幂级数开拓 167
§7.2 透弧解析开拓与对称原理 175
§7.3 完全解析函数与黎曼面 181
第八章 调和函数 188
§8.1 调和函数与解析函数的关系 188
§8.2 平均值定理与极值定理 190
§8.3 泊松 (Poisson) 积分公式与狄利克雷 (Dirichlet) 问题 192
§8.4 保形映射的应用 198
参考文献 202

第一章 复数与复变函数

§1.1 复数与复平面

1. 复数

数系由有理数扩充到实数的一个原因是有一些在有理数范围内无解的方程在实数范围内有解, 例如: $x^2=3$. 同样, 有一些方程在实数范围内无解, 例如 $x^2=-1$. 因此, 有必要将实数系扩充, 使得在新数系下上述方程有解. 这样的数系将称为复数系. 本书中有理数集记为 $\mathbb{Q}$, 实数集记为 $\mathbb{R}$.

定义 1.1.1 若 $a,b\in\mathbb{R}$, 称有序实数对 (a,b) 为复数; 两个复数 (a,b) 和 (c,d) 相等当且仅当 $a=c$ 且 $b=d$.

复数全体记为 $\mathbb{C}$. 复数的加法运算定义为

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d).$$

复数的乘法运算定义为

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,bc+ad).$$

复数的减法运算和除法运算分别定义为加法和乘法的逆运算, 从而有

$$(a,b)-(c,d)=(a-c,b-d).$$

$$\frac{(a,b)}{(c,d)}=(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\frac{bc-ad}{c^2+d^2})\qquad(c^2+d^2\neq 0).$$

容易验证, $\mathbb{C}$ 上如上定义的加法和乘法运算满足域的所有公理, 即 $\mathbb{C}$ 上的加法和乘法满足结合律、交换律、乘法对加法满足分配律; (0,0) 和 $(1,0)$ 分别是加法和乘法的零元和单位元; $\mathbb{C}$ 的每个元有加法逆元, 每个非零元有乘法逆元. 因此 $\mathbb{C}$ 成为一个域, 称为复数域.

映射 $a\to(a,0)$ 定义了实数域 $\mathbb{R}$ 到 $\mathbb{C}$ 的子域

$$\{(a,0)\in\mathbb{C}|a\in\mathbb{R}\}$$

的一个同构. 因此可以将 $\mathbb{R}$ 看作 $\mathbb{C}$ 的子域. 将复数 $(a,0)$ 记为 a. 令 $\mathrm{i}=(0,1)$, 则 $b\in\mathbb{R}$ 时,

$$\mathrm{i}b=(0,1)(b,0)=(0,b).$$

从而

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+\mathrm{i}b.$$

因此, 以后我们不再用有序实数对表示复数, 而用 $z=a+\mathrm{i}b$ 来表示复数.

注意到 $\mathrm{i}^2=-1$, 所以方程 $x^2+1=0$ 在 $\mathbb{C}$ 中有根.

定义 1.1.2 若复数 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbb{R})$, 称 a 和 b 分别为 z 的实部和虚部, 且记为 $a=\operatorname{Re}z$, $b=\operatorname{Im}z$.

若 $a=\operatorname{Re}z=0$, 则称复数 z 为纯虚数. 若 $b=\operatorname{Im}z=0$, 则 z 是实数.

显然,$z_1=z_2$ 当且仅当 $\operatorname{Re}z_1=\operatorname{Re}z_2$ 且 $\operatorname{Im}z_1=\operatorname{Im}z_2$. 因此任何复数方程都可以转化为一对实数方程.

对复数 $z=a+\mathrm{i}b$, z 的模定义为 $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$, $\bar{z}=a-\mathrm{i}b$ 称为 z 的共轭. 下面是复数模与共轭的一些基本性质, 它们的验证留作练习.

(1) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$, $\quad\overline{z_1-z_2}=\overline{z_1}-\overline{z_2}$.

(2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$, $\quad\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}(z_2\neq0)$.

(3) $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $\quad\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$.

(4) $\operatorname{Re}z=\dfrac{z+\overline{z}}{2},\operatorname{Im}z=\dfrac{z-\overline{z}}{2\mathrm{i}}$.

(5) $\overline{\overline{z}}=z,|z|=|\overline{z}|,z\overline{z}=|z|^2$.

(6) $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\dfrac{z_1\overline{z_2}}{|z_2|^2}(z_2\neq0)$.

2. 复数的几何意义与极坐标表示

平面直角坐标系建立了有序实数对和 $xy-$ 平面上的点之间的一一对应. 在图 1.1 中, 有序数对 $(-2,3)$ 对应点 P, 它在 x 轴上方 3 个单位与 y 轴左边 2 个单位的交汇处. 所以对任意复数 $a+b\mathrm{i}$, 都可以找到 $xy-$ 平面上的唯一一个点, 它的坐标是 (a,b); 反之, 对 $xy-$ 平面上任意一点 (a,b), 唯一确定复数 $a+b\mathrm{i}$. 因此,$xy-$ 平面可以表示复数域 $\mathbb{C}$.

$xy-$ 平面被用来表示复数时称作复平面或 $z-$ 平面. 由于 x 轴上的点对应着实数, 故 x 轴称为实轴; y 轴上非原点的点对应着纯虚数, 故 y 轴称为虚轴.

今后经常把复数 z 简称为点 z, 复数 $z=a+\mathrm{i}b$ 与复平面上点 (a,b) 不加区别.

对复平面上任意一个点 z, 都可以连接原点和 z 得到一个以原点为起点, z 为终点的有向线段, 称其为由复数 z 决定的向量, 简称为向量 z. 向量由其长度和方向所决定, 向量在平移变换下保持不变. 例如由 $1+\mathrm{i}$ 决定的向量和以点 $2+\mathrm{i}$ 为起点, 以点 $3+2\mathrm{i}$ 为终点的向量是一样的, 如图 1.2. 由点 z 决定的向量的长度为 $|z|$.

设 v_1 和 v_2 分别是由点 z_1 和 z_2 决定的向量. 由平行四边形法则得到向量

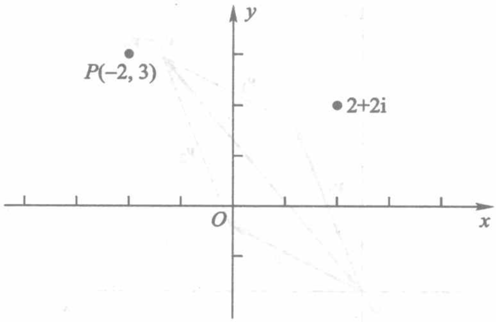

图 1.1

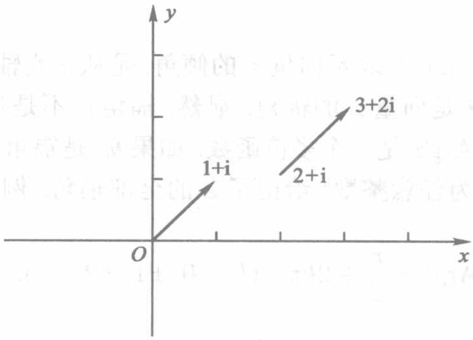

图 1.2

的和 $v = v_1 + v_2$(见图 1.3). 若 $z_1 = x_1 + \mathrm{i}y_1$, $z_2 = x_2 + \mathrm{i}y_2$, 则图 1.3 中向量 v 的终点坐标为 $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, 即向量 v 对应于点 $z_1 + z_2$. 因此复数加法和平面上的向量加法是一致的.

三角形一边的长度总是小于另外两边之和. 若把这个性质运用到图 1.3 中以 O, z_1 和 $z_1 + z_2$ 为顶点的三角形, 就得到三角不等式: 对任意两个复数 z_1 和 z_2 都有

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

由此可进一步得到另外一个三角不等式:

$$|z_2| - |z_1| \leqslant |z_2 - z_1|.$$

复平面上的点 $z = x + \mathrm{i}y$ 也可以用极坐标 (r, θ) 表示, 即

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

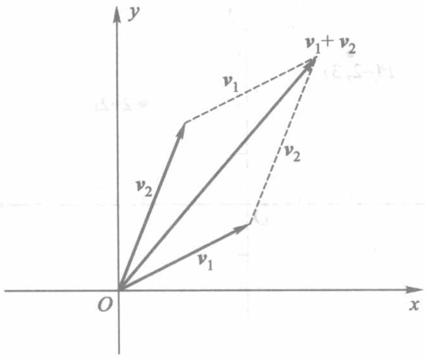

图 1.3

其中 r 是 z 的模, $r=|z|$. θ 表示向量 z 的倾角, 是从正实轴沿着逆时针方向度量的 (见图 1.4). 称 θ 是向量 z 的辐角. 显然, 辐角 θ 不是唯一的. 用 $\mathrm{Arg}z$ 表示向量 z 的辐角, 则 $\mathrm{Arg}z$ 是一个多值函数. 如果 θ_0 是辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的一个值, 则 $\mathrm{Arg}z=\theta_0+2k\pi$ (k 为任意整数) 给出了 z 的全部辐角. 例如, 辐角 Argi 的所有值为

$$\mathrm{Arg}\,\mathrm{i}=\frac{\pi}{2}+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

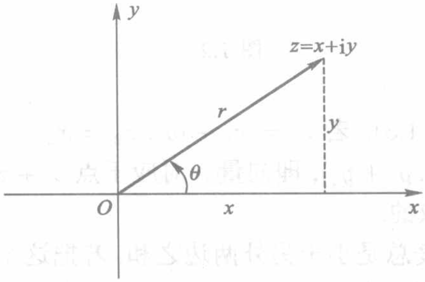

图 1.4

任意长度为 2π 的半开区间都包括辐角 $\mathrm{Arg}z$ 的一个值且只有一个值, 称这样的区间为 $\mathrm{Arg}z$ 的一个分支. 区间 $(-\pi,\pi]$ 称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主分支, 将区间 $(-\pi,\pi]$ 内 $\mathrm{Arg}z$ 的值称为 $\mathrm{Arg}z$ 的主值, 记为 $\arg z$. $\arg z$ 在负实轴处是不连续的且有 2π 的跳跃, 将这样的直线称为支割线. $\mathrm{Arg}z$ 的任意一个分支必定在某处有 2π 的跳跃. 用记号 $\mathrm{Arg}_\tau z$ 表示 $\mathrm{Arg}z$ 的一个分支, 取值在 $(\tau,\tau+2\pi]$ 中. 因此 $\mathrm{Arg}_{-\pi}z$ 即主值 $\arg z$.

有了上面的约定, $z=x+\mathrm{i}y$ 的极坐标表示为

$$z=x+\mathrm{i}y=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),$$

其中 r 是 z 的模, $r=|z|$. $\theta\in\operatorname{Arg}z$.

例 1.1.1 求 $\operatorname{Arg}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})$.

解 $r=|1+\sqrt{3}\mathrm{i}|=2$, 方程组 $\cos\theta=\dfrac{1}{2}$ 和 $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ 有解 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$, 因此 $\operatorname{Arg}(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 特别地, $\arg(1+\sqrt{3}\mathrm{i})=\dfrac{\pi}{3}$. □

若

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1),\qquad z_2=r_2(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2),$$

则

$$z_1z_2=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+\mathrm{i}(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)],$$

所以

$$z_1z_2=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1+\theta_2)].$$

从而得到

$$\operatorname{Arg}z_1z_2=\operatorname{Arg}z_1+\operatorname{Arg}z_2.$$

由此得到复数乘法的几何解释: 复数 z_1z_2 的模与辐角分别等于复数 z_1,z_2 的模之积与辐角之和 (见图 1.5).

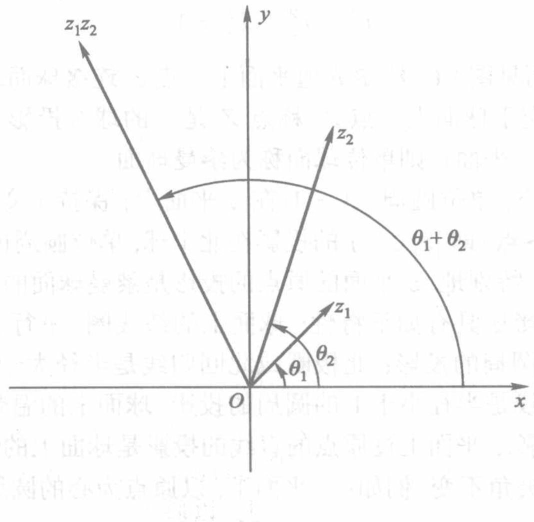

图 1.5

由于除法运算是乘法运算的逆运算, 立即可得

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+\mathrm{i}\sin(\theta_1-\theta_2)].$$

因此

$$\mathrm{Arg}(\frac{z_1}{z_2})=\mathrm{Arg}z_1-\mathrm{Arg}z_2,$$

复数除法的几何解释: 复数 $\frac{z_1}{z_2}$ 的模与辐角分别等于复数 z_1, z_2 的模之商与辐角之差.

例 1.1.2 写出 $\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$ 的极坐标形式.

解 由于 $1+\mathrm{i}$ 和 $\sqrt{3}-\mathrm{i}$ 的极坐标形式分别是

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4})$$

和

$$\sqrt{3}-\mathrm{i}=2(\cos\frac{-\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{-\pi}{6}).$$

因此得到

$$\frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{5\pi}{12}+\mathrm{i}\sin\frac{5\pi}{12}).\square$$

3. 黎曼 (Riemann) 球面与扩充复平面

下面给出用球面上的点表示复数的方法.

考虑 3 维欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中的单位球面, 球面方程为

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1.$$

球面及其赤道平面见图 1.6. 给定赤道平面上一点 z, 连接球面北极 $N=(0,0,1)$ 和点 z 的直线必交于球面上一点 Z, 称点 Z 是 z 的球极投影. 如果将赤道平面作为复平面 (或 $z-$ 平面), 则单位球面称为黎曼球面.

在球极投影下, 单位圆周 $|z|=1$(在 z 平面上) 保持不变 (即 $z=Z$), 为赤道. 单位圆周外各点 (即 $|z|>1$) 的投影在北半球, 单位圆周内各点 (即 $|z|<1$) 的投影在南半球. 特别地, z 平面的原点的投影是黎曼球面的南极.

易见球极投影还具有如下特性: 球面上的纬线圈 (平行于赤道) 是 z 平面上以原点为心的圆周的投影; 北极圈或北回归线是半径大于 1 的圆周的投影; 南极圈或南回归线是半径小于 1 的圆周的投影. 球面上的温带是平面上中心在原点的环形的投影. z 平面上过原点的直线的投影是球面上的经线圈. 球极投影保持这些曲线间夹角不变, 例如: z 平面上, 以原点为心的圆周与过原点的直线

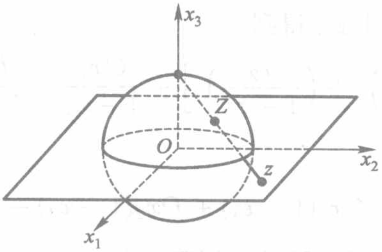

图 1.6

相交成直角; 黎曼球面上, 纬线圈与经线圈相交成直角.

例 1.1.3 若黎曼球面上点 $Z=(x_1,x_2,x_3)$ 在 z 平面上的投影是 $z=x+\mathrm{i}y$. 证明

$$x_1=\frac{2\mathrm{Re}z}{|z|^2+1},\qquad x_2=\frac{2\mathrm{Im}z}{|z|^2+1},\qquad x_3=\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}.$$

解 过北极 $N=(0,0,1)$ 和点 $(x,y,0)$ 的直线参数方程为

$$x_1=tx,\quad x_2=ty,\quad x_3=1-t,\qquad -\infty<t<\infty.$$

当 t 满足

$$1=x_1^2+x_2^2+x_3^2=t^2x^2+t^2y^2+(1-t)^2$$

或

$$1=t^2(x^2+y^2+1)+1-2t$$

时, 直线穿过球面. 显然, $t=0$ 对应黎曼球面的北极. 将

$$t=\frac{2}{x^2+y^2+1}=\frac{2}{|z|^2+1}$$

代入参数方程即得结论.

由此可知, 若点 (x_1,x_2,x_3) 是黎曼球面上一点, 在球极投影下与之对应的 z 平面上点 $x+\mathrm{i}y$ 的坐标为

$$x=\frac{x_1}{1-x_3},\qquad y=\frac{x_2}{1-x_3}.\square$$

例 1.1.4 证明 z 平面上所有的直线和圆周在球极投影下对应于黎曼球面上的圆周.

解 在 z 平面上通常的圆周或直线的方程为

$$A(x^2+y^2)+Cx+Dy+E=0.$$

将例 1.1.3 中公式代入上式, 得到

$$A\left[\left(\frac{x_1}{1-x_3}\right)^2+\left(\frac{x_2}{1-x_3}\right)^2\right]+\frac{Cx_1}{1-x_3}+\frac{Dx_2}{1-x_3}+E=0.$$

上式可简化为

$$A(x_1^2+x_2^2)+Cx_1(1-x_3)+Dx_2(1-x_3)+E(1-x_3)^2=0.$$

由于 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, 故上面的方程可化为

$$A(1-x_3^2)+Cx_1(1-x_3)+Dx_2(1-x_3)+E(1-x_3)^2=0.$$

再除以 $(1-x_3)$, 得到

$$A(1+x_3)+Cx_1+Dx_2+E(1-x_3)=0,$$

或

$$Cx_1+Dx_2+(A-E)x_3+A+E=0.$$

上式是 3 维空间中的平面方程. 这就证明了 $z-$ 平面上的直线或圆周在球极投影下对应于上述方程表示的平面和球面的交, 即是圆周.□

上面结论的逆也是成立的, 即黎曼球面上每个圆周都是 $z-$ 平面上直线或圆周的投影.

显然北极 N 不是复平面上任一点的投影; 也就是说, 例 1.1.4 的公式中排除了点 $x_3=1$. 但可以给出这个特殊点的意义: 复平面上模非常大的点 (即离原点非常远) 投影到北极附近的点, 当 $|z|\to+\infty$ 时, 投影趋于北极. 因此 N 可以看成是 $z-$ 平面上的一个模为无穷的扩充复数的投影, 记这个复数为 ∞, 称为无穷大. 称 $\mathbb{C}_\infty=\mathbb{C}\cup\infty$ 为扩充复平面.

平面上两点的距离和它们球极投影点的距离有着很大的不同. 球面是有界的 (两点之间的距离不超过直径), 而平面是无界的 (两点之间的距离可以达到任意大). 下面的公式给出了它们之间的计算公式.

例 1.1.5 设 z 和 w 是复平面上两点, 这两点的球极投影 Z 和 W 的距离 (在 3 维空间下) 为

$$\operatorname{dist}(Z,W)=\frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}=\frac{2\operatorname{dist}(z,w)}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}.$$

解 设 (x_1,x_2,x_3) 和 $(\widehat{x_1},\widehat{x_2},\widehat{x_3})$ 分别是 Z 和 W 的坐标, $d=\operatorname{dist}(Z,W)$, 则

$$d^2=(x_1-\widehat{x_1})^2+(x_2-\widehat{x_2})^2+(x_3-\widehat{x_3})^2.$$

由于 $x_1^2+x_2^2+x_3^2=1$, $\widehat{x_1}^2+\widehat{x_2}^2+\widehat{x_3}^2=1$, 从而

$$d^2=2[1-(x_1\widehat{x_1}+x_2\widehat{x_2}+x_3\widehat{x_3})].$$

在例 1.1.3 中取 $z=x+\mathrm{i}y$ 和 $w=u+\mathrm{i}v$ 得到

$$\begin{aligned}
&1-(x_1\widehat{x_1}+x_2\widehat{x_2}+x_3\widehat{x_3})\\
=&1-\frac{4xu}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}-\frac{4yv}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}-\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}\frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}\\
=&\frac{2|z|^2+2|w|^2-4xu-4yv}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}\\
=&\frac{2(x^2+y^2)+2(u^2+v^2)-4xu-4yv}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}\\
=&2\frac{(x-u)^2+(y-v)^2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}=2\frac{\mathrm{dist}(z,w)^2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)},
\end{aligned}$$

结论得证.□

可以在扩充复平面上定义两点间距离: 如果 $z,w\in\mathbb{C}_\infty$, 定义 z 与 w 的距离 $d(z,w)$ 为它们在球面上的投影 Z 与 W 在 $\mathbb{R}^3$ 中的距离. 因此, 如果 $z,w\in\mathbb{C}$,

$$d(z,w)=\frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}}. \tag{1.1}$$

如果 $z\in\mathbb{C}$,

$$d(z,\infty)=\frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}. \tag{1.2}$$

练习 1.1

1. 证明对每个复数 z, $\mathrm{Re}\,(\mathrm{i}z)=-\mathrm{Im}\,z$.
2. 把复数方程 $z^3+5z^2=z+3\mathrm{i}$ 分解为两个实数方程.
3. 设 z 是复数且 $\mathrm{Re}\,z>0$, 证明 $\mathrm{Re}(\frac{1}{z})>0$.
4. 设 z_1,z_2 都是复数, 且 z_1+z_2 和 z_1z_2 都是负实数, 证明 z_1,z_2 都是实数.
5. 设 n 是正整数, 证明复数的双线性公式

$$(z_1+z_2)^n=z_1^n+\begin{pmatrix}n\\1\end{pmatrix}z_1^{n-1}z_2+\cdots+\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}z_1^{n-k}z_2^k+\cdots+z_2^n,$$

这里双线性系数 $\begin{pmatrix}n\\k\end{pmatrix}=\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

6. 证明点 $1,-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 和 $-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ 是等边三角形的顶点.
7. 证明点 $3+\mathrm{i},6$ 和 $4+4\mathrm{i}$ 是直角三角形的顶点.
8. 在复平面上描述下列方程的点的集合并画图.

(1) $\operatorname{Im} z = -2$;

(2) $|z-1+\mathrm{i}| = 3$;

(3) $|z-1| = |z-\mathrm{i}|$;

(4) $|z| = \operatorname{Re} z + 2$;

(5) $|z-1| + |z+1| = 7$;

(6) $\operatorname{Re} z \geqslant 4$.

9. 证明: 如果 $|z| = \operatorname{Re} z$, 则 z 是一个非负实数.

10. 证明：如果 $(\overline{z})^2 = z^2$, 则 z 是实数或纯虚数.

11. 证明：如果 $|z| = 1 (z \neq 1)$, 则 $\operatorname{Re}(\dfrac{1}{1-z}) = \dfrac{1}{2}$.

12. 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是实常数, z_0 是多项式方程

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

的一个根. 证明 $\overline{z_0}$ 也是该方程的根.

13. 证明点 z 关于直线 $ax + by = c (a, b, c$ 都是实数) 的对称点是

$$\frac{2\mathrm{i}c + (b - a\mathrm{i})\overline{z}}{b + a\mathrm{i}}.$$

14. 求出下面复数的辐角和极坐标形式.

(1) $-3+3\mathrm{i}$;(2) $-\pi\mathrm{i}$;(3) $-2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$;(4) $(1-\mathrm{i})(-\sqrt{3}+\mathrm{i})$;(5) $(\sqrt{3}-\mathrm{i})^2$; (6) $\dfrac{-1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}}$.

15. 用几何方法证明非零复数 z_1 和 z_2 满足 $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$ 的充要条件是它们具有相同的辐角.

16. 利用复数乘积 $(1+\mathrm{i})(5-\mathrm{i})^4$, 证明 $\dfrac{\pi}{4} = 4\arctan\dfrac{1}{5} - \arctan\dfrac{1}{239}$.

17. 证明向量 z_1 与 z_2 平行的充要条件是 $\operatorname{Im}(z_1\overline{z_2}) = 0$.

18. 设 z_1, z_2 和 z_3 是互不相同的点, ϕ 是辐角 $\operatorname{Arg}[(z_3 - z_1)(z_2 - z_1)]$ 的一个特殊的值. 证明

$$|z_3 - z_2|^2 = |z_3 - z_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 - 2|z_3 - z_1||z_2 - z_1|\cos\phi.$$

19. 计算下面复平面上的点在黎曼球面上的投影.

(1) i; (2) $6-8\mathrm{i}$; (3) $-\dfrac{3}{10} + \dfrac{2}{5}\mathrm{i}$.

20. (1) 证明点 z 和 $\dfrac{1}{\overline{z}}$ 在黎曼球面上的球极投影为赤道平面上的对称点.

(2) 证明点 z 和 $-\dfrac{1}{\overline{z}}$ 在黎曼球面上的球极投影是关于直径对称的.

21. 描述下面复平面上的点集在黎曼球面上的投影.

(1) 右半平面 $\{z : \operatorname{Re} z > 0\}$;

(2) 开圆盘 $\{z : |z| < 1/2\}$;

(3) 环面 $\{z : 1 < |z| < 2\}$;

(4) 点集 $\{z : |z| > 3\}$;

(5) 直线 $y = x$(包括 ∞).

§1.2 复平面上的点集与复变函数

1. 复平面上的点集

复变函数主要定义在复平面的区域或闭区域上, 本节给出这些点集的严格定义.

定义 1.2.1 设 r 是正实数. 满足不等式

$$|z - z_0| < r$$

的所有点称为开圆盘或以 z_0 为中心, 以 r 为半径的邻域. 设 G 是复平面上一个集合,$z_0 \in G$. 若存在以 z_0 为中心的一个邻域包含在 G 内, 则称 z_0 是 G 的一个内点.

例如, 不等式

$$|z + \mathrm{i}| < \frac{1}{2}$$

的解是以点 $-\mathrm{i}$ 为中心的邻域, 其半径为 $\dfrac{1}{2}$. 邻域 $|z| < 1$ 称为单位开圆盘.

若 G 为右半平面 $\mathrm{Re}\, z > 0$, 在图 1.7 中 z_0 是集合 G 的内点.

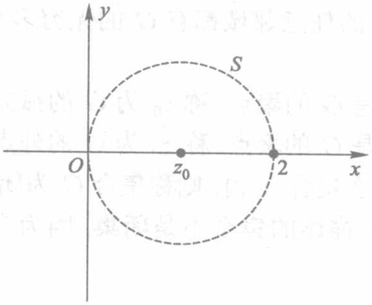

图 1.7

定义 1.2.2 若集合 G 的每个点都是它的内点, 称 G 为开集. 设 $w_1, w_2, \cdots, w_{n+1}$ 是复平面上 $n+1$ 个点, 对每个 $k = 1, 2, \cdots, n$, 令 l_k 表示连接点 w_k 与 w_{k+1} 的线段. 则 $l_1, l_2, \cdots, l_n$ 形成的连续链称为连接 w_1 和 w_{n+1} 的折线或多边形道路. 若集合 G 内每一对点 z_1 和 z_2 都可以用 G 内的折线连接起来, 则称集合 G 为连通集. 连通的开集称为区域.

不等式 $\mathrm{Im}\, z > 0$ 所表示的集合是开集. 不等式 $|z - 3| \geqslant 2$ 的集合 U 不是开集, 因为圆周 $|z - 3| = 2$ 上每点都不是 U 的内点. 实轴上开区间也不是开集, 因为它不包含任何开圆盘. 平面上所有点集去掉圆周 $|z| = 1$ 后得到的点集是