

全国180座城市考研辅导班指定用书

 文都教育

2009

考研数学

全真模拟试卷及精析

(数学三)

主编: 蔡子华

MATHS

最符合新大纲规定的模拟
最贴近真题难度的试卷
最详细易懂的专家解析



原子能出版社

2009

考研数学

全真模拟试卷及精析

(数学三)

主编: 蔡子华

图书在版编目(CIP)数据

考研数学全真模拟试卷及精析. 数学三/蔡子华主编. - 北京:原子能出版社,2008.8
ISBN 978 - 7 - 5022 - 4005 - 9

I. 考… II. 蔡… III. 高等数学 - 研究生 - 入学考试 - 解题 IV. 013 - 44
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 144132 号

考研数学全真模拟试卷及精析. 数学三

出版发行 原子能出版社(北京市海淀区阜成路 43 号 100037)
责任编辑 张关铭
特约编辑 师 潭
封面设计 王大龙
印 刷 湖北新华印务股份有限公司
经 销 全国新华书店
开 本 787 × 1092 毫米 1/16
印 张 9.5
版 次 2008 年 8 月第 1 版 2008 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978 - 7 - 5022 - 4005 - 9
定 价 16.00 元

编写说明

2009 年的考研复习即将进入冲刺阶段。对于广大考生来说,最大的愿望是能找到一种既能尽快提高自己熟悉考试题型及掌握特定解法的能力,又有实战感受的方法。

本模拟试卷即为此而编写。

《2009 考研数学全真模拟试卷及精析》严格按照《2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲》的考试要求编写,考点覆盖全面,题型和题量与 2009 年考研试题完全一致,难度与真题相当。试卷后附有分析及详细解答。

本模拟试卷的编者长期从事高校数学教学工作,参加过多种层次的考试命题,并连续多年参与研究生入学数学考试的辅导及阅卷工作;熟悉考试的重难点及考生的知识薄弱点,对命题规律等亦颇有研究。

相信本模拟试卷能在有效提高应试技巧和实战能力诸方面给考生以较大的帮助。顺祝广大考生取得理想的考研成绩。

编者
2008 年 8 月

目 录

数学三	全真模拟试卷(一).....	(2)
数学三	全真模拟试卷(二).....	(9)
数学三	全真模拟试卷(三)	(16)
数学三	全真模拟试卷(四)	(23)
数学三	全真模拟试卷(五)	(30)
数学三	全真模拟试卷(六)	(37)
数学三	全真模拟试卷(七)	(44)
数学三	全真模拟试卷(八)	(51)
数学三	全真模拟试卷(九)	(58)
数学三	全真模拟试卷(十)	(65)
数学三	全真模拟试卷(一)精析	(71)
数学三	全真模拟试卷(二)精析	(78)
数学三	全真模拟试卷(三)精析	(85)
数学三	全真模拟试卷(四)精析	(91)
数学三	全真模拟试卷(五)精析	(97)
数学三	全真模拟试卷(六)精析.....	(104)
数学三	全真模拟试卷(七)精析.....	(111)
数学三	全真模拟试卷(八)精析.....	(118)
数学三	全真模拟试卷(九)精析.....	(124)
数学三	全真模拟试卷(十)精析.....	(132)

2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(三) 全真模拟试卷(一)

试卷编号:

试卷编号:

此编号考生不得填写

考试科目 数 学 (三)

准考证编号 _____
考 试 科 目 _____
报考学科、专业 _____
报考研究方向 _____
报 考 单 位 _____

题 号	得 分	评 卷 人
一		
二		
三	(15)	
	(16)	
	(17)	
	(18)	
	(19)	
	(20)	
	(21)	
	(22)	
	(23)	
总分		

注 意 事 项

1. 以上各项除试卷编号之外必须填写清楚。
2. 答案必须写准确、清晰、必须写在试卷上。
3. 字迹要清楚、卷面要整洁。
4. 草稿纸另发,考试结束,统一收回。

注意:此半页考生不得填写

数学三 全真模拟试卷(一)

得分	评卷人

一、选择题: 1—8 小题, 每小题 4 分, 共 32 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项符合题目要求, 把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设 $f'(x_0) = 0, f''(x_0) < 0$, 则必存在 $\delta > 0$, 使得().

- (A) 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内是向上凸的
 (B) 曲线 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 内是向上凹的
 (C) 函数 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内单调增加, 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内单调减少
 (D) 函数 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \delta, x_0)$ 内单调减少, 在 $(x_0, x_0 + \delta)$ 内单调增加

(2) 当产量为 x 时, 产品的总成本为 $C(x) = C_0 + C_1(x)$, 其中 C_0 是固定成本, $C_1(x)$ 是可变成本. 则产品的边际成本().

- (A) 与 C_0 和 $C_1(x)$ 都有关 (B) 与 C_0 有关, 而与 $C_1(x)$ 无关
 (C) 与 C_0 无关与 $C_1(x)$ 有关 (D) 与 C_0 和 $C_1(x)$ 都无关

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 设 $u_n = \frac{1}{2}(|a_n| - a_n), v_n = \frac{1}{2}(|a_n| + a_n)$ 则().

- (A) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都发散 (B) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散
 (C) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛 (D) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛

(4) 下列说法中正确的是().

- (A) 曲线 $y = f(x)$ 在 (x_0, y_0) 有切线, 则函数 $y = f(x)$ 在 x_0 点处一定可微
 (B) 函数 $y = f(x)$ 的微分是 $\Delta x \rightarrow 0$ 时与 Δx 同阶的无穷小量
 (C) 当 $f'(x_0) \neq 0$ 时, $dy - \Delta y$ 是比 Δy 高阶的无穷小 ($\Delta x \rightarrow 0$)
 (D) 函数 $y = f(x)$ 的微分是 $\Delta x \rightarrow 0$ 时与 Δy 等价的无穷小

(5) 同阶矩阵 A, B 相似, 则结论“①若 A 可逆则 B 一定可逆; ② A 相似于对角矩阵时 B 必相似于对角矩阵; ③若 α 是 A 的特征向量, 则它也是 B 的特征向量”中成立的是().

- (A) ①③ (B) ②③ (C) ①②③ (D) ①②

(6) A 为四阶方阵, 方程组 $AX = 0$ 的通解为 $X = k_1(1, 0, 1, 0)^T + k_2(0, 0, 0, 1)^T$, A 的伴随矩阵为 A^* , 则秩 $(A^*)^* =$ ().

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(7) 已知随机变量 X, Y , 且 $P\{X \geq 0, Y \geq 0\} = \frac{3}{7}, P\{X \geq 0\} = P\{Y \geq 0\} = \frac{4}{7}$, 则 $P\{\max(X, Y) \geq 0\} =$ ().

- (A) $\frac{16}{49}$ (B) $\frac{6}{7}$ (C) $\frac{5}{7}$ (D) $\frac{2}{7}$

(8) 设 X, Y 是相互独立的两随机变量, 则 ① $E(XY) = E(X)E(Y)$, ② $D(X-Y) = D(X) + D(Y)$, ③ $D(XY) = D(X)D(Y)$, ④ $\text{Cov}(X, Y) = 0$ 中一定成立的是().

(A)①②③

(B)①③④

(C)①②④

(D)①②③④

得分	评卷人

二、填空题:9—14 小题,每小题 4 分,共 24 分.把答案填在题中的横线上.

(9) $\int \frac{xe^x}{(1+x)^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

(10) 设函数 $y = (x-1)x^{2/3}$, 则函数极值点为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(11) 微分方程 $y' = \frac{1}{x+e^y}$ 的通解为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(12) 若 $z = x^y$, 则 $dz = \underline{\hspace{2cm}}.$

(13) 四元二次型 $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \mathbf{X}^T \mathbf{A} \mathbf{X}$ 的正惯性指数为 2, 且满足 $\mathbf{A}^2 - \mathbf{A} = \mathbf{E}$, 则此二次型的规范形为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

(14) 设 X 服从于参数为 $\lambda (\lambda > 0)$ 的指数分布, 则 $Y = X^2$ 的概率密度函数为 $\underline{\hspace{2cm}}.$

三、解答题:15—23 小题,共 94 分.解答应写文字说明、证明过程或演算步骤.

得分	评卷人

(15)(本题满分 10 分)

设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $f(x+y, y+z) = 0$ 所确定, 求 dz 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$

得分	评卷人

(16)(本题满分 9 分)

计算 $\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]dx dy$. 其中 f 是连续函数, D 为 $y = x^3$ 、 $y = 1$ 及 $x = -1$ 所围成的平面区域.

得分	评卷人

(17)(本题满分 10 分)

某商品交易市场上的税收收入与交易的成交额之间的关系经统计资料分析为:税收的收入随成交额增加的增长率等于税收收入的立方与成交额立方的 2 倍的差、再除以成交额与税收收入平方之积的 3 倍.若成交额为 $x = 1$ (万元)时,税收收入 $y = 2$ (百元),试求该商品市场的税收收入与成交额之间的函数关系.

得分	评卷人

(18)(本题满分 10 分)

设 $f'(x)$ 在 $[0, 2a]$ 上连续, $f(0) = 1, f(a) = 2, f(2a) = 4, F(x) = \int_0^x f(t)f'(2a-t)dt$, 求 $F(2a) - 2F(a)$.

得分	评卷人

(19)(本题满分 11 分)

设 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上二阶可导, 且 $f(0) = f(1) = \int_0^1 e^{x^2} f(x) dx = 0$.

证明: (I) 必存在 $0 < \xi_1 < \xi_2 < 1$, 使 $f'(\xi_i) = f(\xi_i) (i = 1, 2)$;

(II) 必存在 $\eta \in (0, 1)$, 使 $f''(\eta) = 2f'(\eta) - f(\eta)$.

得分	评卷人

(20)(本题满分 11 分)

设方程组
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = b \\ x_1 + 3x_2 + ax_3 = 3 \\ -x_1 + x_2 = c \end{cases}$$
 的通解为 $\mathbf{X} = k\xi + (1, 0, 1)^T$, 其中 ξ 是它的导出组的基础

解系, k 是任意常数.

(I) 求 a, b, c ; (II) 求方程组的通解.

得分	评卷人

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 相似于对角矩阵, 求 (I) a 及可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \Lambda$. 其中 Λ 为

对角矩阵; (II) A^{100} ; (III) P^{-1}

得分	评卷人

(22)(本题满分 11 分)

将一枚硬币连掷三次, 以 X 表示出现正面的次数, 以 Y 表示三次中出现正面的次数与出现反面的次数之差的绝对值, 求:

(I) X, Y 的联合分布律; (II) $E(X), E(Y), D(X), D(Y)$.

得分	评卷人

(23)(本题满分 11 分)

设数 X 在区间 $(0, 1)$ 上随机地取值, 当观察到 $X = x (0 < x < 1)$ 时, 数 Y 在区间 $(x, 1)$ 上随机取值. 求:

- (I) Y 的概率密度函数 $f_Y(y)$;
- (II) 条件概率密度函数 $f_{X|Y}(x | y)$;
- (III) 求 $E(XY)$.

2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(三) 全真模拟试卷(二)

试卷密码:

试卷密码:

此密码考生不得填写

考试科目 数 学 (三)

题 号	得 分	评 卷 人
一		
二		
三	(15)	
	(16)	
	(17)	
	(18)	
	(19)	
	(20)	
	(21)	
	(22)	
	(23)	
总分		

准考证编号 _____
考 试 科 目 _____
报考学科、专业 _____
报考研究方向 _____
报 考 单 位 _____

注 意 事 项

1. 以上各项除试卷密码之外必须填写清楚。
2. 答案必须写准确、清晰、必须写在试卷上。
3. 字迹要清楚、卷面要整洁。
4. 草稿纸另发,考试结束,统一收回。

注意:此半页考生不得填写

数学三 全真模拟试卷(二)

得分	评卷人

一、选择题:1—8 小题,每小题 4 分,共 32 分.在每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.

(1) 设函数 $y = \frac{x}{\tan x}$, 则下列说法中正确的是().

- (A) 函数 y 只有第一类间断点 (B) 有跳跃间断点和无穷型间断点
(C) 只有可去间断点和无穷型间断点 (D) 没有间断点

(2) 某商品的需求量 Q 对价格 P 的弹性为 $P \ln 2$, 已知该商品的最大需求量为 1000, 则需求量 Q 关于价格 P 的函数关系是().

- (A) $Q = 1000e^{-P}$ (B) $Q = 1000 \times 2^{-P}$
(C) $Q = 1000e^{-2P}$ (D) $Q = 1000 \times 2^{-2P}$

(3) 设函数 $z = z(x, y)$ 存在二阶偏导数, 且在 $M_0(x_0, y_0)$ 处取得极大值, 则().

- (A) $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0} < 0, \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_0} > 0$ (B) $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0} > 0, \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_0} < 0$
(C) $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0} \leq 0, \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_0} \leq 0$ (D) $\left. \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \right|_{M_0} < 0, \left. \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right|_{M_0} < 0$

(4) 若 $|f'(x)| < g'(x) (x \geq a)$, 则当 $x > a$ 时必有().

- (A) $|f(x) - f(a)| < g(x) - g(a)$ (B) $|f(x) - f(a)| \geq g(x) - g(a)$
(C) $|f(x) - f(a)| = g(x) - g(a)$ (D) $|f(x) - f(a)| < a$

(5) 若 n 维向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性相关, $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 线性无关, 则().

- (A) α_1 一定可以由 α_2, α_3 线性表示 (B) α_4 一定可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性表示
(C) α_4 一定可由 α_1, α_3 线性表示 (D) α_4 一定可由 α_1, α_2 线性表示

(6) 设 A 为 n 阶矩阵, 将 A 的第 i, j 行互换后再将第 i, j 列互换得到矩阵 B , 则“ A 与 B 等价”, “ A 与 B 相似”, “ A 与 B 合同”中成立的关系共有() 个.

- (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3

(7) 下列说法中错误的是().

- (A) 若 (X, Y) 服从二维正态分布, 则 $X - Y$ 服从一维正态分布
(B) 若 X, Y 都服从正态分布, 则 $X - Y$ 也服从正态分布
(C) 若 (X, Y, Z) 服从三维正态分布, 则 X, Y, Z 相互独立与它们两两不相关等价
(D) 若 X, Y 相互独立且都服从于正态分布, 则 $X + Y$ 也服从正态分布

(8) 若随机变量 X, Y 相互独立, 且 $E(X) = 0, E(Y) = 1, D(X) = 1$, 则 $E[X(X + Y - 2)] = ()$.

- (A) 0 (B) 1 (C) -1 (D) 2

得分	评卷人

二、填空题: 9—14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 把答案填在题中的横线上.

(9) $\int_0^1 dy \int_y^1 e^{-x^2} dx =$ _____.

(10) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\frac{\sin^3 x}{1+x^2} + \frac{\sin^2 x}{1+e^{-x}}) dx =$ _____.

(11) 差分方程 $y_{t+1} - 3y_t = 3^t$ 的通解为 _____.

(12) 由曲线 $r = \sqrt{2} \sin \theta$ 及 $r^2 = \cos 2\theta$ 所围成图形在第一象限内的公共部分的面积为 _____.

(13) 已知 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, 其中 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为四维列向量, 方程组 $AX = 0$ 的通解为 $k(2, -1, 1, 4)^T$, 则 α_3 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 的线性表示式为 _____.

(14) 设事件 $\bar{A}, B$ 相互独立, 且 $P(\bar{A}) = P(B) = \frac{1}{3}$, 则 $P(A+B) =$ _____.

得分	评卷人

(15) (本题满分 10 分)

设 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0 & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$, 讨论:

(I) $f'_x(0, 0)$ 及 $f'_y(0, 0)$ 是否存在;

(II) f'_x 及 f'_y 在点 $O(0, 0)$ 处是否连续;

(III) $f(x, y)$ 在 $O(0, 0)$ 处是否可微.

得分	评卷人

(16) (本题满分 10 分)

设 $f(x) = \left(\frac{a_1^x + a_2^x + \cdots + a_n^x}{n} \right)^{\frac{1}{x}}, a_i > 0, a_i \neq 1, i = 1, 2, \cdots, n.$

求: (I) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x);$ (II) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$

得分	评卷人

(17)(本题满分 10 分)

设 $a_0 = 0, a_1 = 3, a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2} (n = 2, 3, \dots), f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$

(I) 导出 $f(x)$ 满足的微分方程;

(II) 求此幂级数的和函数.

得分	评卷人

(18)(本题满分 10 分)

设直线 $y = kx (2 > k > 0)$ 与曲线 $y = x^2$ 所围成的平面图形为 D_1 , 它们与直线 $x = 2$ 所围成的图形为 D_2 .

(I) 求 k 的值, 使 D_1 和 D_2 分别绕 x 轴旋转一周各得旋转体的体积 V_1, V_2 的和最小;

(II) 求此时 D_1 和 D_2 的面积之和.

得分	评卷人

(19)(本题满分 10 分)

已知 $a \leq x \leq b$ 时, $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 证明:

$$(b-a)f(a) < \int_a^b f(x) dx < \frac{b-a}{2}[f(a) + f(b)]$$

得分	评卷人

(20)(本题满分 11 分)

已知 A 是三阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是三维行向量, 且 $|\alpha_1^T, \alpha_2^T, \alpha_3^T| \neq 0$, 满足 $A\alpha_1 = 2\alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3, A\alpha_2 = 4\alpha_1 + 2\alpha_2 + 2\alpha_3, A\alpha_3 = 2\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3$.

(I) 求 A 的特征值和特征向量, 并求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = \Lambda$;

(II) 求 $|A^* + 4E|$ (A^* 是 A 的伴随矩阵).