高职高专教育"十一五"规划教材

主编 陈水林

工程应用数学

GONGCHENG YINGYONG SHUXUE

湖北科学技术出版社

高职高专教育“十一五”规划教材

工程应用数学

主　编　陈水林

湖北科学技术出版社

图书在版编目（C I P）数据

工程应用数学／陈水林主编. —武汉：湖北科学技术出版社，2007.12
ISBN 978-7-5352-3895-5

Ⅰ.工… Ⅱ.陈… Ⅲ.工程数学 Ⅳ.TB11

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第165201号

高职高专教育“十一五”规划教材

工程应用数学 © 陈水林 主编

责任编辑：陈兰平 王 梅 封面设计：王 梅

出版发行：湖北科学技术出版社 电话：87679468
地 址：武汉市雄楚大街268号湖北出版文化城B座12-13层 邮编：430070

印 刷：咸宁市鄂南新华印务有限公司 邮编：437100

787毫米×1092毫米 16开 17印张 420千字
2007年12月第1版 2007年12月第1次印刷

定价：26.00元

本书如有印装质量问题 可找承印厂更换

内容简介

本书按照教育部最新制定的高职高专《工程数学课程教学基本要求》，结合编者多年的教学实践编写而成，反映了当前高职高专教育培养高素质实用型人才数学课程设置的教学理念.

内容包括：无穷级数、拉普拉斯变换、傅里叶变换、线性代数初步、概率论与数理统计初步、图论基础、数理逻辑、MATLAB 简介及数学实验. 本书每章节后都配有一定数量的习题，并在书后附有习题参考答案与提示.

本书可供高职高专各专业学生使用.

主　编：陈水林

副主编：朱　宏　廖红菊　周保平　张芸兰

参　编：吴伟萍　张野民　佘　革　任潜能

范小勤　许松林　王　红　方次军

前　言

本书是按照新形势下高职高专工程数学教学改革的精神，针对高职高专学生学习的特点，结合编者多年的教学实践编写而成的. 本教材具有以下特色：

1. 依据教育部制定的《高职高专工程数学课程教学基本要求》编写，力求突出实用性，坚持理论够用为度的原则. 在尽可能保持数学学科特点的基础上，注意到高职高专教育的特殊性，对教学内容进行了精选，淡化理论性和系统性，对一些定理只给出解释或简单的几何说明，强化针对性和实用性，强化应用要落实到使学生能运用所学数学知识求解实际问题上.

2. 本教材吸取了国内外同类教材的精华，借鉴了近几年我国出版的一批教材的成功经验，因此，本教材具有更强的实用性. 书中概念的引入尽可能从实际背景入手，讲解基本概念、基本原理和基本解题技能时，在考虑到学生实际、教学学时等实际情况的基础上，做到由易到难、循序渐进和通俗易懂，不要求过分复杂的计算和证明.

3. 本教材注重基础知识、基本方法和基本技能的训练；注重对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、计算能力和解决实际问题能力的培养，并对解题的步骤和思路进行了适当的归纳. 每节后习题的配备类型合理，深度和广度适中.

4. 本教材既考虑到一般理工科专业对工程数学的需要，也兼顾经济类专业的特点，因此，也可以适用于经济类专业. 书中工程数学内容全面，可根据不同需要选学部分内容，同时，书中注有“＊”号的内容可供教师选讲及学有余力的同学阅读.

5. 鉴于计算机的广泛应用以及数学软件的日臻完善，为了提高学生使用计算机解决数学问题的意识和能力，我们在第八章介绍了 MATLAB 软件的使用方法及数学实验，使学生不但会手算，还会用计算机计算与绘图. 书中所有程序均在 MATLAB 中调试通过.

本书由陈水林（湖北工业大学）担任主编，由朱宏（广东食品药品职业学院）、廖红菊（恩施职业技术学院）、周保平（塔里木大学）、张芸兰（永州职业技术学院）担任副主编. 参编人员为吴伟萍、张野民、余革、任潜能、范小勤、许松林、王红、方次军. 本书由陈水林修改、统稿、定稿.

在本书的编写过程中，湖北工业大学职业技术学院和理学院的领导及教师提出了许多宝贵的意见和建议，编者在此表示诚挚的谢意，同时全国三百多所职业技术学院的领导和教师对本书给予了大力支持，在此一并致谢. 欢迎各位读者提出批评和建议.

编者

2007 年 12 月于武汉

目 录

第一章　无穷级数

无穷级数在研究函数的性质、数值计算等方面有着广泛的应用，是解决工程技术中某些问题的有力工具. 本章主要是在极限理论的基础上，重点介绍常数项级数的基本知识，并由此推出幂级数的基本结论，然后介绍傅里叶级数.

第一节　常数项级数的概念与性质

一、常数项级数的概念

人们认识事物在数量方面的特性，往往有一个由近似到精确的过程. 在这种认识过程中，经常会遇到由有限个数相加到无穷个数相加的问题，由此就产生了无穷级数的概念.

定义 1　如果给定一个数列

$$u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots,$$

则数学表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{1}$$

称为**（常数项）无穷级数**，简称**（常数项）级数**，记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots,$$

其中第 n 项 u_n 称为级数的**一般项**或**通项**. 级数(1)前 n 项的和

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

称为级数(1)的前 n 项的**部分和**. 当 n 依次取 1,2,3,…时，它们构成一个新数列

$$s_1 = u_1, \quad s_2 = u_1 + u_2, \quad s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \cdots,$$

$$s_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n, \cdots,$$

称为级数(1)的**部分和数列**，记作 $\{s_n\}$.

根据这个数列有没有极限，我们引入级数(1)的收敛和发散的概念.

定义 2　如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列 $\{s_n\}$ 有极限，即存在常数 s，使得

$$\lim_{n\to\infty} s_n = s,$$

则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**，并称 s 为该级数的**和**，记作

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots;$$

如果部分和数列 $\{s_n\}$ 没有极限，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **发散**，发散的级数没有和.

当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛时,其和 s 与部分和 s_n 的差 $s-s_n$ 称为级数的**余项**,记作 r_n,即

$$r_n = s - s_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots.$$

例 1 判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots$$

的敛散性.

解 级数的前 n 项的部分和

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

由于

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

所以该级数收敛且和为 1.

例 2 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + aq^2 + \cdots + aq^{n-1} + \cdots$的敛散性,其中 $a \neq 0$. 此级数称为**等比级数**或**几何级数**,q 称为该级数的**公比**.

解 (1)当 $|q| \neq 1$ 时,部分和

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

若 $|q| < 1$,则由 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$,得 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a}{1-q}$,从而级数收敛,其和为 $\dfrac{a}{1-q}$;

若 $|q| > 1$,则由 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = \infty$,得 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$,从而级数发散.

(2)当 $|q| = 1$ 时,若 $q = 1$,则级数为

$$a + a + a + \cdots + a + \cdots,$$

此时 $s_n = na$,故 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$,从而级数发散;

若 $q = -1$,则级数为

$$a - a + a - a + \cdots + (-1)^{n-1}a + \cdots,$$

此时 $s_n = \begin{cases} a, n \text{ 为奇数}, \\ 0, n \text{ 为偶数}, \end{cases}$ 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不存在,所以级数发散.

综上所述,等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}$,若公比 $|q| < 1$ 时收敛,其和为 $\dfrac{a}{1-q}$;若 $|q| \geqslant 1$ 时发散.

例 3 证明**调和级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$发散.

证明 $s_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n}$,因为 $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ 不易直接计算,所以利用不等式 $x > \ln(1+x)$ $(x > 0)$,得

$$
\begin{aligned}
s_n &= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \\
&> \ln(1+1) + \ln\left(1+\frac{1}{2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{3}\right)+\cdots+\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \ln(1+n).
\end{aligned}
$$

由于$\lim\limits_{n\to\infty}\ln(1+n)=+\infty$，得$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=+\infty$，所以调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散.

二、常数项级数的基本性质

根据级数收敛及发散的定义，可以得到下面几个基本性质.

性质 1 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$、$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$分别收敛于和$s$、$\sigma$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)$也收敛，且其和为$s\pm\sigma$，即

$$
\sum_{n=1}^{\infty}(u_n\pm v_n)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n\pm\sum_{n=1}^{\infty}v_n.
$$

性质 2 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛于和$s$，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}ku_n$（$k$为非零常数）也收敛，且其和为$ks$，即

$$
\sum_{n=1}^{\infty}ku_n=k\sum_{n=1}^{\infty}u_n.
$$

性质 3 在级数中加上、去掉或改变有限项，不会改变级数的敛散性，但一般将会改变收敛级数的和.

性质 4（级数收敛的必要条件） 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛，则$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

证明 设级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和与和分别为$s_n$与$s$，即$\lim\limits_{n\to\infty}s_n=s$. 由于$u_n=s_n-s_{n-1}$，所以

$$
\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}(s_n-s_{n-1})=\lim_{n\to\infty}s_n-\lim_{n\to\infty}s_{n-1}=s-s=0.
$$

性质 4 告诉我们考察级数的敛散性时，应先考察该级数的通项是否趋于零. 若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq0$，则立即可断定该级数发散.

例 4 讨论级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$的敛散性.

解 因为$u_n=\frac{n}{2n-1}$，而$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\frac{1}{2}\neq0$，所以级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2n-1}$发散.

这里应强调指出，通项趋于零仅是级数收敛的必要条件，不是充分条件，即虽有$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，但级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$未必收敛. 如例 3 中的调和级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$的通项$\frac{1}{n}$趋于零，但该级数发散.

习 题 1-1

1. 写出下列级数的前 5 项：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4+(-1)^n}{4^n}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{2^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

2. 写出下列级数的一般项：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$;　　(2) $-1+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\cdots$;

(3) $1+\frac{1\times 2}{2^2}+\frac{1\times 2\times 3}{3^3}+\frac{1\times 2\times 3\times 4}{4^4}+\cdots$;　　(4) $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{2x}{5}+\frac{3x\sqrt{x}}{10}+\frac{4x^2}{17}+\cdots$.

3. 写出下列级数的部分和 s_n，并说明其敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;

(2) $\frac{1}{1\times 3}+\frac{1}{3\times 5}+\frac{1}{5\times 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)\times(2n+1)}+\cdots$.

4. 利用级数的基本性质，判别下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3}{10^n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{2^n}\right)$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+10}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2+(-1)^n}{2^n}$;　　(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{n}$.

第二节　常数项级数的审敛法

一、正项级数及其审敛法

若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 中各项均为非负，即 $u_n\geqslant 0(n=1,2,\cdots)$，则称该级数为**正项级数**. 正项级数是级数中最基本，也是最重要的一类级数，许多级数的敛散性问题可归结为正项级数的敛散性问题.

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的部分和为 s_n，由于

$$s_n=s_{n-1}+u_n\geqslant s_{n-1},$$

所以，正项级数的部分和数列是单调增加的，即

$$s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_n\leqslant\cdots.$$

可以证明，单调增加且有界的数列必有极限. 因此对正项级数来说，只要其部分和数列 $\{s_n\}$ 有界，则 $\lim\limits_{n\to\infty}s_n$ 一定存在，即级数收敛，反之亦然. 由此我们有下面定理.

定理 1　正项级数收敛的充分必要条件是其部分和数列 $\{s_n\}$ 有界.

由定理 1 可以得到如下重要的比较审敛法.

定理 2（比较审敛法）　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 都是正项级数，且 $u_n\leqslant v_n(1,2,\cdots)$，则

(1) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛；

(2)若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 也发散.

应用比较审敛法判别给定的正项级数的敛散性时,只需与已知敛散性的正项级数作比较,便可判别正项级数的敛散性.通常选用等比级数或下面的 p-级数作为比较对象.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$(其中常数 $p>0$)称为 p-级数.可以证明:p-级数当 $p>1$ 时收敛,当 $p\leq1$ 时发散(证明从略).

例 1 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n+n}$的散敛性.

解 因为

$$0<\frac{1}{3^n+n}<\frac{1}{3^n},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$是收敛的等比级数,所以原级数收敛.

例 2 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n^2+2}}$的敛散性.

解 因为

$$0<\frac{1}{n\sqrt{n^2+2}}<\frac{1}{n^2},$$

而 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(p=2)$收敛,所以原级数收敛.

例 3 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$的敛散性.

解 因为

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}>\frac{1}{n+1},$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}+\cdots$是发散的,所以原级数发散.

通过上面的例题可以看到,利用比较审敛法来判别正项级数的敛散性时,先必须适当选取一个已知敛散性的级数(一般是选等比级数或 p-级数),再通过比较对应项的大小,来判别给定的正项级数的敛散性.但有时不易找到已知敛散性的级数.能否去掉比较审敛法的这种依赖性,单靠所给级数本身的特点来判别级数的敛散性?下面介绍在实用上很方便的比值审敛法.

定理 3(比值审敛法,达朗贝尔(D'Alembert)审敛法) 设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho,$$

则

(1)当 $\rho<1$ 时,级数收敛;

(2)当 $\rho>1$(或 $\rho=+\infty$)时,级数发散;

(3)当 $\rho=1$ 时,级数可能收敛,也可能发散.

注意 当$\rho=1$时,因级数可能收敛,也可能发散,故这种情况下,不能用比值审敛法来判别正项级数的敛散性,需改用其他的方法来判别.

例 4 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n}$的敛散性.

解 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)^2}{2^{n+1}}}{\frac{n^2}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2n^2}=\frac{1}{2}<1,$$

所以根据比值审敛法知原级数收敛.

例 5 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{10^n}$的敛散性.

解 因为

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}=\frac{\frac{(n+1)!}{10^{n+1}}}{\frac{n!}{10^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{10}=+\infty,$$

所以根据比值审敛法知原级数发散.

例 6 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(2n+3)}$的敛散性.

解 因为

$$\begin{aligned}\rho&=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+2)[2(n+1)+3]}}{\frac{1}{(n+1)(2n+3)}}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(2n+3)}{(n+2)(2n+5)}=1,\end{aligned}$$

比值审敛法失效,下面改用比较审敛法.

由于

$$u_n=\frac{1}{(n+1)(2n+3)}<\frac{1}{n\cdot n}=\frac{1}{n^2},$$

所以,由 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$收敛及比较审敛法知原级数收敛.

二、交错级数及其审敛法

正负项交错出现的级数称为**交错级数**,它可以表示成如下形式:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n=u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots,$$

或

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u_n=-u_1+u_2-u_3+u_4-\cdots+(-1)^n u_n+\cdots,$$

其中$u_n>0(n=1,2,\cdots)$. 关于交错级数的敛散性,有如下定理:

定理4(莱布尼茨审敛法) 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足条件：

(1) $u_n \geqslant u_{n+1}(n=1,2,\cdots)$;

(2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

则级数收敛,且其和 $s \leqslant u_1$.

例7 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$的敛散性.

解 这是交错级数. 由于

$$u_n=\frac{1}{n}>\frac{1}{n+1}=u_{n+1},\text{且}\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0,$$

所以由莱布尼茨审敛法知原级数收敛,且其和 $s<u_1=1$.

例8 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{3n+1}{n^2}$的敛散性.

解 这是交错级数. 先证明 $u_n=\frac{3n+1}{n^2}$的单调性. 设函数$f(x)=\frac{3x+1}{x^2}$,因为

$$f'(x)=-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}<0\ (x>0),$$

从而$f(x)$单调下降,因此对于 $n=1,2,3,\cdots$,有

$$\frac{3(n+1)+1}{(n+1)^2}<\frac{3n+1}{n^2},$$

即

$$u_n>u_{n+1}(n=1,2,3,\cdots),$$

又

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+1}{n^2}=0,$$

所以由莱布尼茨审敛法知原级数收敛.

三、绝对收敛与条件收敛

级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

其中 $u_n(n=1,2,\cdots)$为任意实数,称为**任意项级数**.

为判别任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的散敛性,通常先考察由其各项绝对值所组成的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 的敛散性. 这是因为$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 与$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$有如下关系.

定理5 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛.

证明 设 $v_n=\frac{1}{2}(u_n+|u_n|)$. 则 $v_n\geqslant 0$ 且 $v_n\leqslant|u_n|(n=1,2,\cdots)$. 由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$收敛,

所以由比较审敛法知，正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛. 又因为 $u_n = 2v_n - |u_n|$，所以由级数的基本性质知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

定义 如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **绝对收敛**；如果级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则称级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **条件收敛**.

注意 (1)定理 5 的逆命题不成立，即绝对收敛的级数一定收敛，但收敛级数却不一定绝对收敛；

(2)定理 5 使得一大类任意项级数的收敛性判别问题转化成为正项级数的收敛性判别问题.

例 9 判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{2^n}$ 的敛散性.

解 先考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{\sin n\alpha}{2^n}\right|$. 因为

$$\left|\frac{\sin n\alpha}{2^n}\right| \leqslant \frac{1}{2^n},$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ 收敛，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\dfrac{\sin n\alpha}{2^n}\right|$ 收敛，故由定理 5 知原级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n\alpha}{2^n}$ 收敛.

例 10 判别下列级数的敛散性. 若收敛，指明是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \dfrac{3^n}{n!}$；　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos\dfrac{1}{n^2}$.

解 (1)因为 $|u_n| = \left|(-1)^n \dfrac{3^n}{n!}\right| = \dfrac{3^n}{n!}$，.

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{3^{n+1}}{(n+1)!} \Big/ \frac{3^n}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n+1} = 0 < 1,$$

所以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^n \dfrac{3^n}{n!}\right|$ 收敛，故原级数绝对收敛.

(2)因为

$$|u_n| = \left|(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}}\right| = \frac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}} > \frac{1}{\sqrt{n^2+2n+1}} = \frac{1}{n+1},$$

所以由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n+1}$ 发散，得级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|(-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}}\right|$ 发散.

下面来考虑级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}}$ 的敛散性.

这是一个交错级数. 因为

$$|u_{n+1}| = \frac{1}{\sqrt{(n+1)^2+2(n+1)-1}} = \frac{1}{\sqrt{n^2+4n+2}} < \frac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}} = |u_n|,$$

且$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}}=0$,所以,由莱布尼茨审敛法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n^2+2n-1}}$收敛.

综上所述,得原级数条件收敛.

(3)因为

$$\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n^2}=\cos 0=1\neq 0,$$

所以原级数发散.

习 题 1-2

1. 用比较审敛法判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+9}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^2 n}{3^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^3+1}}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+n}{2^n}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+a^n}\ (a>0)$.

2. 用比值审敛法判别下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{n!}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{n!}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sin\frac{\pi}{2n+1}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

3. 判别下列级数的敛散性,如果收敛,指明是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$;　　(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{4^n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{2^n}$;　　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{\sqrt{n^3+n}}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{3n-1}$;　　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$.

4. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^p}$的敛散性,若收敛,指明是绝对收敛还是条件收敛,其中p是与n无关的实数.

第三节　幂　级　数

一、函数项级数

定义 1　由定义在同一区间I内的函数序列构成的无穷级数$u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots$称为函数项级数,记作 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$,即

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots. \tag{1}$$

若在上面的函数项级数中，令 x 取区间 I 中某一确定值 x_0，则得到一个常数项级数

$$u_1(x_0)+u_2(x_0)+\cdots+u_n(x_0)+\cdots. \tag{2}$$

如果级数(2)收敛，则称点 x_0 为函数项级数(1)的**收敛点**；如果级数(2)发散，则称点 x_0 为函数项级数(1)的**发散点**. 收敛点的全体构成的集合，称为函数项级数的**收敛域**.

对于收敛域内的任意一个数 x，函数项级数(1)成为一收敛的常数项级数，于是有一个确定的和 s. 因此，在收敛域上，函数项级数(1)的和是 x 的函数 $s(x)$，通常称 $s(x)$ 为函数项级数(1)的**和函数**. 即在收敛域上有

$$s(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x)+\cdots.$$

把函数项级数(1)的前 n 项的部分和记作 $s_n(x)$，则

$$s_n(x)=u_1(x)+u_2(x)+\cdots+u_n(x),$$

且在收敛域上，有

$$\lim_{n\to\infty}s_n(x)=s(x).$$

称 $r_n(x)=s(x)-s_n(x)$ 为函数项级数的**余项**，显然有

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=0.$$

在函数项级数中，最常见、最重要的一类是各项都是幂函数的函数项级数——幂级数.

二、幂级数及其收敛半径

定义 2 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots+a_n(x-x_0)^n+\cdots \tag{3}$$

的函数项级数称为**幂级数**，其中常数 $a_n(n=0,1,2,\cdots)$ 称为**幂级数的系数**. 当 $x_0=0$ 时，它具有更简单的形式：

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots. \tag{4}$$

因为幂级数(3)可以通过变量代换 $y=x-x_0$ 化为(4)的形式，故在以下讨论中，主要研究幂级数(4).

对于幂级数，要考虑的也是它的敛散性问题，为此，我们先看一个例子.

幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots \tag{5}$$

是一个公比为 x 的等比级数，由本章第一节例 2 知，当 $|x|<1$ 时，幂级数(5)收敛，且其和为 $\frac{1}{1-x}$；当 $|x|\geqslant 1$ 时，幂级数(5)发散. 所以幂级数(5)的收敛域为 $(-1,1)$，发散域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$，且

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x},x\in(-1,1).$$

从这个例子可知，幂级数(5)的收敛域为一个区间. 其实，这个结论对于一般的幂级数也是成立的.