

你缺少的不是机会，而是变换观点

首席教师

专题小课本

- 小方法大智慧
- 小技巧大成效
- 小单元大提升
- 小课本大讲坛

高中数学

圆锥曲线与方程

总主编/钟山



中国出版集团 现代教育出版社

海阔凭鱼跃

方法赢得速度 选择决定未来

FANGFAYINGDESUDU XUANZEJUEDINGWEILAI

高中数学

1. 函数 2. 几何初步 3. 三角函数与三角恒等变换 4. 平面向量 5. 数列 6. 不等式 7. 圆锥曲线与方程 8. 导数及其应用 9. 空间向量与立体几何 10. 常用逻辑、推理与证明 11. 统计与概率 12. 算法、框图与复数 12. 数学思想与方法

高中物理

1. 力和直线运动 2. 曲线运动与机械能 3. 热运动与能量守恒 4. 波动与相对论 5. 电磁学(上) 6. 电磁学(下) 7. 动量守恒与微观粒子 8. 物理实验与探究 9. 物理思想与方法

高中化学

1. 电解质溶液 2. 化学反应与能量 3. 元素周期律与化学键 4. 化学反应速率与化学平衡 5. 元素与化合物 6. 物质结构与性质 7. 有机化学基础 8. 化学实验基础 9. 化学计算

优势与劣势

有一个十岁的小男孩,在一次车祸中失去了左臂,但是他很想学柔道。最终,小男孩拜一位日本柔道大师做了师傅,开始学习柔道。他学得不错,可是练了三个月,师傅只教了他一招,小男孩有点弄不懂了。

他终于忍不住问老师:“我是不是应该再学学其他招?”师傅回答说:“不错,你的确只会一招,但你只需要这一招。”

小男孩并不是很明白,但他很相信师傅,于是就继续照着练了下去。几个月后,师傅第一次带小男孩去参加比赛。小男孩自己都没有想到居然凭着这一招就赢得了冠军!师傅说:“有两个原因:第一,你几乎掌握了柔道中最难的一招;第二,据我所知,对付这一招唯一的办法是对手抓住你的左臂。”

其实有的时候,人的劣势未必就是劣势,可能反而成了优势。正如这位小男孩,失去了左臂的最大劣势变成了最大的优势。

ISBN 978-7-80196-675-9



9 787801 966759 >

定价:12.80 元

责任编辑:苏欣力 逢 梁

责任校对:倪桂全

封面设计:书友传媒

图书在版编目(CIP)数据

首席教师专题小课本. 高中数学. 圆锥曲线与方程 /
钟山主编. —北京: 现代教育出版社, 2008. 4

ISBN 978-7-80196-675-9

I. 首… II. 钟… III. 数学课—高中—教学参考资料
IV. G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 038444 号

11

书 名: 首席教师专题小课本·高中数学—圆锥曲线与方程

出版发行: 现代教育出版社

地 址: 北京市朝阳区安华里 504 号 E 座

邮政编码: 100011

印 刷: 北京市梦宇印务有限公司印刷

发行热线: 010-61743009

开 本: 890×1240 1/32

印 张: 7.5

字 数: 320 千字

印 次: 2008 年 4 月第 1 版 第 1 次印刷

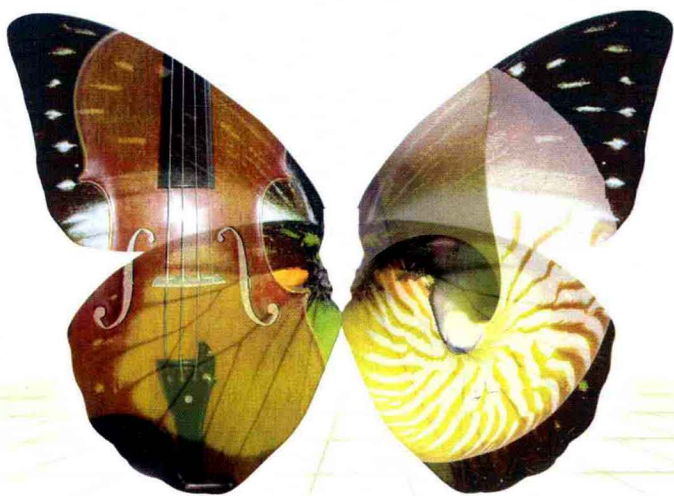
书 号: ISBN 978-7-80196-675-9

定 价: 12.80 元



您需要的不是机会

NINXUYAODEBUSHIJIHUI



而是变换支点

小单元——知识·方法·能力·命题的交汇处

小单元——高效学习·成功备考的新支点

小单元学习法

首席教师的成功经验，优秀学生的学习秘诀

小单元是指在充分研究考纲和课标，透析教材知识结构，按照知识、方法、能力与中高命题的内在联系和系统结构，把教材内容分成若干个相对完整和独立的内容组块。几个小单元又构成相当于教材单元（或章）的内容板块，教材的几个单元又构成了大专题。

课时的基础性学习与单元的提升性学习

各类统考、高考试题命制的立足点、密集区在小单元，其能力要求、难度、综合性、深刻性、创新性往往与课时学习、教材内容严重脱节。在一节教材或一个课时中，对问题、原理及规律往往不能完全清楚认识，也不可能深化拓展，其实这只是基础性学习阶段。真正发展能力和提升成绩的支点是小单元，小单元学习是更高层次的提升性学习，是真正深化、拓展、发展能力的重要阶段，也是行之有效的螺旋式滚动提升的科学学习方法。

主动变换发力点

实际教学中由于课时紧张，大多数师生致力于同步教材的课时学习，习惯于一个个概念孤立记忆，一道道题去解析，往往事倍功半，这也是很多学生平时学习很努力，但考试成绩不理想的重要原因之一。这就要求我们转变观念，在同步学习及备考复习的过程中适时、适度的插入小单元、大单元及专题学习，主动完成提升性学习，对所学内容分级整合深化、各个击破，分级提升学生的知识整合能力、综合运用能力和问题解决能力。

单元学习五大关键

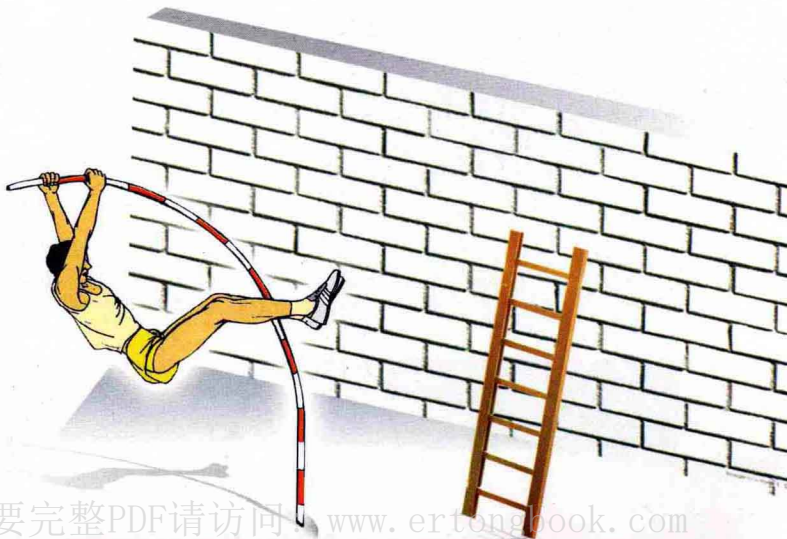
整合深化
形成知识模块

归纳拓展
活化解题方法

系统分层
培养高考能力

居高临下
形成应试策略

题组检测
优化训练方法



首席教师 专题小课本

高中数学

几何初步

总主编：钟 山

本册主编：向 宁

李庆阳

本丛书成立答疑解惑工作委员会，如有疑难问题可通过以下方式与我们联系：

企业网站：

<http://www.bjjxsy.com>

产品网站：

<http://www.swtnet.net>

服务电话：010-61743009

010-61767818

电子邮箱：

book@bjjxsy.com

service@swtnet.net

通信地址：北京市天通苑邮局 6503 号信箱

邮政编码：102218

专题三
半命题

知识网络梳理

ZHISHIWANGLUOSHULI

综合专题突破

ZONGHEZHUANTITUPU



大单元提升

知识清单精解

ZHISHIQINGDANJINGJIE

方法技巧突破

FANGFAJIAOJIATUPU



小单元提升

高考能力培养

GAOKAONENGLIPILYANG

命题规律点津

MINGTIGUILVDIANTJIN

题组优化训练

TI ZHUYOUHUA XUNLIAN



思维方法攻略

SIWEIFANGFAGONGLUE

高考热点突破

GAOKAOREDIANTUPO

专题速记图解

ZHUANTISUJITUJIE

专题提升

高考热点导航

GAOKAOREDIANDAGHANG

高考零距离检测

GAOKAOLINGJULIJIANCE

知识清单精解

单元内知识、方法、公式等学习要点清单化，运用整合、深化、对比、综合、发散等精细化学习方法及口诀、图表、顺口溜等学习技巧，精讲透析，简明快捷，易看、易记、易懂。

方法技巧突破

精心归纳问题及类型，找到最佳解决思想方法、解题技巧，透析方法运用要点，实现有效迁移，举一反三。例题讲解中进一步对疑难点的深化拓展，真正解决知识学习与解题运用的脱节问题。

高考能力培养

透析考纲对单元内容的能力要求，精析高考对知识内容的具体要求，配以典型考例透视能力层次，科学把握学习的难度和综合性，做到有的放矢，达到事半功倍的学习效果。

命题规律点津

从高考要求、命题规律、应试策略三个维度详实讲解单元的高考现状与发展趋势，具体把握应试策略与技巧，真正实现高考备考同步化，科学阐释了零距离高考新概念。

题组优化训练

从误区突破、综合创新两个维度分题组选题，精选高考真题，热点模拟题、创新题、原创题，针对训练，集中突破。同时答案详解，配以题组规律总结，更利于练后反馈，达到训练效益最大化。

知识网络梳理

细致梳理概括大单元或章的知识与方法，达到网络化、图式化、结构化和形象化，利于快捷地由小单元升华为大单元，进一步扩充知识架构。

综合专题突破

在小单元讲练的基础上，整理出综合性、创新性、能力性更强的问题、方法、题型，以小专题形式专项讲解、拓展突破。

前言 Q I ANYAN

近年来,我国的基础教育改革的素质教育进程已进入深化实施阶段,中学教材已呈现出“一标多本”的多元化格局,高考更是呈现出“一纲多卷”的地方化特色。为了更好地适应教学考的新趋势、新特色,我们集各省名校的学科首席教师、一线特高级教师和有经验的教育考试专家的聪明智慧和科研成果,精心构思,编写打造了本套丛书。

本套丛书的鲜明特色和深度魅力,主要体现在以下四个方面:

1. 核心单元,提升成绩的真正支点

小单元学习与同步课时学习相比,是更高层次的提升性学习,是真正深化拓展、发展能力、成功应试的重要步骤,也是行之有效的螺旋式滚动提升的科学学习方法。本套丛书以小单元为讲练基点,弥补了同步教学的缺失和薄弱环节,单元内由“知识、方法、能力、应试与训练”五要素构成了最优化学习程序,层次鲜明,通过对重难点、能力点、方法点和考点的精心讲练,有效的为师生最大限度提升成绩,建起了知识、方法和能力提升的新支点。

2. 螺旋提升,提供三级发展平台

专题编写遵循“小单元提升、大单元提升、本专题提升”三个梯度,再加上平时的课时学习,讲练结合、循序渐进、螺旋提升,构成了学科学习、思维发展与能力培养的有机整体。

3. 突出方法,多维度培养能力

无论是疑难讲解,问题解决,还是应试与训练,均以方法归纳、提炼与运用为突破口,力求做到集“学习法、解题法、应试法、训练法”于一身,帮助学生高效构建知识体系和方法体系,使读者在运用本书高效学习的同时收获更多的有效方法,发掘自己的最大学习潜能。

4. 汲取各版本精华,真正的专题教材

在编写过程中,充分汲取各版本教材的特色与精华,选取其中典型素材、典题典例、方法技巧,以师生完成同步教材的课时学习为基础,通过整合、深化、发散、分级,达到高考要求,既是学生完成提升性学习的专题教材,更是教师各类单元、专题教学的必备参考。

阿基米德说,给我一个支点,
我将撬起地球,本套丛书必将成
为您成功的新支点,发展的新平台。



目 录

首席寄语	(1)
单元提升篇	(3)
圆锥曲线与方程	(3)
第一单元 椭圆及其标准方程	(4)
第二单元 椭圆的几何性质	(27)
第三单元 双曲线及其标准方程	(49)
第四单元 双曲线的几何性质	(66)
第五单元 抛物线及其标准方程	(83)
第六单元 抛物线的几何性质	(100)
第七单元 直线与圆锥曲线的位置关系	(119)
第八单元 曲线与方程	(139)
章末综合提升	(158)

方法·技巧·策略

函数与方程(5)/数形结合的思想(7)/分类讨论思想(8)/定义法(10)/待定系数法(11)/代入法(13)/参数法(14)/应试规律点津(18)/函数的思想(29)/方程的思想(29)/数形结合思想(30)/转化化归思想(31)/待定系数法(32)/点差法(33)/定义法(35)/设而不求(35)/求双曲线方程的常用方法(50)/数形结合的思想(50)/参数的思想(50)/方程的思想(52)/函数的思想(53)/定义法(54)/待定系数法(55)/数形结合的思想(67)/分类讨论的数学思想(68)/方程的思想方法(68)/函数的思想方法(70)/待定系数法(70)/点差法(72)/转化与化归(84)/函数与方程的思想(85)/待定系数法(87)/定义法(88)/坐标法、几何法(90)/直线与抛物线的位置关系(100)/关于抛物线焦点弦的几个结论(101)/数形结合思想(102)/方程的思想(103)/函数的思想(105)/参数法(105)/配方法(106)/定义法(107)/代入法(107)/方程思想(120)/函数思想(122)/对称思想(124)/转化化归思想(125)/设而不求、点差法(125)/参数法(127)/直接法求曲线方程的一般步骤(139)/由方程研究曲线的性质(139)/求两条曲线的交点(140)/求曲线的轨迹方程常用的方法(140)/转化与化归(141)/数形结合思想(141)/直接法(142)/代入法(142)/参数法、点差法(143)/交轨法与几何法(144)/专题一 圆锥曲线定义的运用(158)/一、利用圆锥曲线定义求轨迹(158)/二、利用圆锥曲线定义求基本量(159)/三、利用圆锥曲线定义求距离和差最值(160)/四、利用定义判定某些位置关系(160)/专题二 取值范围的求法(161)/一、利用判别式来构造不等关系,从而确定参数的取值范围(161)/二、利用已知参数的范围,求新参数的范围(162)/三、运用几何性质探求参数范围(163)



专题提升篇	(180)
-------------	-------

第一单元 专题思想方法	(180)
-------------------	-------

方法·技巧·策略

函数与方程的思想(180)/数形结合的思想(183)/分类讨论的思想(185)/转化与化归的思想(186)/设而不求(189)/一、函数与方程的思想(190)

第二单元 专题高考热点	(195)
-------------------	-------

附 录	(236)
-----------	-------



首席寄语

专题导引

本专题主要包括圆锥曲线与方程。

解析几何在高中数学中具有十分重要的地位,而圆锥曲线与方程是重中之重,它既是高中数学学习的重点,同时也是一个难点.圆锥曲线与方程是平面解析几何的核心内容,因而是高考重点考查的内容,在每年的高考试卷中一般有2~3道客观题和一道解答题,难度上易、中、难三档题都有,命题一般紧扣课本,突出重点,全面考查.主要考查的内容是圆锥曲线的概念和性质,直线与圆锥曲线的位置关系等,考查的思想方法有:函数与方程、数形结合、等价转化、分类讨论、转化与化归等.

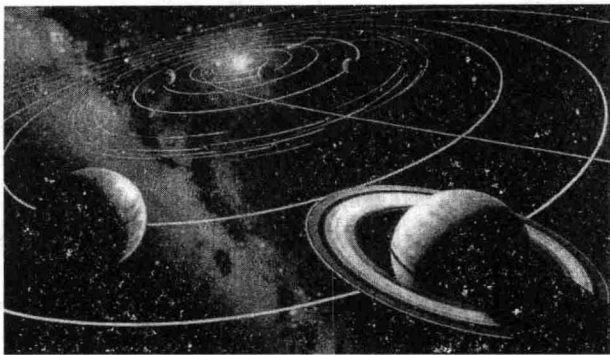


图 1-0-1

高考命题规律

从近几年高考试题看有以下几个特点:

1. 题型稳定:近几年高考中圆锥曲线部分试题占有较大比例,分值约占全卷的15%左右,且选择题填空题解答题皆有.客观题主要考查圆锥曲线的基本概念、标准方程及几何性质等基础知识和处理有关问题的基本技能、基本方法.解答题以考查直线与圆锥曲线的位置关系为主,对于求曲线方程和求轨迹的题,高考一般不给出图形,以考查学生的想象能力、分析问题的能力,从而体现解析几何的基本思想和方法,往往以中档题或压轴题形式出现,问题涉及函数、方程、不等式、平面几何等诸方面的知识,主要考查学生综合运用数学知识解决问题的能力.

2. 渗透数学思想方法:在历年的高考中解答题常考常新,体现在重视能力立意,强调思维空间,高考在这部分的考查注重对数学思想和方法的考查,考题求解时考查

了函数与方程、分类讨论、数形结合、化归等数学思想,以及定义法、配方法、待定系数法、参数法、判别式法等数学通法.同时注重对数学能力的考查,以逻辑思维能力为核心,全面考查各种能力,强调探究性、综合性、应用性.

3. 注重与其他章节知识融合链接:圆锥曲线是中学数学各知识的交汇点,常与导数、平面向量、函数、方程、不等式等知识相结合,坚持多角度多层次的考查.

4. 热点问题:圆锥曲线的轨迹问题,这类问题考查学生处理解析几何问题的基本思想、方法和能力;直线与圆锥曲线位置关系问题,这类问题要注重函数方程的思想、数形结合的思想及解题中的“设而不求”、“代点作差”等方法的运用;与圆锥曲线有关的最值问题、参数范围问题,通过此类范围问题达到与函数、方程、不等式等主干知识链接,这类问题往往难度较大,关键正确构造不等式;圆锥曲线的应用问题、探索问题及与其他数学内容的交汇问题仍将是高考命题的热点.

学习应试策略

在学习过程中抓住以下几点:

1. 准确把握圆锥曲线的定义、标准方程、几何性质,要善于多角度、多层次思考问题,不断巩固强化“三基”,努力促进知识的深化、升华,要用类比的方法分析椭圆、双曲线、抛物线及其内在联系与区别.

2. 突出主体内容,准确把握尺度,以高考试题为标准,紧密围绕解析几何的两个核心,用方程的思想研究曲线,用曲线的性质研究方程来学习.这两方面的问题在高考中年年出现,且常为压轴题.因此学习时要掌握求曲线方程的思路和方法.

3. 抓好运算关,增强学生的抽象运算与变形能力.解析几何问题的解题思路容易分析出来,往往由于运算不过关而半途而废.应通过一定数量的问题,来寻求运算方案,总结简化运算的途径.

4. 充分重视图形的直观功能,借助图形分析问题,能利用平面几何知识简化运算.

5. 重视对数学思想、方法进行归纳提炼,达到优化解题思维、简化解题过程的目的.常用的数学思想方法有:

- (1) 方程思想
- (2) 用好函数思想方法
- (3) 掌握坐标法
- (4) 对称思想

由于圆锥曲线和圆都具有对称性,可使分散的条件相对集中,减少一些变量和未知量,简化计算,提高解题速度,促成问题的解决.

- (5) 参数思想

参数思想是辩证思维在数学中的反映,一旦引入参数,用参数来划分运动变化状态,以相对静止来控制变化即变与不变的转化.可在解题过程中将参数消去,起到“设而不求”的效果.

除上述常用数学思想外,数形结合、分类讨论、整体思想、构造思想也是不可缺少的思想方法,复习时也应给予足够的重视.

[单元提升篇]

圆锥曲线与方程

 课程标准要求

1. 圆锥曲线

(1) 了解圆锥曲线的实际背景,感受圆锥曲线在刻画现实世界和解决实际问题中的作用.

(2) 经历从具体情境中抽象出椭圆、抛物线模型的过程,掌握它们的定义、标准方程、几何图形及其简单性质.

(3) 了解双曲线的定义、几何图形和标准方程,知道双曲线的有关性质.

(4) 能用坐标法解决一些与圆锥曲线有关的简单几何问题(直线与圆锥曲线的位置关系)和实际问题.

(5) 通过圆锥曲线的学习,进一步体会数形结合的思想.

2. 曲线与方程

结合已学过的曲线及其方程的实例,了解曲线与方程的对应关系,进一步感受数形结合的基本思想.

第一单元

椭圆及其标准方程

知识清单精解

1 椭圆的定义

椭圆的定义	符号表示	特别提示
平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离之和等于常数 (大于 $ F_1F_2 $) 的点的轨迹叫做椭圆, 这两个定点叫做椭圆的焦点, 两焦点间的距离叫做椭圆的焦距	$ PF_1 + PF_2 = 2a (2a > F_1F_2)$	在椭圆的定义中, 平面内动点与两定点 F_1, F_2 的距离的和大于 $ F_1F_2 $ 这个条件不可忽视. 若这个距离之和小于 $ F_1F_2 $, 则这样的点不存在; 若距离之和等于 $ F_1F_2 $, 则动点的轨迹是线段 F_1F_2 .
运用定义可以解决以下两类问题: 一是由已知条件可得形如 $ PF_1 + PF_2 = 2a (2a > F_1F_2)$ 的关系可用定义求得 P 点轨迹方程; 二是知椭圆上一点, 可得 $ PF_1 + PF_2 = 2a$, 可解决求距离、求角、求面积等问题.		

2 椭圆的标准方程

标准方程	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$	$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 (a > b > 0)$
图形		
焦点坐标	$F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$	$F_1(0, -c), F_2(0, c)$
注: ①所谓标准方程, 是因为它的形式最为简单, 当且仅当椭圆中心在原点, 焦点在坐标轴上时, 所得方程才为标准方程. ②这两种椭圆的相同点是: 它们的形状、大小都相同, 都有 $a > b > 0, a^2 = c^2 + b^2$; 不同点是: 位置不同, 焦点坐标也不同. ③判别焦点在哪个轴上只要看分母的大小: 如果 x^2 项的分母大于 y^2 项的分母, 则椭圆的焦点在 x 轴上, 反之, 焦点在 y 轴上. ④两种标准方程可用一般形式表示: $Ax^2 + By^2 = 1 (A > 0, B > 0, A \neq B)$, 当 $A < B$ 时, 椭圆的焦点在 x 轴上, 当 $A > B$ 时, 焦点在 y 轴上. 在不知焦点在哪个轴上时, 可设其方程为此种形式, 这样可以减少计算量 特别提示: 椭圆的焦点总在长轴上		

3 求椭圆方程的常用方法

(1)用待定系数法求椭圆的标准方程:先定型,再定量,位置不确定时,考虑是否有两解;(2)定义法求椭圆的方程;(3)代入法求椭圆的方程;(4)参数法求椭圆的方程.

4 共焦点的椭圆系

与椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 共焦点的椭圆,可设其方程为 $\frac{x^2}{a^2 + \lambda} + \frac{y^2}{b^2 + \lambda} = 1 (\lambda > -b^2)$,可简化运算.

5 椭圆的参数设法

椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的参数设法 $\begin{cases} x = a \cos \varphi \\ y = b \sin \varphi \end{cases} (\varphi \text{ 为参数})$. 椭圆的参数设法

可以由方程 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 与三角恒等式 $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$ 相比较而得到,所以椭圆的参数设法的实质是三角代换.



数学思想方法

(1) 函数与方程

通过方程研究圆锥曲线性质是解析几何的两个基本问题之一,方程的思想方法贯穿于整章,本单元主要用于解决求值、求轨迹方程等问题.函数思想主要用于求最值或取值范围问题.

例 1 已知椭圆中心在坐标原点,焦点在坐标轴上,直线 $y = x + 1$ 和椭圆交于 P, Q 两点,且 $OP \perp OQ$, $|PQ| = \frac{\sqrt{10}}{2}$,求椭圆方程.

分析: 由于已知条件不能确定椭圆焦点位置,所以如何设所求椭圆方程是解本题的关键.求一个椭圆的方程,本质是求 x^2, y^2 项的系数,于是可设此椭圆方程为 $px^2 + qy^2 = 1 (p > 0, q > 0)$. 以下根据 $OP \perp OQ$, $|PQ| = \frac{\sqrt{10}}{2}$ 得到 p, q 的方程组,再求解即可.

解: 设椭圆方程为 $px^2 + qy^2 = 1 (p > 0, q > 0)$,

$$\text{由 } \begin{cases} y = x + 1, \\ px^2 + qy^2 = 1, \end{cases} \text{ 得 } (p+q)x^2 + 2qx + q - 1 = 0. \quad ①$$

设 $P(x_1, x_1 + 1), Q(x_2, x_2 + 1)$,

$$\because OP \perp OQ, \therefore \frac{x_1 + 1}{x_1} \cdot \frac{x_2 + 1}{x_2} = -1.$$

$$\therefore 2x_1x_2 + (x_1 + x_2) + 1 = 0. \quad ②$$

$$\text{又 } |PQ|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1 + 1 - x_2 - 1)^2 = \left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2 = \frac{5}{2},$$

$$\therefore 4(x_1 + x_2)^2 - 16x_1x_2 - 5 = 0. \quad \textcircled{3}$$

$$\text{又由韦达定理,从方程①得} \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{2q}{p+q}, \\ x_1x_2 = \frac{q-1}{p+q}. \end{cases}$$

$$\text{将其代入②③得} \begin{cases} p+q=2, \\ 16q^2 - 16(q-1)(p+q) - 5(p+q)^2 = 0. \end{cases}$$

$$\therefore 4q^2 - 8q + 3 = 0, \therefore \begin{cases} p = \frac{3}{2}, \\ q = \frac{1}{2}, \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} p = \frac{1}{2}, \\ q = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

$$\therefore \text{所求椭圆方程为 } 3x^2 + y^2 = 2 \text{ 或 } x^2 + 3y^2 = 2.$$

思路点拨:本例属于椭圆方程预先不能定位的题型,可考虑设此椭圆方程为 $px^2 + qy^2 = 1 (p > 0, q > 0)$. 其优点有二:第一它可包含两种不同位置;第二其方程为整式方程,给计算带来方便.此外,本例是用待定系数法求椭圆方程的典型题,过程中用到方程的思想,在解方程组时,要注意运算的合理性.

例 2 设椭圆的中心在原点,焦点在 x 轴上,离心率 $e = \frac{\sqrt{3}}{2}$. 已知点 $P(0, \frac{3}{2})$

到这个椭圆上的点的最远距离为 $\sqrt{7}$, 求这个椭圆方程.

解法 1: 设椭圆方程为 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, $M(x, y)$ 为椭圆上的点.

$$\text{由 } \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 得 } a = 2b.$$

$$|PM|^2 = x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -3\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 + 4b^2 + 3(-b \leq y \leq b).$$

$$\text{若 } b < \frac{1}{2}, \text{ 则当 } y = -b \text{ 时 } |PM|^2 \text{ 最大, 即 } \left(b + \frac{3}{2}\right)^2 = 7,$$

$$\therefore b = \sqrt{7} - \frac{3}{2} > \frac{1}{2}, \text{ 故矛盾.}$$

$$\text{若 } b \geq \frac{1}{2}, \text{ 则当 } y = -\frac{1}{2} \text{ 时 } |PM|^2 \text{ 最大, 即 } 4b^2 + 3 = 7, b^2 = 1.$$

$$\therefore \text{所求椭圆方程为 } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

解法 2: 根据题设条件,可取椭圆上的点的坐标是 $\begin{cases} x = a \cos \theta, \\ y = b \sin \theta. \end{cases}$

其中 $a > b > 0, 0 \leq \theta < 2\pi$.

$$\text{由 } e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

可得 $\frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2} = \sqrt{1-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}$, 即 $a=2b$.

设椭圆上的点 (x, y) 到点 P 的距离为 d , 则

$$\begin{aligned} d^2 &= x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = a^2 \cos^2 \theta + \left(b \sin \theta - \frac{3}{2}\right)^2 \\ &= a^2 - (a^2 - b^2) \sin^2 \theta - 3b \sin \theta + \frac{9}{4} = 4b^2 - 3b^2 \sin^2 \theta - 3b \sin \theta + \frac{9}{4} \\ &= -3b^2 \left(\sin \theta + \frac{1}{2b}\right)^2 + 4b^2 + 3. \end{aligned}$$

如果 $\frac{1}{2b} > 1$, 即 $b < \frac{1}{2}$, 则当 $\sin \theta = -1$ 时 d^2 (从而 d) 的值最大,

由题设得 $(\sqrt{7})^2 = \left(b + \frac{3}{2}\right)^2$, 由此得 $b = \sqrt{7} - \frac{3}{2} > \frac{1}{2}$, 与 $b < \frac{1}{2}$ 矛盾.

因此必有 $\frac{1}{2b} \leq 1$ 成立.

于是当 $\sin \theta = -\frac{1}{2b}$ 时 d^2 (从而 d) 的值最大, 由题设得 $(\sqrt{7})^2 = 4b^2 + 3$,

由此可得 $b=1, a=2$.

所求椭圆方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

思路点拨: 本题的两种解法都是通过建立距离的目标函数, 利用函数最值来解决问题, 法 1 要注意椭圆上的点的取值范围的限制, 即把问题转化为在给定区间上求最值; 法 2 利用椭圆的参数设法使问题转化为利用三角函数的有界性求最值.

(2) 数形结合的思想

解析几何是代数与几何的一种统一, 常要将代数的运算推理与几何的论证说明结合起来考虑问题, 在解题时要充分利用代数运算的严密性与几何论证的直观性, 尤其是将某些代数式子利用其结构特征, 想象为某些图形的几何意义而构图, 用图形的性质来说明代数性质. 在本单元数形结合思想主要用于“以图辅数”.

例 3 已知 c 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的半焦距, 则 $\frac{b+c}{a}$ 的取值范围是 ()

A. $(1, +\infty)$

B. $(\sqrt{2}, +\infty)$

C. $(1, \sqrt{2})$

D. $(1, \sqrt{2}]$

解析: 如图 1-1-1, 在 $\triangle AFO$ 中, $\frac{b+c}{a} = \sin \theta + \cos \theta$, θ 为锐角, 转化为三角函数问题.

答案: D

例 4 已知 $A(4, 0), B(2, 2)$ 是椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 内的两个点, M 是椭圆上的

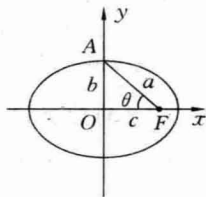


图 1-1-1