新课标

鼎尖教案

教材教案、教辅教案、习题教案

数学

选修 2-2

人教B版

新课标·高中同步·鼎尖学案（个性化学案）

新课标·高中同步·鼎尖教案（通用型教案）

丛书主编：严治理　黄俊葵
马捡虎　刘芳芳

延边教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

鼎尖教案：数学.2—2：选修/王金兴主编．—延吉：延边教育出版社，2008.10

ISBN 978-7-5437-7428-5

Ⅰ.鼎… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课—教案（教育）—高中 Ⅳ.G633

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 159091 号

□ 本册主编：王金兴

□ 副 主 编：陈怀富　崔旭亮

□ 编　　著：马秀萍　李志强　齐建宏　孙兆文　陈新生
逄小玲　张　美　杨红英　郑玉三　刘福兴
常文芹　安仲伟　常洪德　刘秀花　管延霞
王克明　管延娥　刘福强　丁祥芳　徐　红

□ 责任编辑：严今石

□ 法律顾问：北京陈鹰律师事务所（010-64970501）

与 *人教B版* 普通高中课程标准实验教科书同步

《鼎尖教案》数学　选修 2—2

出版发行：延边教育出版社
地　　址：吉林省延吉市友谊路 363 号（133000）
北京市海淀区苏州街 18 号院长远天地 4 号楼 A1 座 1003（100080）
网　　址：http://www.topedu.org
电　　话：0433-2913975　010-82608550
传　　真：0433-2913971　010-82608856
排　　版：北京鼎尖雷射图文设计有限公司
印　　刷：大厂书文印刷有限公司
开　　本：890×1240　16 开本
印　　张：15.25
字　　数：550 千字
版　　次：2009 年 2 月第 1 版
印　　次：2009 年 2 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5437-7428-5
定　　价：30.50 元

《鼎尖教案》

数学选修 2-2（人教B版）

我们提供的
不仅是传统的教案
还有
实现教学模式多样化的系统方法

我们提供的
不仅是不同思路的教学模式
还有
为实现这些思路而搭建的
一个动态开放的平台

在这个平台上
你尽可以
自由释放自己的教学思想、智慧与个性
组合适合自己的教学模式

而这一切
正是我们
对新课程教学改革的探索与回应
体现着我们
对人民教师的
充分尊重和终极关怀

主　编：王金兴

延边教育出版社

学案教案配套用，老师学生真轻松！

教材教案、教辅教案、习题教案，两种思路任你选择。

课前预习、课堂笔记、课后作业，多种模式自由组合。

《鼎尖学案》丛书特色

○ **学案模式自主定制**　《鼎尖学案》将教学过程分为课前预习、课堂笔记、课后作业三个环节，充分考虑教师的教学习惯和学生的差异性。同时依托《鼎尖教案》，提供多种学案组合模式，供您自由选择定制，满足师生的个性化需求。《鼎尖学案》的问世，标志着教辅个性化时代的到来。

○ **教案学案配套使用**　丛书的编写以《鼎尖教案》为基础，合理区分教师教案和学生学案的内容功能，强调教案和学案的配套使用，强调教案与学案的实质性互动对接，方便于教师教学和学生听课、做笔记、训练，有助于提高教师的教学效果和学生的听课效率。是学生听课的笔记本，课堂训练、课后作业的作业本，让上课更方便，让学习更轻松。

○ **互动开放方便实用**　《鼎尖学案》充分利用“鼎尖教案”这一动态开放式资源平台，体现教案与学案的互补功能，通过预留空白等形式，避免了以往的教案和学案对教学过程统得过多、过死以及不符合教学实际等问题，为教师主导作用和学生主体作用的充分发挥，提供了广阔的思维空间。在装订方式上，我们也将根据您的要求，或采用成书的方式，或采用活页的方式进行制作，方便您的使用。

前言

Qianyan

国家新课程改革的教学观，强调教学目标的全面性和具体化，强调学习方式、教学活动方式的多样化，强调学习的选择性。要适应新课程教学改革的要求，提倡自主、探索与合作的学习方式，使学生在教师指导下主动地、富有个性和创造性地学习，就必须坚持教学模式的多样化。

教学模式的多样化是新课程实施的重要途径，也为教学模式的多样化研究提供了有利的理论和实践环境。教学模式的多样化，要求教师必须在准确把握教学目标、教学内容、师生情况、运用条件和评价体系特点的前提下，利用和发挥自身特长、体现自身特色，采用相应的教学模式。

《鼎尖教案》系列丛书，是依托延边教育出版社多年教案出版经验和资源优势，由近百名教辅研究专家精心策划的一套教案丛书。书中的教学案例，大都是在全国范围内广泛征集的优秀作品，是全国一线特高级教师经验智慧的结晶，代表着当前教学改革方向和最高水平，堪称精品。

丛书以“教学模式多样化”为基本原则，通过科学合理的设计，克服了以往教案类产品无法解决的教学模式单一的问题，对于推进新课程改革具有很强的指导意义，是广大教师教学的参考和帮手，其主要特点如下：

○ **工具性** 突出实用性、系统性、工具性、资料性，汇集教学教案、重难点知识讲解、类题（题型）讲解、规律方法总结、知识体系构建、训练题库等内容，为教师提供融课堂教学、钻研教材、课后辅导、习题编选于一体的全息资源库。

○ **选择性** 体现教学模式多样化原则，对同一知识体系的教授和解读方式，提供两种教学形式和教学思路，展示两种解决问题的方法，搭建动态开放的资源平台。教师可根据学生特点和教学习惯自由选择组合，形成多种教学模式。

○ **系统性** 创新教案编写模式，内容包括教材教案、教辅教案、习题教案三个板块，为教师提供教学模式多样化的全方位系统解决之道，教师得到的不仅是新授课的教案，更有复习课、训练讲评等内容的教案。同时注重教师用书与学生用书的配套互补功能，同步推出配套学案，方便教师教学。

教学模式开发和应用的过程，是一个随着教育理论和教学实践不断发展的双向的动态的过程，在探索教学模式多样化的过程中，按照“学习—实践—评价—创新—构建”的思路，我们将不断探索和创新更多的教学模式。同时感谢在本书编写和教案征集中，为我们提供帮助和支持的广大教师，也希望有更多的人能够参与进来，与我们共同探索实现教学模式多样化的思路和办法。

北京世纪鼎尖教育研究中心

教材教案

- **教学目标**
  - 知识与技能
  - 过程与方法
  - 情感、态度与价值观
- **重点难点**
  - 重点
  - 难点
- **案例一、二（以课时为单位）**
  - 教学过程
  - 板书设计
  - 教学反思（随机设置）

教辅教案

- **案例一　课时详解（以课时为单位）**
  - 课堂导入
  - 课前自主学习
  - 课堂合作探究
    - 情景激疑
    - 知识点归纳
    - 典例剖析
  - 概括整合
- **案例二　精析精练（以节为单位）**
  - 课堂合作探究
    - 重点难点突破
    - 典型例题分析
  - 规律方法总结
- **定时巩固检测**
  - 基础训练
  - 能力提升

习题教案

- **案例一　同步练习（以课时为单位）**
- **案例二　一课3练（以节为单位）**
  - 基础巩固
  - 能力升级
  - 拓展探究

单元末

- **单元概括整合**
  - 单元复习课
  - 单元测试卷

体例表解

<table>
<tr><th colspan="4">主要栏目名称</th><th>栏目设计功能</th><th>栏目使用建议</th></tr>
<tr><td rowspan="8">教材教案</td><td rowspan="3">[教学目标]</td><td colspan="2">[知识目标]</td><td rowspan="3">依据教材和课程标准，让学生了解本课时的“三维目标”</td><td rowspan="8">两套案例体现了不同的教学思路和技巧，教师可根据自己的授课模式，自主选择一种教学案例，师生互动，完成教学</td></tr>
<tr><td colspan="2">[过程与方法]</td></tr>
<tr><td colspan="2">[情感、态度与价值观]</td></tr>
<tr><td rowspan="2">[重点难点]</td><td colspan="2">[重点]</td><td rowspan="2">帮助教师、学生准确把握教材的深广度，明确本课时学习的重点、难点</td></tr>
<tr><td colspan="2">[难点]</td></tr>
<tr><td rowspan="3">案例一
案例二
（以课时为单位）</td><td colspan="2">[教学过程]</td><td>体现情景设置、师生互动等课堂教学思路，既给教师以启发，又不束缚教师的创造性</td></tr>
<tr><td colspan="2">[板书设计]</td><td>直观、清晰地呈现本课时的主要内容</td></tr>
<tr><td colspan="2">[教学反思]（机动）</td><td>对教学方法和教学过程的反思，提出改进设想</td></tr>
<tr><td rowspan="10">教辅教案</td><td rowspan="6">案例一
课时详解
（以课时为单位）</td><td colspan="2">[课堂导入]</td><td>激发学生学习兴趣，导入本课内容</td><td rowspan="2">学生课前自主完成</td></tr>
<tr><td colspan="2">[课前自主学习]</td><td>引导学生自学课本内容，培养自主学习能力</td></tr>
<tr><td rowspan="3">[课堂合作探究]</td><td>[情景激疑]</td><td>提供课堂讨论材料，学生思考归纳出知识点</td><td rowspan="7">可供教师授课，学生自主学习时使用</td></tr>
<tr><td>[知识点归纳]</td><td>通过情景激疑的讨论引出知识点内容，按知识分块讲解，各个击破</td></tr>
<tr><td>[典例剖析]</td><td>通过例题讲解、变式练习，理解、巩固知识点</td></tr>
<tr><td colspan="2">[概括整合]</td><td>将本课时主要内容总结归纳，帮助学生形成知识网络</td></tr>
<tr><td rowspan="3">案例二
精析精练
（以节为单位）</td><td rowspan="2">[课堂合作探究]</td><td>[重点难点突破]</td><td>对本节重点和难点知识进行详细全面讲解，按知识层次整体突破</td></tr>
<tr><td>[典型例题分析]</td><td>通过例题讲解、变式练习，理解、巩固知识点内容</td></tr>
<tr><td colspan="2">[规律方法总结]</td><td>将本节主要规律、方法总结归纳，帮助学生形成知识网络</td></tr>
<tr><td colspan="3">[定时巩固检测]</td><td>通过强化训练，巩固所学知识</td><td>教师可安排学生课堂集中检测和学生课后自主完成相结合</td></tr>
<tr><td rowspan="2">习题教案</td><td colspan="3">案例一　同步练习（以课时为单位）</td><td>用习题让学生对本课时所学知识进行检测</td><td rowspan="2">教师可安排学生课堂集中检测和学生课后自主完成相结合</td></tr>
<tr><td colspan="3">案例二　一课 3 练（以节为单位）</td><td>将习题划分为“基础巩固——能力升级——拓展探究”，让学生对本节所学知识分层次进行检测</td></tr>
<tr><td rowspan="2">单元末</td><td rowspan="2">[单元概括整合]</td><td colspan="2">[单元复习课]</td><td>通过例题分析导入，归纳总结知识规律或解题方法，提高解题能力</td><td>教师指导学生对本章内容进行回顾</td></tr>
<tr><td colspan="2">[单元测试卷]</td><td>以测试卷的形式对本章学习效果进行检测</td><td>教师安排学生课堂集中检测，或者学生课后自主完成</td></tr>
</table>

CONTENTS 目录

目录 CONTENTS

CONTENTS 目录

目录 CONTENTS

附录　个性化学案模式说明

第一章 导数及其应用

1.1 导 数

1.1.1 函数的平均变化率(1课时)

第一教案 **教材教案**

教学目标

☞知识与技能

通过具体事例,感受平均变化率广泛存在于日常生活之中,经历运用数学描述和刻画现实世界的过程.

☞过程与方法

理解平均变化率的意义,为后续建立瞬时变化率和导数的数学模型提供丰富的背景.

☞情感、态度与价值观

1. 让学生通过学习了解变化率的广泛应用:在几何体中的应用,在物理学中的应用,在其他数学知识中的体现,培养学生多方面的数学素养.

2. 体会数学的博大精深以及学习数学的意义.

重点 难点

☞重点

函数在某一点的平均变化率.

☞难点

准确求解函数的平均变化率.

案例(一)

教学过程

由实际生活中爬山时,坡度的大小与感觉劳累的程度不同,以及在走路时,走的快和走的慢,感觉也不一样,这是什么原因呢?通过本节的学习,我们可以从数学的角度来解释.教师板书课题《函数的平均变化率》.

一、问题情境

设计意图

通过具体的问题分析,更加有助于对本节要学习内容的理解.

师生活动

[师]屏幕展示以下问题.

情境1:现有南京市某年3月和4月某天日最高气温记载.

时间	3月18日	4月18日	5月18日
日最高气温	3.5 ℃	15.6 ℃	35.4 ℃

观察3月18日到4月18日与4月18日到5月18日的温度变化,用曲线图表示出来.

[生]动手在坐标系上画出温度和时间的一个曲线图形.

[师]屏幕显示图形.

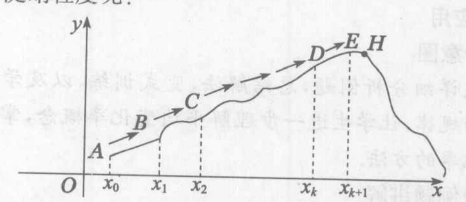
[生]思考下面的问题:"气温陡增"是一句生活用语,它的数学意义是什么?(形与数两方面)

[师]师生共同回答问题."气温陡增"是指温度在相同的时间内变化大,即温差大.

[师]屏幕展示情境2.

情境2:如图,是一座山的剖面示意图,并在上面建立了平面直角坐标系,A是出发点,H是山顶,爬山路线用函数$y=f(x)$表示.

自变量x表示某旅游者的水平位置,函数值$y=f(x)$表示此时旅游者所在的高度,想想看,如何用数量表示旅游者登山路线的平缓与陡峭程度呢?



[生]思考.若A点坐标为开始,每相邻两个点之间,横坐标和纵坐标之间各自的变化量是多少?

[师]带领学生一起总结出变化量的概念.向学生提出问题:如果把A、B两点的连线近似看成线段,那么线段AB的斜率用前面的两个变化量如何表示出来?

[生]思考回答教师提出的问题.

[师]请同学思考:每段山坡的坡度大小和这段山坡所在线段的斜率大小有什么关系?

$\overrightarrow{AB}=(\Delta x,\Delta y)$,则有$k=\tan\theta=\dfrac{y_1-y_0}{x_1-x_0}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

"线段"所在直线的斜率绝对值越大,山坡越陡,反之,山坡越平缓.

[生]思考回答.

二、平均变化率的定义

设计意图

通过教师引导,学生自己总结学习平均变化率的概念,培养学生总结、归纳的能力.

师生活动

[师]通过前面的两个问题情境,一起总结平均变化率的概念:在研究问题时,两个量各自变化率的比值,叫做平均变化率.

[生]理解记忆变化率的概念.

[师]让学生思考举例说明变化率.

[生]举例回答.

三、函数的平均变化率

设计意图

通过由一般问题的平均变化率推广得到函数的平均变化率,感受由特殊到一般,提高实际问题的建模能力.

师生活动

[师]如果把前面的两个问题情境都看成一个量为 x,一个量为 y,两者之间都有一个函数关系 $y=f(x)$,请同学们把任意两点间线段的斜率表示式,用 x 和 $f(x)$ 的表达式来写出.

[生]动手写 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的表达式.

[师]我们把 Δy 的意义表示为 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,那么 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 的表达式则为我们要学习研究的函数的平均变化率.

[生]总结出函数的平均变化率的定义:

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

[生]教师板书函数的平均变化率的定义,师生共同分析探究.一般地,已知函数 $y=f(x)$,x_0,x_1 是其定义域内不同的两点,记 $\Delta x=x_1-x_0$,$\Delta y=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,则当 $\Delta x\neq 0$ 时,商

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

称作函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$(或 $[x_0+\Delta x,x_0]$)的平均变化率.

[师]强调说明 Δx 和 Δy 可正可负,Δy 也可以为零.

四、应用

设计意图

通过详细分析例题,总结解法,变式训练,以及学生总结解题方法和规律,让学生进一步理解平均变化率概念,掌握求函数平均变化率的方法.

(一)例题讲解

[师]屏幕展示教材例 1.

[生]动手解答例 1.

[师]屏幕展示教材例 2.

[生]动手解答例 2.

(二)变式训练

[师]屏幕显示变式题目.

变式题 如果一个质点从定点 A 开始运动,在时间 t 的位移函数为 $y=f(t)=t^3+3$.当 $t_1=4$ 且 $\Delta t=0.01$ 时,求 Δy 和 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$.

答案
$$\begin{aligned}\Delta y&=f(4+\Delta t)-f(4)\\&=(4+\Delta t)^3+3-4^3-3\\&=\Delta t^3+48\Delta t+12\Delta t^2\\&=(0.01)^3+48(0.01)+12(0.01)^2\\&=0.481\ 201.\end{aligned}$$

$$\therefore \frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{0.481\ 201}{0.01}=48.120\ 1.$$

[生]动手解答.

五、课堂练习

学生动手做教材练习 A.

[师]提问同学回答.

六、课堂小结

[师]请同学们思考本节课所学的内容有哪些?

[生]回答本节主要内容.

[生]共同总结如下:

(1)函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

(2)函数的平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

(3)函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义.

(4)Δx 可正可负,Δy 可正可负可零.

(5)注意 x、y 改变量的顺序对应.

七、布置作业

教材练习 B.

板书设计

一、问题情境 情境 1 情境 2 二、平均变化率的定义 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$的意义	三、函数的平均变化率 $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$ 四、应用 例 1 例 2	五、课堂练习 六、课堂小结 七、布置作业

案例(二)

教学过程

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
前置练习	1.一汽车在 8:00 时的速度为 80 km/h,在 9:00 时的速度为 120 km/h,问这一个小时其速度变化多少? 2.求出每分钟速度平均变化多少?	教师屏幕显示前置练习. 学生思考分析回答.	由实际问题入手,让学生对变化率有形象的认识.

续表

<table>
<tr><th>教学环节</th><th>教学内容</th><th>师生互动</th><th>设计意图</th></tr>
<tr><td rowspan="2">概念形成</td><td>问题1:同学们基本都爬过山,那么平缓的山好攀登?还是陡峭的山好攀登呢?
问题2:想想是什么原因呢?请同学们自己做个简单图形来分析.
问题3:对比分析两个一样高度的山,一个平缓,一个陡峭,那么两者的区别在哪里?
问题4:在跑步的时候,在相同的时间内,快跑累,还是慢跑累?</td><td>由前置练习,引入正课,板书课题:函数的平均变化率.
教师提出问题,关于反映变化大小的问题还有哪些?
学生思考回答.
师生一起补充.
师生共同讨论为什么陡峭的山,攀登更感觉累.</td><td>引起同学们学习的兴趣.
体现动手能力和参加思考的主动性.</td></tr>
<tr><td>对登山问题,做图形一起分析.
得到结论,找出问题的关键,导致不同感觉的原因是相同条件下,变化量的大小不一样.
1.平均变化率的概念
在一定的单位条件内,所研究的量的变化值,称做在此条件下的平均变化率.
把山坡分成许多小段,每一小段可看为平直的.会得到,不管哪一段山坡,高度的平均变化都可以用起点和终点的纵坐标之差与横坐标之差的比值来表示:
$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$
2.函数的平均变化率
一般地,已知函数 $y=f(x)$,x_0,x_1 是其定义域内不同的两点,记 $\Delta x=x_1-x_0$,$\Delta y=y_1-y_0$,$=f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,则当 $\Delta x\neq 0$ 时,商
$\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$
称作函数 $y=f(x)$ 在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$(或$[x_0+\Delta x,x_0]$)的平均变化率.
注意:
(1)Δx 和 Δy 可正可负,Δy 也可以为零.
(2)Δy 的形式也可以为 $f(x_0)-f(x_0-\Delta x)$.</td><td>教师:提出问题,同学们能否把我们所分析的问题,用一个共同的语言叙述出来?
师生共同总结得到平均变化率的概念.
教师共同分析山坡的平缓和陡峭,具体用数学式子怎么表示.
教师:
由平均变化率再到函数的平均变化率.
师生共同对概念分析:
学生思考概念的关键在哪里.
教师强调注意事项.
教师提出问题:请同学思考解决函数的平均变化率问题的关键在哪里?
同学们回答.</td><td>让学生自己总结:体现由特殊到一般的数学思想.
享受发现问题和自己总结问题的学习乐趣.
把实际问题数学化,让学生养成把实际问题建模的好习惯.
借此说明:函数能够代表很多方面的问题.
让学生们自己先思考如何解决此类问题,为下面的例题讲解做好铺垫.</td></tr>
<tr><td>概念应用</td><td>例1 求函数 $y=x^2$ 在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$的平均变化率.
解答:略.
例2 求函数 $y=\frac{1}{x}$ 在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$的平均变化率($x_0\neq 0$).
解答:略.
规律总结:
(1)有函数的解析式,
(2)有自变量的变化区间,
(3)应用平均变化率的公式,
(4)得到函数平均变化率的结果.</td><td>学生独立解决,再讨论交流,让后教师对学生的回答进行评价.教师对学生的解题步骤进行投影,发现问题个别指导.
教师:
请同学们总结解题的基本步骤.
提问一名同学回答,再共同补充.</td><td>进一步加强对函数的平均变化率的理解及提高解题能力.
培养学生总结问题的能力.</td></tr>
</table>

续表

教学环节	教学内容	师生互动	设计意图
课堂练习	1. 教材练习A. 2. 设函数 $f(x)=x^2-1$,当自变量 x 由1变到1.1时,函数的平均变化率为 ( ) A. 2.1 B. 1.1 C. 2 D. 0 3. 若函数 $f(x)=2x^2+1$,图象上 $P(1,3)$ 及邻近上点 $Q(1+\Delta x,3+\Delta y)$,则 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=$ ________.	学生动手做课堂练习题目. 师生共同纠正分析答案.	强化对函数的平均变化率定义的理解和对此类题型的求解规律的总结.
归纳总结	(1)函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, (2)函数的平均变化率 $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$, (3)函数 $f(x)$ 在 x_0 处有定义, (4) Δx 和 Δy 可正可负,Δy 也可以为零, (5)改变量的对应.	教师让学生讨论后,总结本节所学知识,然后共同补充.	让学生自己总结,锻炼学生的概念分析能力,让学生有清晰的认知结构.
布置作业	教材练习B.		课下巩固所学知识.

板书设计

一、前置练习 二、概念形成 问题1 问题2 问题3 问题4	1. 平均变化率的概念 2. 函数的平均变化率 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 三、概念应用 例1	例2 四、课堂练习 五、归纳总结 六、布置作业

第二教案 教辅教案

案例(一)——课时详解

课堂导入

事物的变化率往往是相关的两个量的变化量的比值.

如:气球的膨胀率为半径的变化量比体积的变化量.

位移的变化率为位移变化量与时间的变化量的比.

课前自主学习

1. 在高台跳水运动中,运动员在 $t_1\leqslant t\leqslant t_2$ 这段时间里的位移为 $S_1\leqslant S\leqslant S_2$,则平均速度是________.

2. 一般地,已知函数 $y=f(x)$,x_0,x_1 是定义域内不同的两点,记 $\Delta x=x_1-x_0$,$\Delta y=y_1-y_0=f(x_1)-f(x_0)=$________,则当 $\Delta x\neq 0$ 时,商________称作函数 $y=f(x)$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$ (或 $[x_0+\Delta x,x_0]$)的平均变化率.

答案 1. $\frac{S_2-S_1}{t_2-t_1}$

2. $f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$

课堂合作探究

知识点一 变化率问题

情景激疑

现有南京市某年3月和4月某天日最高气温记载.

时间	3月18日	4月18日	5月18日
日最高气温	3.5 ℃	15.6 ℃	35.4 ℃

观察:3月18日到4月18日与4月18日到5月18日的温度变化,你认为哪段时间温度变化大?

知识点归纳

1. 上面问题体现了量的变化问题,由于量变化的问题导致不同的感觉.

2. 单位时间内温度变化大的,给人感觉温差大.

说明 分析一些问题的变化率时,主要是分析在一定的时间或者长度和空间内,量的变化情况.

典例剖析

【例1】 一汽车在8:00时的速度为80 km/h,在9:00时的速度为120 km/h,问这一个小时其速度变化率是多少?

解析 根据速度平均变化率的概念分析.

答案 120－80＝40(km),所以在这一个小时内的速度的变化率为40.

错因分析 变化率单位不能是km.

知识点二 平均变化率

情景激疑

我们知道,非匀速直线运动的物体,位移s与所经过的时间t的规律是$s=s(t)$,设Δt为时间改变量,从t_0到$t_0+\Delta t$这段时间内,物体的位移是$\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$,那么位移改变量$\Delta s$与时间改变量$\Delta t$的比,就是这段时间的平均速度$\bar{v}$,即$\bar{v}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$.

知识点归纳

1. 在一定的单位条件内,所研究的量的变化值,称做在此条件下的平均变化率.

2. 把山坡分成许多小段,每一小段可看为平直的.会得到,不管哪一段山坡,高度的平均变化都可以用起点和终点的纵坐标之差与横坐标之差的比值来表示:$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_{k+1})-f(x_k)}{x_{k+1}-x_k}$

典例剖析

【例2】 自由落体的运动方程为$s=\frac{1}{2}gt^2$,计算t从3 s到3.1 s,3.01 s,3.001 s各段内的平均速度(位移s的单位为m).

解析 根据自由落体运动公式,求出每个时间段内的平均变化率.

答案 设在[3,3.1]内的平均速度为v_1,则

$\Delta t_1=3.1-3=0.1(s)$,

$\Delta s_1=s(3.1)-s(3)$

$=\frac{1}{2}g\times 3.1^2-\frac{1}{2}g\times 3^2$

$=0.305g(m)$,

$\therefore v_1=\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1}=\frac{0.305g}{0.1}=3.05g(m/s)$;

同理得 $v_2=3.005g(m/s)$,

$v_3=3.0005g(m/s)$.

方法指导 求平均速度就是求位置增量(Δs)与时间增量(Δt)的比.

【变式训练1】 质点M按规律$s=2t^2+3$做直线运动(位移单位:cm,时间单位:s),求质点M在$t=2$ s时的瞬时速度,并与运用匀变速直线运动速度公式求得的结果进行比较.

解析 $t=2$时的瞬时速度$v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$.

答案 $v=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{s(2+\Delta t)-s(2)}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{2(2+\Delta t)^2-2\times 2^2}{\Delta t}$

$=\lim\limits_{\Delta t\to 0}(2\Delta t+8)=8$ cm/s,

根据匀变速直线运动速度公式:$v=at+v_0=4t$,

$\therefore t=2$时,$v=8$ cm/s.

知识点三 函数的平均变化率

情景激疑

1. 实际问题能否转化为函数问题来分析?

2. 能否把许多问题的平均变化率问题都用函数的平均变化率来研究?

知识点归纳

一般地,已知函数$y=f(x)$,x_0,x_1是其定义域内不同的两点,记$\Delta x=x_1-x_0$,$\Delta y=y_1-y_0$,$=f(x_1)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,则当$\Delta x\neq 0$时,商

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

称作函数$y=f(x)$在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$(或$[x_0+\Delta x,x_0]$)的平均变化率.

说明 (1)函数的增量$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,

(2)函数的平均变化率$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$,

(3)函数$f(x)$在x_0处有定义,

(4)Δx和Δy可正可负,Δy也可以为零,

(5)注意改变量的对应.

典例剖析

【例3】 求函数$y=x^3$在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$的平均变化率.

答案 函数$y=x^3$在区间$[x_0,x_0+\Delta x]$的平均变化率为:

$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\frac{(x_0+\Delta x)^3-x_0^3}{\Delta x}$

$=\frac{(x_0+\Delta x-x_0)[x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2+x_0^2+x_0^2+\Delta x\cdot x_0]}{\Delta x}$

$=3x_0^2+\Delta x^2+3\Delta x\cdot x_0$.

规律总结 应用函数的平均变化率的公式,直接求解即可,注意计算准确.

【变式训练2】 设函数$f(x)=x^2-1$,当自变量x由1变到1.1时,函数的平均变化率为 ( )

A. 2.1　B. 1.1　C. 2　D. 0

解析 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1.1^2-1^2}{1.1-1}=\frac{0.21}{0.1}=2.1$,故选择A.

答案 A

【变式训练3】 在$x=1$附近,取$\Delta x=0.3$,在四个函数①$y=x$,②$y=x^2$,③$y=x^3$,④$y=\frac{1}{x}$中,平均变化率最大的是 ( )

A. ④　B. ③　C. ②　D. ①

解析 根据函数解析式分别计算其函数的平均变化率,可知函数$y=x^3$在$x=1$附近,取$\Delta x=0.3$时的平均变化率最大,选B.

答案 B

概括·整合

用函数在某一点附近的平均变化率,可以刻画函数图象的变化趋势,如教材中例1,因为该函数在x_0取正值,并越来越大时,它的平均变化率也不断增大,所以该曲线变得越来越"陡".

案例(二)——精析精练

课堂合作探究

重点难点突破

知识点一　函数的平均变化率

1.函数平均变化率的概念

已知函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 及其附近有定义，令 $\Delta x=x-x_0$；$\Delta y=y-y_0=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

则当 $\Delta x\neq 0$ 时，比值 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 叫做函数 $y=f(x)$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率.

2.求函数 $f(x)$ 平均变化率的步骤

(1)求函数值的变化量 $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$；

(2)计算平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.

知识点二　比较函数的平均变化率的大小

看平均变化率哪一个大，实际是比较大小的问题，应按作差法或作商法的步骤进行判断，关键是对差的符号进行判断.

典型例题分析

题型1　求函数在某点附近的变化率

【例1】 求 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $x=x_0(x_0\neq 0)$ 附近的平均变化率.

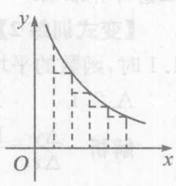
解析　根据求函数平均变化率的步骤进行.

答案　当自变量从 x_0 变到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的平均变化率为

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

$$=\frac{\frac{1}{x_0+\Delta x}-\frac{1}{x_0}}{\Delta x}$$

$$=-\frac{1}{(x_0+\Delta x)x_0}.$$



规律总结　当 x_0 取正值并不断增大时，该函数的平均变化率不断地减小，曲线变得越来越平缓，如图，可直接看出.

【变式训练1】 求 $y=x^2-2x+1$ 在 $x=-2$ 附近的平均变化率.

答案　当自变量从 -2 变化到 $-2+\Delta x$ 时，函数的平均变化率为 $\dfrac{y_2-y_1}{\Delta x}=\dfrac{(-2+\Delta x)^2-2(-2+\Delta x)+1-[(-2)^2+4+1]}{\Delta x}=\Delta x-6$.

题型2　求函数 $y=f(x)$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率

【例2】 求 $y=x^2$ 在 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 之间的平均变化率.

解析　紧扣函数的平均变化率进行求解.

答案　当自变量从 x_0 到 $x_0+\Delta x$ 时，函数的平均变化率为 $\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\dfrac{(x_0+\Delta x)^2-x_0^2}{\Delta x}=2x_0+\Delta x$.

规律总结　函数在某个区间上的平均变化率问题，应用平均变化率定义式直接求解.

【变式训练2】 过曲线 $y=f(x)=x^3$ 上两点 $P(1,1)$ 和 $Q(1+\Delta x,1+\Delta y)$ 作曲线的割线，求出当 $\Delta x=0.1$ 时割线的斜率.

解析　割线 PQ 的斜率就是平均变化率 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

答案　$\because \Delta y=f(1+\Delta x)-f(1)$

$=(1+\Delta x)^3-1$

$=\Delta x^3+3\Delta x^2+3\Delta x$,

$\therefore$ 割线 PQ 的斜率 $k=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$

$=\dfrac{\Delta x^3+3\Delta x^2+3\Delta x}{\Delta x}$

$=\Delta x^2+3\Delta x+3$.

设当 $\Delta x=0.1$ 的割线的斜率为 k_1，则

$k_1=(0.1)^2+3\times 0.1+3=3.31$.

规律总结　一般地，设曲线 C 是函数 $y=f(x)$ 的图象，$P(x_0,y_0)$ 是曲线上的定点，点 $Q(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ 是曲线上与点 P 邻近的点，则有 $y_0=f(x_0)$，$y_0+\Delta y=f(\Delta x+x_0)$，割线 PQ 的斜率 $k=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$.

题型3　比较函数的平均变化率的大小

【例3】 试比较正弦函数 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 和 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 附近的平均变化率哪一个大？

解析　先将正弦函数在每个自变量的附近的平均变化率求出，然后进行大小的比较.

答案　当自变量从 0 到 Δx 时，函数的平均变化率为

$k_1=\dfrac{\sin\Delta x-\sin 0}{\Delta x}=\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}$.

当自变量从 $\dfrac{\pi}{2}$ 变到 $\Delta x+\dfrac{\pi}{2}$ 时，函数的平均变化率为

$$k_2=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\Delta x\right)-\sin\frac{\pi}{2}}{\Delta x}=\frac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}.$$

由于是在 $x=0$ 和 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 的附近的平均变化率，可知 Δx 较小，但 Δx 既可以为正，又可以为负.

当 $\Delta x>0$ 时，$k_1>0$，$k_2<0$，此时有 $k_1>k_2$；

当 $\Delta x<0$ 时，$k_1-k_2=\dfrac{\sin\Delta x}{\Delta x}-\dfrac{\cos\Delta x-1}{\Delta x}$

$=\dfrac{\sin\Delta x-\cos\Delta x+1}{\Delta x}=\dfrac{\sqrt{2}\sin\left(\Delta x-\frac{\pi}{4}\right)+1}{\Delta x}$,

$\because \Delta x<0$，$\therefore \Delta x-\dfrac{\pi}{4}<-\dfrac{\pi}{4}$,

$\therefore \sin\left(\Delta x-\dfrac{\pi}{4}\right)<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,

从而有 $\sqrt{2}\sin\left(\Delta x-\dfrac{\pi}{4}\right)<-1$,

$\sqrt{2}\sin\left(\Delta x-\dfrac{\pi}{4}\right)+1<0$,

$\therefore k_1-k_2>0$，即 $k_1>k_2$.

综上可知，正弦函数 $y=\sin x$ 在 $x=0$ 附近的平均变化率大于在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 附近的平均变化率.

方法指导　求解函数平均变化率的大小，实际为实数大小比较大小，应按作差法或作商法的步骤进行，再对差(或商)进行