Exercises for Signals and Systems

信号与系统例题分析

乐正友 编著

Yue Zhengyou

清华大学出版社

Exercises for Signals and Systems

信号与系统例题分析

乐正友　编著

Yue Zhengyou

清华大学出版社

北京

内容简介

全书共分7章，涵盖了信号及其基本运算、连续与离散时间系统的时域分析、傅里叶变换、离散时间傅里叶变换、傅里叶变换的应用、拉普拉斯变换和 z 变换等“信号与系统”的教学内容。

全书编写了122道不同类型的例题。例题以课程基本内容为主，侧重于课程重点、难点的分析，并通过对例题的分析求解，引导学生掌握“信号与系统”的基本理论和基本分析方法，提高学生的理解能力和分析能力。

本书可作为学生学习“信号与系统”的辅导教材，也可作为教师讲授该课程的参考资料。

图书在版编目（CIP）数据

信号与系统例题分析 / 乐正友编著. —北京：清华大学出版社，2008.10

ISBN 978-7-302-18437-9

Ⅰ. 信…　Ⅱ. 乐…　Ⅲ. 信号系统—高等学校—解题　Ⅳ. TN911.6-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第130807号

责任编辑：邹开颜

责任校对：王淑云

责任印制：李红英

出版发行：清华大学出版社　　地　址：北京清华大学学研大厦A座

http://www.tup.com.cn　　邮　编：100084

社 总 机：010-62770175　　邮　购：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者：北京市昌平环球印刷厂

装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂

经　销：全国新华书店

开　本：185×230　印　张：16　字　数：345千字

版　次：2008年10月第1版　印　次：2008年10月第1次印刷

印　数：1～4000

定　价：28.00元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。

联系电话：010-62770177 转 3103　产品编号：021800-01

前 言

“信号与系统”是电类学科的专业基础课，其研究的基本理论和基本方法已在众多不同学科里得到了广泛的实际应用。已经走向社会的学子们普遍认为，该课程是在大学学习阶段最有价值的课程之一。

在教学活动中，例题的作用不可小视：通过例题的分析讲解，可以加深课程内容的理解，引导分析问题的思路，掌握基本方法的应用，巩固所学的知识，从而有助于提高分析和解决问题的能力。为此，笔者曾在 1985 年编著《信号与系统例题分析及习题》，受到读者一致好评。今天编著本书，一是与“信号与系统”课程内容的更新相适应，二是将自己的教学体会融汇其中。

本书内容涵盖了“信号与系统”课程的主要内容，可作为该课程的学习辅导与教学参考用书。书中共分 7 章，章节安排和笔者编著的教材《信号与系统》(清华大学出版社 2004 年出版)一致。第 1 章和第 2 章以并行方式讨论连续和离散时间信号与系统的信号运算、卷积、系统方程的求解和系统的基本性质。第 3 章和第 4 章分别讨论连续时间傅里叶变换和离散时间傅里叶变换。第 5 章讨论傅里叶变换在滤波、调制、抽样中的典型应用，内容以连续时间傅里叶变换为主。第 6 章讨论拉普拉斯变换，第 7 章讨论 z 变换。

本书共编写例题 122 道，其中既有概念题和证明题，也有运算题和实际应用题。例题重在分析，特别是对重点和难点的分析，这和一般的题解类书籍有所不同。

限于能力，书中难免有不妥之处，恳请读者指正。

乐正友
2008 年 6 月于清华园

目 录

第 1 章 信号及其基本运算

1.1 内容要点

- 信号的时域表示：函数式与波形
- 信号的分解
- 单位冲激信号的定义及其基本性质
- 信号运算及其相应波形的变换
- 卷积的定义、性质及计算

1.2 公式摘要

1. 离散时间单位冲激信号$\delta[n]$的基本性质

(1) 筛选性：$x[n]\delta[n-n_0]=x[n_0]\delta[n-n_0]$

(2) 组合性：$x[n]=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\delta[n-m]$

(3) 求和：$u[n]=\sum\limits_{m=-\infty}^{n}\delta[m]$，$u[n]=\sum\limits_{m=0}^{\infty}\delta[n-m]$

(4) 卷积特性：$x[n]*\delta[n-n_0]=x[n-n_0]$

2. 连续时间单位冲激信号$\delta(t)$的基本性质

(1) 筛选性：$x(t)\delta(t-t_0)=x(t_0)\delta(t-t_0)$，$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=x(t_0)$

(2) 组合性：$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

(3) 偶函数：$\delta(-t)=\delta(t)$

(4) 尺度变换：$\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$，$a$ 为常数

(5) 卷积特性：$x(t)*\delta(t-t_0)=x(t-t_0)$

(6) 积分特性：$u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)\mathrm{d}\tau, u(t)=\int_{0}^{\infty}\delta(t-\tau)\mathrm{d}\tau$

(7) 微分特性：$\delta'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\delta(t)]$

3. 信号运算

1) 离散时间信号的运算

(1) 一阶后向差分：$\nabla x[n]=x[n]-x[n-1]$

(2) 二阶后向差分：$\nabla^2 x[n]=x[n]-2x[n-1]+x[n-2]$

(3) 典型信号的差分：

$$\nabla u[n]=\delta[n]$$

$$\nabla nu[n]=u[n-1]$$

$$\nabla n^2u[n]=(2n-1)u[n-1]$$

(4) 典型信号的求和：

$$\sum_{m=-\infty}^{n}u[m]=(n+1)u[n]$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n}mu[m]=\frac{1}{2}n(n+1)u[n]$$

$$\sum_{m=-\infty}^{n}a^m u[m]=\frac{1-a^{n+1}}{1-a}u[n], \quad a\neq 1$$

2) 连续时间信号的微分运算

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[u(t)]=\delta(t)$

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)u(t)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x(t)]u(t)+x(0)\delta(t)$

4. 离散时间信号卷积的基本性质

(1) 定义：$x_1[n]*x_2[n]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1[m]x_2[n-m]=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_1[n-m]x_2[m]$

(2) 交换律：$x_1[n]*x_2[n]=x_2[n]*x_1[n]$

(3) 结合律：$\{x_1[n]*x_2[n]\}*x_3[n]=x_1[n]*\{x_2[n]*x_3[n]\}$

(4) 分配律：$x_1[n]*\{x_2[n]+x_3[n]\}=x_1[n]*x_2[n]+x_1[n]*x_3[n]$

(5) 位移特性：若 $x_1[n]*x_2[n]=s[n]$，则 $x_1[n]*x_2[n-m]=s[n-m]$

(6) 差分特性：$\nabla x_1[n]*x_2[n]=\nabla\{x_1[n]*x_2[n]\}$

(7) 求和特性：$\sum_{m=-\infty}^{n}x_1[m]*x_2[n]=\sum_{m=-\infty}^{n}\{x_1[m]*x_2[m]\}$

(8) 差分、求和特性的推论：$x_1[n]*x_2[n]=\nabla x_1[n]*\sum_{m=-\infty}^{n}x_2[m]$

5. 连续时间信号卷积的基本性质

(1) 定义：$x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(\tau)x_2(t-\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{-\infty}^{\infty}x_1(t-\tau)x_2(\tau)\mathrm{d}\tau$

(2) 交换律：$x_1(t)*x_2(t)=x_2(t)*x_1(t)$

(3) 结合律：$[x_1(t)*x_2(t)]*x_3(t)=x_1(t)*[x_2(t)*x_3(t)]$

(4) 分配律：$x_1(t)*[x_2(t)+x_3(t)]=x_1(t)*x_2(t)+x_1(t)*x_3(t)$

(5) 位移特性：若 $x_1(t)*x_2(t)=s(t)$，则 $x_1(t)*x_2(t-\tau)=s(t-\tau)$

(6) 微分特性：$\frac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}*x_2(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[x_1(t)*x_2(t)]$

(7) 积分特性：$\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)\mathrm{d}\tau*x_2(t)=\int_{-\infty}^{t}[x_1(\tau)*x_2(\tau)]\mathrm{d}\tau$

(8) 微分、积分特性的推论：$x_1(t)*x_2(t)=\int_{-\infty}^{t}x_1(\tau)\mathrm{d}\tau*\frac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}$

6. 单位冲激偶信号 $\delta'(t)$ 的基本性质

(1) $\delta'(t)$ 的面积为零：$\int_{-\infty}^{\infty}\delta'(t)\mathrm{d}t=0$

(2) 筛选性：$x(t)\delta'(t)=x(0)\delta'(t)-x'(0)\delta(t)$，$\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\delta'(t)\mathrm{d}t=-x'(0)$

(3) 奇函数：$\delta'(-t)=-\delta'(t)$

(4) 尺度变换：$\delta'(at)=\frac{1}{a\cdot|a|}\delta'(t)$，$a$ 为常数

(5) 卷积特性：$x(t)*\delta'(t)=\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$

(6) 积分特性：$\delta(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta'(\tau)\mathrm{d}\tau$

(7) 微分特性：$\delta^{(k)}(t)=\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}t^k}[\delta(t)]$

1.3 例题分析

例 1.1　连续时间信号与波形

粗略画出下列连续信号的波形(注意信号的基本特性)：

(1) $x_1(t)=u(\cos\pi t)$

(2) $x_2(t)=u(-2t+3)-u(-2t-3)$

(3) $x_3(t)=\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}t+\frac{\pi}{2}\right)+\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}t-\frac{\pi}{2}\right)$

(4) $x_4(t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\sin\pi(t-n)u(t-n)$

解 由信号函数式画出信号波形是本课程的一项基本训练，通过作图可以加强对信号特性的了解。在所画出的图形中应注意标出关键点的数值，如零点坐标值等。

(1) 由于 $\cos\pi t$ 是一周期函数，且当 $\frac{2k+1}{2}<t<\frac{2k+3}{2}$，$k=0,\pm2,\pm4,\pm6,\cdots$ 时，$\cos\pi t<0$；当 $\frac{2k+1}{2}<t<\frac{2k+3}{2}$，$k=\pm1,\pm3,\pm5,\cdots$ 时，$\cos\pi t>0$。而单位阶跃信号 $u(t)$ 是一个单边信号，它在 $t<0$ 时为 0，在 $t>0$ 时恒等于 1。故可画出 $u(\cos\pi t)$ 的波形如图 1.1(a) 所示。

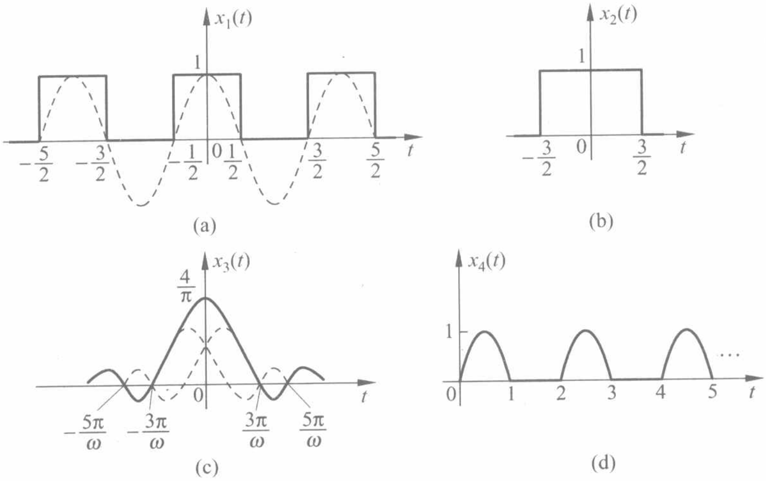

图 1.1　例 1.1 中的信号波形

请注意，虽然 $u(t)$ 是一个单边信号，但在此题中，$u(\cos\pi t)$ 并不是单边信号，而是一个周期信号。

(2) 此题是两个单位阶跃信号经反褶、平移和比例变换后相减，在作图时要注意单位阶跃信号经三种变换后所在的位置。

由于单位阶跃信号的幅度值为常数 1，其经比例变换后看不到波形的压扩效果，但比例变换对波形的位置是有影响的。具体而言，由于

$$\begin{aligned}x_2(t)&=u(-2t+3)-u(-2t-3)\\&=u\left[-2\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]-u\left[-2\left(t+\frac{3}{2}\right)\right]\\&=u\left[-\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]-u\left[-\left(t+\frac{3}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

故在作图过程中，可以先由 $u(t)$ 画出 $u(-2t)$ 的波形，然后再由 $u(-2t)$ 画出 $u(-2t+3)$ 和 $u(-2t-3)$ 的波形。需要注意的是，尽管 $u(-2t)$ 和 $u(-t)$ 的波形相同，但 $u(-2t+3)$ 和 $u(-t+3)$ 的波形在非零值的起点位置上有所不同。从画出的波形可以看到，$u(-2t+3)$ 和 $u(-2t-3)$ 的波形可分别用 $u\left[-\left(t-\frac{3}{2}\right)\right]$ 和 $u\left[-\left(t+\frac{3}{2}\right)\right]$ 来表示，而这两式相减的结果又可表示为 $u\left(t+\frac{3}{2}\right)-u\left(t-\frac{3}{2}\right)$，故所得波形如图 1.1(b)所示。

(3) 此题是抽样信号 $\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}t\right)$ 经左、右平移 $\frac{\pi}{\omega}$ 后相加。由于 $\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}t\right)$ 的第一零点位于 $\pm\frac{2\pi}{\omega}$，故相加后所得波形的第一零点的位置应在 $\pm\frac{3\pi}{\omega}$。此外，由于 $\mathrm{Sa}\left(\frac{\omega}{2}t\right)$ 在 $t=\pm\frac{\pi}{\omega}$ 时的函数值为 $\frac{2}{\pi}$，故相加后信号在 $\omega=0$ 的函数值为 $\frac{4}{\pi}$，相加后的波形如图 1.1(c)所示。

(4) 根据 $x_4(t)$ 的表达式可知，$x_4(t)$ 是 $\sin(\pi t)u(t)$ 以周期 1 重复相加的结果，由此可画出其波形如图 1.1(d)所示。

例 1.2　离散时间信号与波形

粗略画出下列离散信号的波形(注意信号的基本特性)：

(1) $x_1[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n]$

(2) $x_2[n]=(n^2+n-1)\{\delta[n+1]-2\delta[n]+\delta[n-1]\}$

(3) $x_3[n]=\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}u[m+1]u[n-m-4]$

解　(1) 此题中由于 $n>0$ 时 $u[-n]=0$，故 $x_1[n]$ 的波形只存在于 $n<0$ 的区间，如图 1.2(a)所示。

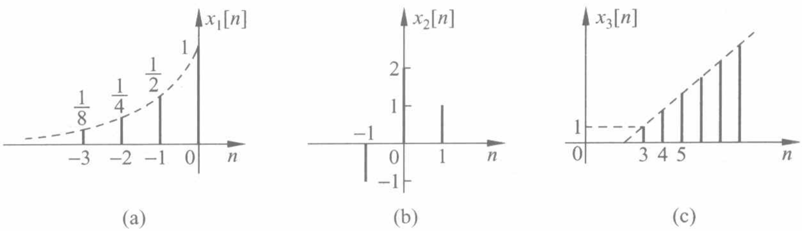

图 1.2　例 1.2 中的信号波形

(2) 根据单位冲激信号的筛选特性可求得

$$\begin{aligned}x_2[n]&=(n^2+n-1)\{\delta[n+1]-2\delta[n]+\delta[n-1]\}\\&=(n^2+n-1)\delta[n+1]-2(n^2+n-1)\delta[n]+(n^2+n-1)\delta[n-1]\\&=-\delta[n+1]+2\delta[n]+\delta[n-1]\end{aligned}$$

其波形如图 1.2(b)所示。

(3) 本例是两个单位阶跃信号的相乘求和，画图前需先进行求和运算，然后再根据运算结果画出信号波形。在运算过程中要注意两个问题：一个是确定求和的上下限；一个是对运算结果要标示出其存在的区间。由于单位阶跃信号 $u[m+1]$ 在 $m<-1$ 时为 0，故求和的下限为 $m=-1$；而对单位阶跃信号 $u[n-m-4]$ 而言，当 $m<n-4$ 时其值为 0，故求和的上限为 $m=n-4$。于是有

$$
\begin{aligned}
x_3[n] &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} u[m+1]u[n-m-4] \\
&= \sum_{m=-1}^{n-4} 1 = \sum_{m=0}^{n-3} 1 = (n-2)u[n-3]
\end{aligned}
$$

运算结果中之所以有 $u[n-3]$，是因为当求和下限 $m<-1$ 时 $x_3[n]=0$，这样，当求和上限小于求和下限 $m=-1$ 时，$x_3[n]$ 也等于零，因此，求和上限必须大于等于求和下限，即 $n-4\geqslant -1$。这表明，$x_3[n]$ 的存在区间是 $n\geqslant 3$，由此可画出 $x_3[n]$ 的波形如图 1.2(c) 所示。

实际上，本例中的 $x_3[n]$ 是信号 $u[n+1]$ 和 $u[n-4]$ 的卷积，利用卷积的图解方法，也可画出 $x_3[n]$ 的波形，其结果和图 1.2(c) 相同。

例 1.3　信号的积分运算

若 $x(t)=u(t)-u(t-2)$，分别画出 $\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$ 和 $\int_0^{t/2} x(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的波形，注意它们之间的差别。

解　本例主要用来检查对函数式 $\int_0^{t/2} x(\tau)\mathrm{d}\tau$ 的理解，了解其含义后也就不难画出信号波形了。显然，$\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是对图 1.3(a) 中的信号 $x(t)$ 积分，其波形如图 1.3(b) 所示，而 $\int_0^{t/2} x(\tau)\mathrm{d}\tau$ 是对 $\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$ 进行比例变换，变换系数为 1/2，故其波形是 $\int_0^t x(\tau)\mathrm{d}\tau$ 扩展两倍的结果，如图 1.3(c) 所示。

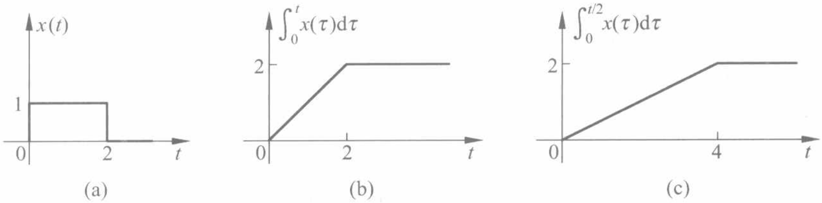

图 1.3　例 1.3 中的信号波形

例 1.4　单位冲激信号的筛选特性

求下列各式的函数值：

(1) $x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t_0-t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t$

(2) $x(t)=\int_{0}^{\infty} x(t)[\delta(t+2)+\delta(t-2)]\mathrm{d}t$

(3) $x(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t+1}\delta(t)]$

解　在“信号与系统”课程中，单位冲激函数是一类很重要的函数并得到了广泛的应用。熟练掌握单位冲激函数的抽样特性和组合特性将有助于解决某些问题。本例将说明在应用单位冲激函数抽样特性时应注意的事项。

单位冲激函数的抽样特性通常用两个公式来说明，其一是

$$\begin{cases} x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t) \\ x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) \end{cases} \tag{1.1}$$

其二是

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t)\mathrm{d}t = x(0) \\ \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t = x(t_0) \end{cases} \tag{1.2}$$

式(1.1)是抽样特性的基本定义，它表明，任一连续信号和单位冲激信号相乘的结果仍然是一个冲激信号，其位置不变，强度是连续信号在抽样点的函数值。从应用角度看，式(1.2)是根据单位冲激信号的定义$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1$，由式(1.1)而来的必然结果。因此，在遇到单位冲激信号抽样性问题时，首先利用式(1.1)得到一个结果，然后再进行其他运算，这往往会简化运算过程。下面例题的求解过程也将说明这一点。

(1) $x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t_0-t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty} x(0)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=x(0)$

(2)
$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{0}^{\infty} x(t)[\delta(t+2)+\delta(t-2)]\mathrm{d}t \\ &= \int_{0}^{\infty} [x(-2)\delta(t+2)+x(2)\delta(t-2)]\mathrm{d}t \\ &= x(2) \end{aligned}$$

注意，由于冲激信号 $x(-2)\delta(t+2)$不在积分区间内，故其积分值为 0。

(3) $x(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t+1}\delta(t)]=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}\delta(t)]=\mathrm{e}\delta'(t)$

此题如果是先进行微分运算，则有

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t+1}\delta(t)] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\mathrm{e}^{-t+1}]\delta(t)+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\delta(t)]\mathrm{e}^{-t+1} \\ &= -\mathrm{e}^{-t+1}\delta(t)+\delta'(t)\mathrm{e}^{-t+1} \\ &= -\mathrm{e}\delta(t)+[\mathrm{e}\delta'(t)+\mathrm{e}^{-t+1}\delta(t)] \\ &= \mathrm{e}\delta'(t) \end{aligned}$$

显然，这里的求解过程较为繁琐，而且还要利用冲激偶函数 $\delta'(t)$的性质

$$x(t)\delta'(t) = x(0)\delta'(t) - x'(0)\delta(t) \tag{1.3}$$

此外，这条性质也容易被错记为 $x(t)\delta'(t)=x(0)\delta'(t)$ 而导致错误的结果，因此，在遇到一个函数和冲激函数相乘的问题时，先进行相乘运算后再进行其他运算往往是方便的。

例 1.5　信号的平移

已知信号 $x(5-2t)$ 的波形如图 1.4 所示，试画出信号 $x(t)$ 的波形。

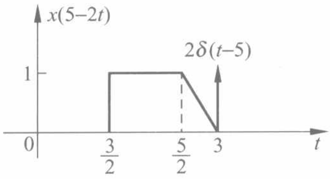

图 1.4　例 1.5 中的信号波形

解　本例介绍通过信号自变量的变换画信号波形的基本方法。

显然，$x(5-2t)$ 是 $x(t)$ 经反褶、平移、尺度变换后的结果，因此，要从 $x(5-2t)$ 的波形画出 $x(t)$ 的波形也必须经过这三种变换。这三种变换的先后次序可以任意排列，这样就可以有 6 种不同的次序画出 $x(t)$ 的波形，下面介绍其中两种。

方法一：平移→反褶→尺度变换。

首先，将信号 $x(5-2t)$ 经过平移得到 $x(-2t)$。由于 $5-2\left(t+\frac{5}{2}\right)=-2t$，因此，以 $t+\frac{5}{2}$ 代替 $x(5-2t)$ 中的独立变量 t 就可求得 $x(-2t)$。这意味着将 $x(5-2t)$ 的波形左移 $\frac{5}{2}$ 就得到了 $x(-2t)$ 的波形，如图 1.5(a) 所示。

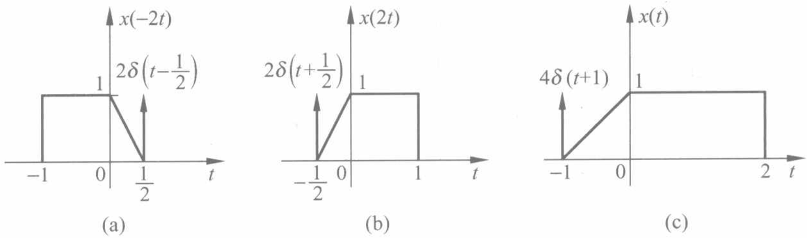

图 1.5　例 1.5 中信号 $x(t)$ 的求解过程（方法一）

然后对 $x(-2t)$ 进行反褶，即以 $-t$ 代替 $x(-2t)$ 中的独立变量 t，从而求得 $x(2t)$ 的波形，如图 1.5(b) 所示。注意，反褶是将 $x(-2t)$ 的波形以过原点的纵轴为中心翻转。此外，由于 $\delta(t)$ 是偶函数，故有 $2\delta\left(-t-\frac{1}{2}\right)=2\delta\left(t+\frac{1}{2}\right)$。

最后进行尺度变换，即以 $\frac{1}{2}t$ 代替 $x(2t)$ 中的独立变量 t，从而求得信号 $x(t)$ 的波形，如图 1.5(c) 所示。注意，$x(t)$ 的波形是 $x(2t)$ 的波形在时间轴上扩展两倍。此外，由于冲激函数 $\delta(t)$ 的尺度变换性质而有

$$2\delta\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)=2\delta\left[\frac{1}{2}(t+1)\right]=4\delta(t+1)$$