

XINKEBIAO SHUXUE TIGAOBAN



七年级

新课标 数学提高班

丁保荣 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS

浙江大学出版社

新课标数学

提 高 班

七年级

主 编	丁保荣		
副主编	吴灿中	王鸿湘	
编 委	刘智建	陈晓岚	罗大明
	方利生	朱秀云	刘旭萍

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

新课标数学提高班. 七年级 / 丁保荣主编. —杭州: 浙江大学出版社, 2006. 4 (2008 重印)
ISBN 978-7-308-04700-5

I. 新... II. 丁... III. 数学课—初中—教学参考资料
IV. G634. 603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 014277 号

新课标数学提高班·七年级

丁保荣 主编

责任编辑 王大根

出版发行 浙江大学出版社

(杭州市天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(E-mail: zupress@mail.hz.zj.cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>

<http://www.press.zju.edu.cn>)

电话: 0571-88925592, 88273066 (传真)

排 版 浙江大学出版社电脑排版中心

印 刷 杭州杭新印务有限公司

开 本 787mm×960mm 1/16

印 张 15.75

字 数 309 千

印 数 47001—52000

版 印 次 2006 年 4 月第 1 版 2008 年 6 月第 11 次印刷

书 号 ISBN 978-7-308-04700-5

定 价 19.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话 (0571)88925591

前 言

中考是每位中学生求学路上的第一道重要关卡。如果能很好地闯过这一关,后面的求学之路会变得非常平畅。

新课程标准的全面实施,新课标下的中考试题出现了很大变化。“能力综合”型、“开放探索”型试题在中考试卷中占有越来越大的分值。对于在旧的学习模式下成长起来的中学生来说,这一变化恰恰是一道难关。分析 2005 年各地中考试卷可以看出,考查综合能力的“选拔型”试题,由知识立意,转向能力立意,在知识交汇点上命题,强调应用、创新意识的培养,用常规的课堂教学思维去解答,已明显力不从心。研究一下“数奥”试题,我们可以发现,这类题旨在考查学生对知识的理解深度和思维的综合创新能力。这一点恰恰是新课标素质教育中知识教学的核心内容,也是中考试题改革的精神实质。

对比中考和竞赛大纲,观察历年来数奥试题和近年来中考试卷的难题,不难看出,许多中考压轴题都能在“数奥”试题中看到“影子”,甚至某些题就是上一届数学奥林匹克题的翻版。因此我们学习和研究“数奥”试题不光是为了夺取“金牌”,更重要的是可以让我们站在一个更高的角度俯视课堂学习和中考,在学习和中考中脱颖而出。

基于以上原因,我们编写了这套丛书,将“数奥”和中考有机结合起来,借“他山之石”攻“此山之玉”,希望能为同学们找到一条通向成功的有效捷径。

本套丛书内容的难度定位略高于中考水平,相当于“数奥”中等难度,以新课标、新中考说明中的重、难点和被竞赛大纲加深、拓展的知识点为知识基础,结合各类典型竞赛例题,剖析知识的内涵,发掘思维的本质,介绍解决难题的开放性思维方法,培养和训练开放型的创新思维能力,对接考的经典“拔高”题,用“数奥”解题思维巧解中考难题,与教材同步训练,及时巩固,引导创新。丛书通过丰富的栏目实践以上目标:【课程标准】【赛点导入】公布了各章相关的新课标要求及竞赛大纲相应赛点,为你导航;【例题分析】给出范例的探索性分析,为你引路,并留下思索解答空间;【同步训练】与课本教材同步,引领你提前投入中考、数奥练兵。

本丛书知识讲解系统、题型全面,可作为新课标学习的同步提高,中考复习和竞赛辅导教材使用。

丁保荣

2006 年 5 月

目 录

上 册

第一章 从自然数到有理数	(1)参考答案(168)
第二章 有理数的运算	(9)参考答案(171)
第三章 实 数	(21)参考答案(175)
第四章 代数式	(27)参考答案(177)
第五章 一元一次方程	(36)参考答案(179)
第六章 数据与图表	(44)参考答案(184)
第七章 图形的初步认识	(62)参考答案(190)
第八章 课题学习(一)	(75)参考答案(195)

下 册

第九章 三角形的初步认识	(83)参考答案(200)
第十章 图形和变换	(98)参考答案(207)
第十一章 事件的可能性	(113)参考答案(212)
第十二章 二元一次方程组	(120)参考答案(215)
第十三章 整式的乘除	(130)参考答案(222)
第十四章 因式分解	(139)参考答案(227)
第十五章 分 式	(143)参考答案(229)
第十六章 课题学习(二)	(151)参考答案(235)
第十七章 期末测试竞赛模拟	(155)参考答案(239)



上册



第一章 从自然数到有理数

【课程标准】

1. 理解有理数的意义,能用数轴上的点表示有理数,会比较有理数的大小.
2. 借助数轴理解相反数和绝对值的意义,会求有理数的相反数与绝对值(绝对值符号内不含字母).

【赛点导入】

1. 数轴是重要的数学工具:它是数形结合的工具;它能直观地反映有理数的一些概念,如相反数等;它说明了有理数大小比较法则.

2. 绝对值的意义:在数轴上,表示一个数的点到原点的距离.所以任何数或式的绝对值都是非负数,即 $|a| \geq 0$.

【例题分析】

【例1】(杭州市中考题)现有4个有理数3,4,-6,10,将这4个数(每个数用且只用一次)进行加、减、乘、除四则运算,使其结果等于24.其三种本质不同的运算式有:(1) _____; (2) _____; (3) _____.

【分析】从24最简单的不同表达式入手,逆推,拼凑.

【例2】(2003年南通市中考题)计算: $-9 + 5 \times (-6) - (-4)^2 \div (-8)$

【分析】本题中含有加、减、乘、除、乘方运算,计算此类型题目,应注意运算顺序,先算乘方,再算乘、除,最后算加、减.

解有理数的混合运算题目,一定要注意运算顺序.

【例3】(2004年吉林省中考题)某种树木的分枝生长规律如图1-1和下表所示,则预计到第6年时,树木的分枝数为_____.



图 1-1



年 份	分枝数
第 1 年	1
第 2 年	1
第 3 年	2
第 4 年	3
第 5 年	5

【分析】 仔细观察表格可知：

年 份	分枝数
第 1 年	1
第 2 年	$1+0$
第 3 年	$1+1$
第 4 年	$2+1$
第 5 年	$3+2$
第 6 年	$5+3$

本题也可以从图形出发,利用数形结合的思想方法使问题获解.

【例 4】 (2002 年南京市中考题)(1)阅读下面材料：

点 A, B 在数轴上分别表示实数 a, b, A, B 两点之间的距离表示为 $|AB|$.

当 A, B 两点中有一点在原点时,不妨设点 A 在原点,如图 1-2(1), $|AB| = |OB| = |b| = |a-b|$;

当 A, B 两点都不在原点时,

①如图 1-2(2),点 A, B 都在原点的右边,

$$|AB| = |OB| - |OA| = |b| - |a| = b - a = |a - b|;$$

②如图 1-2(3),点 A, B 都在原点的左边,

$$|AB| = |OB| - |OA| = |b| - |a| = -b - (-a) = |a - b|;$$

③如图 1-2(4),点 A, B 在原点的两边,

$$|AB| = |OA| + |OB| = |a| + |b| = a + (-b) = |a - b|.$$

综上,数轴上 A, B 两点之间的距离 $|AB| = |a - b|$.

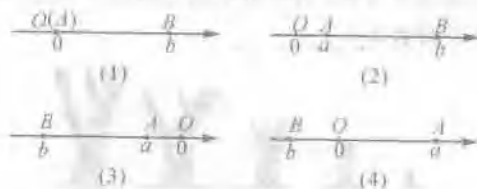


图 1-2





(2) 回答下列问题:

① 数轴上表示 2 和 5 的两点之间的距离是_____, 数轴上表示 -2 和 -5 的两点之间的距离是_____, 数轴上表示 1 和 -3 的两点之间的距离是_____;

② 数轴上表示 x 和 -1 的两点 A 和 B 之间的距离是_____, 如果 $|AB| = 2$, 那么 x 为_____;

③ 当代数式 $|x+1| + |x-2|$ 取最小值时, 相应的 x 的取值范围是_____.

【分析】 本题是一直较好的阅读理解题. 它给的阅读材料是将式 A, B 两点在数轴上(相对于原点 O 而言)的不同位置之间的距离分别用图形和代数式表示出来. 让学生通过观察图形理解代数式 $|a-b|$ 所表示的意义, 来回答所提出的具体问题.

【例 5】 (2001 年新加坡数学竞赛题) 如果 4 个不同的正整数 m, n, p, q 满足 $(7-m)(7-n)(7-p)(7-q) = 4$, 那么 $m+n+p+q$ 等于_____.

A. 10

B. 21

C. 24

D. 26

E. 28

【分析】 解题的关键是把 4 表示成 4 个不同整数的积的形式.

【例 6】 (华东度金杯赛邀请赛题) 将图 1-3 中的圆圈任意涂上红色或蓝色, 问: 有无可能使得在同一条直线上的红圈数都是奇数? 请说明理由.

【分析】 先假设能够使同一条直线上的红圈数都是奇数, 运用奇偶分析推理.

【例 7】 (上海市竞赛题) 某环形道路上顺次排列有四所中学: A_1, A_2, A_3, A_4 , 它们顺次有彩电 15 台, 8 台, 5 台和 12 台, 为使各校的彩电数相同, 允许一些中学向相邻中学调出彩电, 问怎样调配才能使调出的彩电总台数最少? 并求出调出彩电的最少总台数.

【分析】 通过设未知数, 把调动的彩电总台数用相关代数式表示. 解题关键是如何将实际问题转化为类似例 4 的问题加以解决.

【例 8】 (第 11 届祖冲之杯数学竞赛题) 假设地球上新生成资源的增长速度是一定的, 照此测算, 地球上资源可供 110 亿人生活 90 年, 或可供 90 亿人生活 210 年. 为使人类能够不断繁衍, 那么地球最多能养活多少亿人?

【分析】 由“地球上资源可供 110 亿人生活 90 年”知 110 亿人 90 年所消耗的资源量等于地球现有的资源和 90 年中新生成的资源的总和; 同样可知, 90 亿人 210 年消耗的资源量等于地球现有资源与 210 年中新生成的资源的总和, 两相比较即可求出地球每年新生成的资源量等于多少亿人 1 年消耗的资源量. 为了使人类能够不断繁衍, 每年消耗的资源量不应超过地球每年新生成的资源量, 所以由地球每年新生成的资源量等于多少亿人 1 年消耗的资源量, 就可知地球最多能养活多少亿人.

【例 9】 (天津市竞赛题) 试求 $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-1997|$ 的最小值.



图 1-3



【分析】由于 x 的任意性、无限性,因此通过逐个求出代数式的值解题显然是困难的,不妨从绝对值的几何意义,利用数轴入手.

【例 10】(天津市竞赛题)有 200 个数 $1, 2, 3, \dots, 199, 200$, 任意分为两组(每组 100 个), 将一组按由小到大的顺序排列, 设 $a_1 < a_2 < \dots < a_{100}$, 另一组由大到小顺序排列, 设 $b_1 > b_2 > \dots > b_{100}$, 试求代数式 $|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \dots + |a_{99} - b_{99}| + |a_{100} - b_{100}|$ 的值.

【分析】解本例要先去掉绝对值符号, 对于任意一项 $|a_k - b_k|$, ($k=1, 2, \dots, 100$) 中的一组 a_k, b_k , 较大的数一定大于 100, 较小的数一定不大于 100, 否则,

(1) 若 $a_k \leq 100, b_k \leq 100$, 则由 $a_1 < a_2 < \dots < a_k \leq 100$ 及 $100 \geq b_1 > b_{k+1} > \dots > b_{100}$, 知 $a_1, a_2, \dots, a_k, b_k, b_{k+1}, \dots, b_{100}$ 共 101 个数都不大于 100, 这是不可能的.

(2) 若 $a_k > 100, b_k > 100$, 则由 $a_{100} > a_{99} > \dots > a_{k+1} > a_k > 100$ 及 $b_1 > b_2 > \dots > b_k > 100$, 知 $b_1, b_2, \dots, b_k, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{100}$ 共有 101 个数都大于 100, 这也是不可能的.

有了以上结论, 200 个数分成绝对值较大的数 100 个, 绝对值较小的数 100 个, 可同时去掉代数式中所有绝对值符号.

【例 11】(IMO 日本代表团选拔赛题) N 是 1990 位数, 并且是 9 的倍数, N 的各位数字之和为 N_1 , N_1 的各位数字之和为 N_2 , N_2 的各位数字之和为 N_3 , 求 N_3 .

【分析】一个数是 9 的倍数, 说明这个数的数字和也是 9 的倍数, 故 N_1, N_2, N_3 及其数字和均为 9 的倍数.

同步训练

【中考训练】

1. (2004 年徐州市中考题) 我市冬季某一天的最高气温为 -1°C , 最低气温为 -6°C , 那么这一天的最高气温比最低气温高 $\underline{\hspace{2cm}}$ $^\circ\text{C}$.

2. (2004 年兰州市中考题) 某学校在筹备建校 80 周年校庆时, 计划用彩色灯泡装饰教学大楼, 假若将彩色灯泡按照 2 个红色, 3 个黄色, 1 个绿色的顺序串起来的话, 那么, 按此规律判断, 第 100 个灯泡的颜色应是 $\underline{\hspace{2cm}}$.

3. (2004 年绍兴市中考题) 用计数器探索: 按一定规律排列的一组数: $\frac{1}{10}, \frac{1}{11}, \frac{1}{12}, \dots, \frac{1}{19}, \frac{1}{20}$, 如果从中选出若干个数, 使它们的和大于 0.5, 那么至少要选 $\underline{\hspace{2cm}}$ 个数.

4. (2004 年台州市、温州市中考题) 观察下面一列数, 按某种规律在横线上填入适当的数, 并说明你的理由. $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \underline{\hspace{2cm}}, \frac{6}{7}, \dots$

你的理由是 $\underline{\hspace{2cm}}$.



图 1-4

5. (2004 年宜昌市中考题) 如图 1-4, 用同样规格的黑白两种正方形瓷砖铺设正方形地面, 观察图形并





猜想填空:当黑色瓷砖为 20 块时,白色瓷砖为_____块;当白色瓷砖为 n^2 (n 为正整数)块时,黑色瓷砖为_____块.

6. (2005 年福州市中考题)瑞士中学教师巴尔末成功地从光谱数据 $\frac{9}{5}, \frac{16}{12}, \frac{25}{21}, \frac{36}{32}, \dots$ 中得到巴尔末公式,从而打开了光谱奥妙的大门.请你按这种规律写出第七个数据是_____.

7. (2005 年北京海淀中考题)用“ λ ”、“ $\bowtie$ ”定义新运算:对于任意实数 a, b , 都有 $a \lambda b = a$ 和 $a \bowtie b = b$, 例如, $3 \lambda 2 = 3, 3 \bowtie 2 = 2$, 则 $(2006 \bowtie 2005) \lambda (2004 \bowtie 2003) =$ _____.

8. (2005 年山西省中考题)木材加工厂堆放木料的方式如图 1-5 所示:



图 1-5

依此规律可得出第六堆木料的根数是_____.

9. (2005 年武汉市中考题)在计算机程序中,二叉树是一种表示数据结构的方法,如图 1-6 所示.一层二叉树的结点总数为 1;二层二叉树的结点总数为 3;三层二叉树的结点总数为 7;四层二叉树的结点总数为 15;……照此规律,七层二叉树的结点总数为_____.



图 1-6

10. (2005 年台州市中考题)小舒家的水表如图 1-7 所示,该水表的读数为_____ m^3 . (精确到 0.1)

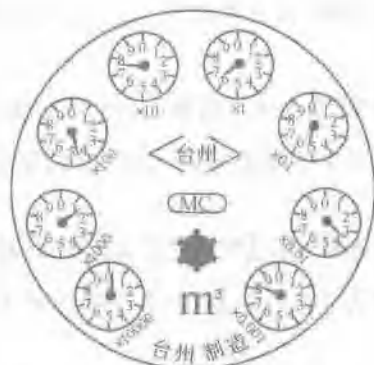


图 1-7

11. (2005 年河南省中考题) 观察下表, 填表后再解答问题.

(1) 完成下列表格:

序号	1	2	3	...
图形				...
◎的个数	8		24	...
☆的个数	1	4		...

(2) 试问: 第几个图形中“◎”的个数和“☆”的个数相等?

【竞赛训练】

12. (2003 年河南省竞赛题) 如图 1-8 所示, 在高速公路上, 从 3 千米处开始, 每隔 4 千米设一个速度限制标志, 而且从 10 千米处开始, 每隔 9 千米设一个测速照相标志, 则刚好在 19 千米处同时设置这两种标志, 问下一个同时设置这两种标志的地点的公里数是



图 1-8

- A. 32 公里 B. 37 公里 C. 55 公里 D. 90 公里

13. (第 13 届希望杯邀请赛试题) 如图 1-9 所示, 点 A, B 对应的数分别是 a, b, 点 A





在-3,-2对应的两点(包括这两点)之间移动,点B在-1,0对应的两点(包括这两点)之间移动,则以下四式的值可能比2008大的是 ()

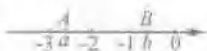


图 1-9

A. $b-a$

B. $\frac{1}{b-a}$

C. $\frac{1}{a} - \frac{1}{b}$

D. $(a-b)^2$

14. (第15届五羊杯初中数学竞赛题)老师报出一个五位数,学生们将它的顺序倒排后得到的五位数,减去原数.学生甲、乙、丙、丁的结果分别是34567,34056,23456,34956,老师判定4个结果中有1个正确.答对的是 ()

A. 甲

B. 乙

C. 丙

D. 丁

15. (2003年全国初中数学竞赛题)在本埠投寄平信,每封信质量不超过20克时付邮费0.80元,超过20克而不超过40克时付邮费1.60元,以此类推,每增加20克需增加邮费0.80元(信的质量在100克以内).如果某人所寄一封信的质量为72.5克,那么他应付邮费 ()

A. 2.4元

B. 2.8元

C. 3元

D. 3.2元

16. (2001年台湾省小学数学决赛题)如图1-10所示,阴影部分之面积为_____平方厘米.

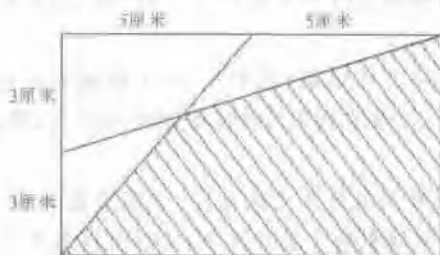


图 1-10

17. (2001年台湾省小学数学决赛题)大儒和小平各煮一碗汤需时9分钟.半分钟后,大儒加5克胡椒,之后每半分钟所加分量都比上次增多5克,当汤煮沸时,最后那一次所加的胡椒分量已达到90克.小平也加胡椒,但只是每分钟加一次,每次所加的分量都比上一次多,增幅等于第一次所加的分量.如最后两碗汤内胡椒的总量相等,那么小平第一次加了_____克胡椒.

18. (2005年黑龙江省初中数学竞赛题)图1-11为2005年3月的日历.图1-12是用一长方形的方框在日历中框出9天的日期,若从左下角到右上角“对角线上”三个数的和为69,则这9天中,最后一天是_____号.



日	一	二	三	四	五	六
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

图 1-11

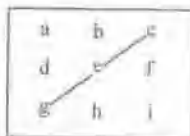


图 1-12

19. (2005 年全国初中数学联赛题) 不超过 100 的自然数中, 将凡是 3 或 5 的倍数的数相加, 其和为_____。

20. (2001 年香港特区小学数学精英赛题) 求 $5\frac{5}{6}, 7\frac{7}{12}, 3\frac{1}{9}$ 的最大公约数。

21. (2001 年香港特区小学数学精英赛题) 学校图书馆科技书与教科书的比是 26 : 5, 文艺书与故事书的比是 25 : 9, 教科书与故事书的比是 10 : 3. 问: 科技书与文艺书的比是多少?

22. (首届汉城国际小学数学竞赛题) 有 A, B, C 3 人, 从 P 地点到 Q 地点的距离为 3 千米, 每个人以每小时 3 千米的速度步行. 在 P 地点有两辆自行车. 如果使用自行车, 速度可达每小时 15 千米. 但每辆自行车只能一个人骑. 问: 怎样才能使 3 个人各自在最短的时间内到达 Q 地点?

23. (美国小学数学奥林匹克试题) 当甲在 60 米赛跑中冲过终点线时, 比乙领先 10 米, 比丙领先 20 米. 如果乙和丙按原来的速度继续冲向终点, 那么, 当乙到终点时将比丙领先多少米?

24. (1991 年列宁格勒数学奥林匹克试题) 一个矩形被分成 A, B, C, D 四个矩形(图 1-13), 已知 A 的面积是 2 平方厘米, B 的面积是 4 平方厘米, C 的面积是 6 平方厘米, 试问原矩形的面积是多少?

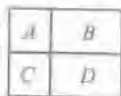


图 1-13

25. (第 7 届莫斯科数学奥林匹克试题) 试在 523... 后面续上三个数字, 使得所得的六位数可被 7, 8, 9 整除。





第二章 有理数的运算

【课程标准】

1. 理解乘方的意义,掌握有理数的加、减、乘、除、乘方及简单的混合运算(以三步为主),

理解有理数的运算律,并能运用运算律简化运算.

2. 能运用有理数的运算解决简单的问题.

能对含有较大数字的信息作出合理的解释和推断.

3. 了解近似数与有效数字的概念;在解决实际问题中,能用计算器进行近似计算,并按问题的要求对结果取近似值.

【赛点导入】

在学好有理数有关基础知识的前提下,计算的常用方法与技巧有:

(1)凑整法.将一些数凑成整一、整十等数.

(2)公式法.将一些数的运算利用乘法公式等.

(3)换元法.将一些数记作某个字母,如 $a, b, \dots$ 以达到化繁为简的目的.

(4)裂项法.将一些分数裂为两个分数的差.

(5)改变运算顺序.根据数之间的关系,运用运算律,改变运算顺序,使某些计算简便.

【例题分析】

【例1】(2004年山东省中考题)实数 a, b, c 在数轴上的位置如图2-1所示,则下列式子成立的是 ()



图 2-1

A. $ab > bc$

B. $ac > bc$

C. $ac > ab$

D. $ab > ac$

【分析】数轴上的右边点所表示的数大于左边点所表示的数,不等式两边同乘(除)一个正数,不等号的方向不改变,不等式两边同乘(除)一个负数,不等号的方向改变.

由数轴看出 $a > 0, b < 0, c < 0$,且 $a > b > c$,由不等式性质, $ab > ac$.

【例2】我国的国土面积约为9596960平方千米,把我国国土面积用四舍五入法保留两个有效数字,并用科学记数法表示为 ()

A. 9.6×10^5 平方千米

B. 9.60×10^6 平方千米



C. 9.6×10^8 平方千米

D. 9.6×10^7 平方千米

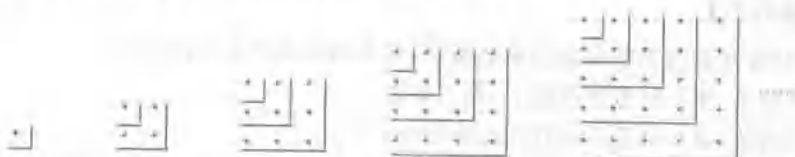
【分析】 把近似数 9596960 用四舍五入法保留两个有效数字, 可以先用科学记数法表示为 9.596960×10^6 , 再用四舍五入法保留两个有效数字为 3.6×10^7 , 有效数字为 9, 6. 对较大数字求近似数或有效数字时, 经常要借助科学记数法, 不要出现保留两个有效数字为 9600000 的错误.

【例 3】 (2004 年武汉市中考题) 阳阳和明明做上楼梯游戏, 规定一步只能上一级或二级台阶, 玩着玩着两人发现, 当楼梯的台阶为一级、二级、三级、……逐步增加时, 楼梯的上法数依次为: 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … (这就是著名的斐波那契数列). 请你仔细观察这列数中的规律后回答: 上 10 级台阶共有 _____ 种上法.

【分析】 观察数列 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, … 得出规律: $1+2=3$, $2+3=5$, $3+5=8$, $5+8=13$, $8+13=21$, …

【例 4】 (2004 年河北省中考题) 观察下面的点阵图和相应的等式, 探究其中的规律.

(1) 在④和⑤后面的横线上分别写出相应的等式;



① $1=1^2$

② $1+3=2^2$

③ $1+3+5=3^2$

④ _____

⑤ _____

(2) 通过猜想写出与第 n 个点阵相对应的等式.

【分析】 从点的分布可以看出, 每次增加奇数个, 而且连续奇数的和等于连续自然数的平方, 结合图形, 发现数字之间的运算规律, 在中考中经常考到.

【例 5】 如图 2-2, 表示数 a 和 b 的点的位置已经给定, 请提出三个以上与该图有关的数学问题, 并给出解答.



图 2-2

【分析】 该题就是要求把该图给出的数学信息组合起来, 提出数学问题. 所以, 首先我们要通过观察图形, 尽可能多地掌握信息, 通过观察图我们可以发现 $a > 0$, $b < 0$, $|a| < |b|$, 所以我们可以提出以下问题.

如图, 表示数 a 和 b 的点已由图给定:

(1) 判断 $a \times b$ 的正负;

(2) 判断 $a+b$ 的正负;

(3) 判断 $a-b$ 的正负;

(4) 判断 $b-a$ 的正负;

……

注意 (1) 要注意发现数学信息, 这是我们解决数学问题的基础; (2) 提出的问题是通过我们所发现的信息和我们学过的知识能解决的.

【例 6】 计算:

(1) $1 - (-2)^3 - 3^2 \div (-1)^2$; (2) $-4 - 3 \times 2^2 \times \left(\frac{1}{3} - 1\right) \div \left(-1 - \frac{1}{3}\right)$.





【分析】 (1) 这里没有用括号规定运算顺序, 所以我们应先算乘方, 再算除法, 最后算减法.

(2) 用括号规定了运算顺序, 所以应先算括号内的, 再按顺序进行, 另外也可以利用乘法对加法的分配律去掉括号, 然后再按顺序进行.

注意 在进行有理数的混合运算时, 一要注意运算顺序的正确; 二要注意符号的变化; 三要注意在运用运算性质时不要出现错误.

【例 7】 如图 2-3, 由给出的 a, b 两个数我们可以得出如下结论: $a + b > 0, a \times b < 0$. 试通过改变表示数 a 或数 b 的点的其中一点的位置, 使上面的两个结论同时发生改变.

图 2-3

【分析】 要使结论发生改变, 我们就应考虑到可能得到的结论; 由题可知结论有以下可能: $a + b = 0, a + b < 0$ 和 $a \times b = 0, a \times b > 0$, 而从前两个结论和后两个结论中各拿出一个进行组合我们就得到可能得到的结论:

- (1) $a + b = 0, a \times b = 0$. (2) $a + b = 0, a \times b > 0$.
(3) $a + b < 0, a \times b = 0$. (4) $a + b < 0, a \times b > 0$.

下面我们就试着调整 a 或 b 的位置, 看是否可以得到上面的结论.

(1) 调整 a 和 b 一点的位置要使 $a + b = 0$, 这时只能有 $a = -b$, 且 a 和 b 都不为 0, 所以 $a \times b \neq 0$, 这就是说结论 (1) 不可能由调整 a 和 b 其中一点的位置得到.

(2) 同理, 当 $a + b = 0$ 时, $a \times b > 0$, 不成立.

(3), (4) 我们容易发现是不能通过调整 b 的位置得到的, 因为要使 $a + b < 0$, 且 $a > 0$, 这时必须有 $b < 0$, 这时就得不到 $a \times b = 0$ 和 $a \times b > 0$, 所以我们只有考虑调整 a 的位置.

因为 $a \times b = 0$, 又 $b < 0$, 所以 $a = 0$, 而这时 $a + b < 0$, 这就是说当我们把 a 的位置调整到原点时, 就得到结论 (3).

因为 $a \times b > 0, b < 0$, 所以 $a < 0$, 且这时 $a + b < 0$, 这就是说当我们把 a 的位置移动到原点的左侧时我们就可以得到结论 (4).

【例 8】 计算: $(-5) \times \left[\left(-\frac{1}{85} - 1\frac{8}{17} - \frac{1}{5} \right) \times 17 - \left(-\frac{4}{5} \right)^2 \right]$.

【分析】 试题有双重括号看起来比较复杂, 但只要按运算顺序去做都可以求出结果, 在计算时我们还应考虑灵活用运算性质来简化计算.

注意 有理数混合运算的步骤, 初学者应写得详细一些, 这是避免出现错误的好办法.

【例 9】 计算: $\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2002} \right) \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2001} \right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2002} \right) \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2001} \right)$.

【分析】 直接计算复杂而繁难, 注意括号内数式的联系, 引入字母, 将复杂的数值计算转化为简单的式的计算.



【例 10】(2003 年全国初中数学竞赛题)某商品 2000 年比 1999 年涨价 5%, 2001 年比 2000 年涨价 10%, 2002 年比 2001 年降价 12%, 则 2002 年比 1999 年 ()

- A. 涨价 3% B. 涨价 1.64% C. 涨价 1.2% D. 降价 1.2%

【分析】设此商品 1999 年的价格为 a 元, 把相应年份的价格用 a 的代数式表示, 计算作出判断.

【例 11】(北京市迎春杯竞赛题)计算: $\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{1996}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1997}\right) - \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \cdots - \frac{1}{1997}\right) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{1996}\right) =$ _____.

【分析】观察被减数与减数中因数的联系, 以字母代数, 将复杂的数值计算转化为简单的式的计算.

【例 12】(第 17 届江苏省竞赛题)(1)数轴上有 A, B 两点, 如果点 A 对应的数是 -2 , 且 A, B 两点的距离为 3, 那么点 B 对应的数是 _____.

(2)(第 15 届江苏省竞赛题)在数轴上, 点 A, B 分别表示 $-\frac{1}{3}$ 和 $\frac{1}{5}$, 则线段 AB 的中点所表示的数是 _____.

【分析】(1)确定 B 点的位置; (2)在数轴上选择两个特殊点, 探索它们的中点所表示的数与所选两点所表示的数的联系.

【例 13】(第 18 届江苏省竞赛题)化简: $99 \cdots 9 \times 99 \cdots 9 + 1 \quad 99 \cdots 9$

【分析】先考察 $n=1, 2, 3$ 时的简单情形, 然后作出猜想, 这样, 化简的目标更加明确.

【例 14】(五羊杯竞赛题)已知 $|a-2|$ 与 $|b-1|$ 互为相反数, 试求代数式 $\frac{1}{ab} + \frac{1}{(a+1)(b+1)} + \frac{1}{(a+2)(b+2)} + \cdots + \frac{1}{(a+2002)(b+2002)}$ 的值.

【分析】运用相反数、绝对值、非负数的概念与性质, 先求出 a, b 的值.

【例 15】(第 17 届江苏省竞赛题)有一张纸, 第 1 次把它分割成 4 片, 第 2 次把其中的 1 片分割成 4 片, 以后每一次都把前面所得的其中一片分割成 4 片, 如此进行下去, 试问:

- (1)经 5 次分割后, 共得到多少张纸片?
- (2)经 n 次分割后, 共得到多少张纸片?
- (3)能否经若干次分割后共得到 2003 张纸片? 为什么?

【分析】从简单情形入手, 发现纸片数的特点是解本例的关键.

【例 16】(希望杯邀请赛题)设三个互不相等的有理数, 既可表示为 $1, a+b, a$ 的形式, 又可表示为 $0, \frac{b}{a}, b$ 的形式, 求 $a^{1999} + b^{1999}$ 的值.

