运 筹 学 讲 义

（采运专业用）

郑登旋

东北林学院采运系

一九八五年四月

序　　言

运筹学是近四十年来发展起来的一门新兴学科。在第二次世界大战期间，为研究如何更有效地使用新式武器的迫切任务提出了运筹学的问题。战后，英、美等国的运筹学都逐渐地应用于工农业生产。

５０年代初，英、美分别出版了运筹学的专门期刊，并成立了运筹学学会。１９５７年成立了国际运筹学协会。

我国大规模开展运筹学的应用和研究，起始于５８年。到七十年代，运筹学已得到了迅速普遍地推广。尤其在现代化生产管理中得到了极为广泛的应用。

运筹学是一门应用数学，在处理问题时，有两个重要特点：一是从全局出发；二是通过建立模型。在建立模型和求解的过程中，往往要用到数学方法和技巧，因此需要较深的数学理论。鉴于采运工作者掌握数学知识的程度和特点，本讲义力求深入浅出，着重应用，并尽量结合采运专业引进实例。

本讲义共分八章：第一章　线性规划；第二章　整数规划；第三章　非线性函数的极值；第四章　动态规划；第五章　图与网络；第六章　排队论；第七章　存贮论；第八章　决策论。这些内容都是实现木材生产管理现代化的有力工具，但由于本人水平有限，加之时间仓促，作为采运专业第一次尝试的讲义，错误之处，在所难免，望读者多提意见，以便改进。

目　　录

序　言

第一章　线性规划 1

§1　线性规划问题及其数学模型 1

§2　〃〃〃〃〃〃的标准型 9

§3　〃〃〃〃〃〃的解 14

§4　单纯形法 15

§5　对偶单纯形法 53

§6　灵敏度分析 58

§7　运输问题 76

第二章　整数规划 98

§1　问题的提出 98

§2　分技定界法 100

§3　0－1整的规划 103

§4　指派问题 109

第三章　非线性函数的极值 117

§1　斐波那寄分数法 117

§2　黄金分割法 127

§3　搜索法在优选法中的应用 131

第四章　动态规划 135

§1　多阶段决策问题 135

§2　动态规划的基本思想 136

§3　多阶段决策过程……141
第五章　图与网络……157
§1　图的基本概念……157
§2　网络分析……160
§3　统筹法……169
第六章　排队论……188
§1　排队论的基本知识……188
§2　M／M／1系统……191
§3　M／M／C系统……191
§4　应用举例……207
第七章　存贮论……212
§1　存贮论的基本概念……212
§2　确定型存贮问题……213
§3　随机性存贮问题……222
第八章　决策论……228
§1　决策的概念与类型……228
§2　风险型决策……231
§3　不确定情况下的决策……239
§4　决策过程……241

第一章 线性规划

在生产过程中，往往受到一些条件的限制，如劳力、原材料、时间，供需数量，资金等，这是生产的首要条件，规划中称为约束条件，满足约束条件下最理想的方案称为目标，表达目标的函数称为目标函数。

线性规划是在一些线性等式或不等式的约束条件下，求解线性目标函数的最大值或最小值的方法。

线性规划是运筹学的一个重要分支，自一九四七年，丹捷格（Dantzig）提出单纯形法求解一般线性规划问题的方法之后，线性规划在理论上趋向成熟，实际应用也日益广泛与深入，特别是能用电子计算机来处理繁杂的数字计算之后，它的应用范围更加广泛；从个人、单位的日常工作和计划安排，到整个部门，以至国民经济的计划的最优化方案的提出。它具有适应性强、应用面广，计算简便的特点，是现代管理科学的重要基础和手段之一。

§1 线性规划问题及其数学模型

例1　某林业局今年木材生产可在甲、乙、丙3个林场安排。已知各林场生产每万立米木材需架设索道分别为2、3、0（百米），修公路分别为0、2、4（公里），汽车分别为3、2、5（百车日），由于条件限制，林业局今年最大可能架设索道、修建公路、调配汽车分别为15（百米）、8（公里）、20（百车日）（见表1－1），若甲、乙、丙林场每生产一万立米木材可得利润分别为3（万元），5（万元），4（万元），

问应如何安排各林场的生产产量，才能得到总利润最多?

表1－1

每万立米木材需要条件	林场			可用量
	甲	乙	丙	
索　道(百米)	2	3	0	15
公　路(公里)	0	2	4	8
汽车(百车日)	3	2	5	20
每万立米利润(万元)	3	5	4	

这个问题的数学语言可描述如下：

假设甲、乙、丙林场今年安排木材生产的数量(万立米)分别为x_1、x_2、x_3。考虑今年架设索道的数量不得超过15的条件，用不等式表示为

$$2x_1+3x_2\leq 15$$

同样，考虑到公路和运材车的条件，可用不等式表示为

$$2x_2+4x_3\leq 8 \quad 及 \quad 3x_1+2x_2+5x_3\leq 20$$

由于木材产量不能为负数，所以又有

$$x_1, x_2, x_3\geq 0 \quad (即变量的非负约束)$$

该林业局的生产目标是：在满足上述条件下，如何确定产量x_1、x_2、x_3，使得到的总利润最大。若用z(万元)表示总利润，则有

$$z=3x_1+5x_2+4x_3$$

综上所述，该问题可归纳为

满足约束条件：

$$
\begin{cases}
2x_1+3x_2\leq 15\\
2x_2+4x_3\leq 8\\
3x_1+2x_2+5x_3\leq 20
\end{cases}
$$

$$x_1, x_2, x_3\geq 0$$

使得目标（利润）$z=3x_1+5x_2+4x_3$ 为最大

例2　某林场在陡峻山地安排生产原条和原木两种木材，已知生产原条和原木时，每万立米木材需伐木油锯的台时数分别为2、2（千台时）造材（打枝）小油锯分别为1、2（千台时），集材索道绞盘机分别为4、0（千台时），人力集材分别为0、4（千工日），若在生产期内可提供的油锯、小油锯、绞盘机、集材工的工时数分别为12（千台时），（8千台时），16（千台时），12（千工日），该场每生产一万立米原条和原木可得到利润分别为2、3（万元），问如何安排原条和原木的生产产量，才能得到总利润最多？

表1－2

每生产万立米木材需要条件	产品		可用量
	原条	原木	
伐木锯（千台时）	2	2	12
打选锯（〃〃〃）	1	2	8
绞盘机（〃〃〃）	4	0	16
集材工（千工日）	0	4	12
每万立米利润（万元）	2	3	

（已知条件列在表1－2）

这问题也可描述为数学语言。

假设：安排原条和原木的生产数量分别为X_1，X_2（万立米），考虑了四个约束条件，即可列出四个不等式

$$2X_1+2X_2\leq 12；X_1+2X_2\leq 8$$

$$4X_1\leq 16；\quad 4X_2\leq 12$$

考虑非负约束，即有

$$X_1，X_2\geq 0$$

该林场的生产目标是：在满足上述条件下，如何确定X_1，X_2，使得总利润最大，若用Z（万元）表示总利润，则有

$$Z=2X_1+3X_2$$

于是，该问题可归纳为

满足约束条件：

$$\begin{cases}2X_1+2X_2\leq 12\\ X_1+2X_2\leq 8\\ 4X_1\leq 16\\ 4X_2\leq 12\end{cases}$$

$$X_1，X_2\geq 0$$

使得

目标（利润）$Z=2X_1+3X_2$为最大。

例3　某林业局有甲、乙两林场往贮木场运送木材，已知这两林场每万立米木材中含有松木分别为1、4（千立米），柞木分别为1、1（千立米）杨木分别为2、0（千立米），桦木分别为3、2（千立米）如贮木场需要在甲、乙、两林场运来的总量中有松木、柞木、杨木、桦木分别120、45、20、90（千立米），甲、乙两林场木材运到贮木场的每万立米运费分别1、2（十万元）（见表1－3）。

表1－3

每万米木材中含有树种	林场 甲	林场 乙	贮木场需要量
松　木（千立米）	1	4	120(千立米)
柞　木（〃〃〃）	1	1	45
杨　木（〃〃〃）	2	0	20
桦　木（〃〃〃）	3	2	90
每万立米运费（十万元）	1	2	

问如何安排甲、乙林场的木材量，才能使总的运输费用最小？

这个问题的数学语言可描述如下：

假设：从甲、乙两林场运出的木材量为x_1，x_2（万立米）；考虑贮木场对对四个树种的需要量，即可列出四个不等式

$$x_1+4x_2\geq 120;\quad x_1+x_2\geq 45$$

$$2x_1\qquad\geq 20\quad;3x_1+2x_2\geq 90$$

考虑非负约束，即有

$$x_1,\ x_2\geq 0$$

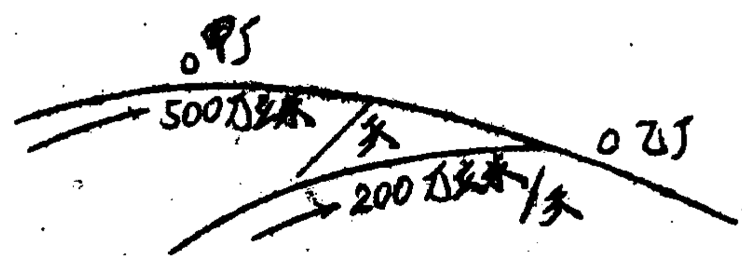
该林业局的调运目标是：在满足上述条件下，如何确定X_1，X_2，使得总运费最小，若用Z（十万元）表示总运费，则有

$$Z = X_1 + 2X_2$$

综合上述，这个调运计划问题可归纳为满足约束条件：

$$\begin{cases} X_1 + 4X_2 \geq 120 \\ X_1 + X_2 \geq 45 \\ 2X_1 \qquad 20 \\ 3X_1 + 2X_2 \geq 90 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$



使得

图 1－1

$$Z = X_1 + 2X_2 \quad \text{最小}$$

例4　某河沿岸有两个综合利用工厂（见图1－1），根据林业局总体设计要求，对综合厂废水处理要有治理方案。已知流经甲厂的河水流量是每天500（万立米）；两厂之间有一流量为每天200万立米的支流，甲、乙两厂排放污水每天分别为2、1.4（万立米），甲厂排出的污水流到乙厂前，有20%自然净化。根据环保要求，河流中工业污水的含量应不大于0.2%。甲乙两厂处理污水的费用是每万立米分别为1000、800（元）。问甲乙两厂应各处理污水量多少，才能使两厂总的处理污水费用最小？

这个问题的数学语言可描述如下：

设　甲、乙两厂每天处理污水量为X_1，X_2（万立米），考虑两厂之间，河流中污水含量不大于0.2%，可得不等式

$$\frac{2-X_1}{500} \leq 0.2\% \quad 即 \quad X_1 \geq 1$$

考虑乙厂之后，河流中污水含量仍不大于0.2%则有

$$\frac{(2-X_1)(1-20\%)+(1.4-X_2)}{500+200} \leq 0.2\%$$

整理后得

$$0.8X_1 + X_2 \geq 1.6$$

由于污水的每天处理量不大于排放量，故有

$$X_1 \leq 2\,; \quad X_2 \leq 1.4$$

再由非负约束条件，又有

$$X_1\ ,\ X_2 \geq 2$$

这问题的目标是：满足上述条件下，如何确定X_1、X_2，使得处理污水的总费用最小，若用Z（元）表示总费用，则有

$$Z = 1000X_1 + 800X_2$$

综合上述，这环保问题可归纳为

满足约束条件：

$$\begin{cases} X_1 & \geq 1 \\ 0.8X_1 + X_2 & \geq 1.6 \\ X_1 & \leq 2 \\ \qquad\quad X_2 & \leq 1.4 \end{cases}$$

$$X_1, X_2 \geq 0$$

使得

$$Z = 1000X_1 + 800X_2 \text{ 为最小}$$

从以上几个例子看出，它们都是属于一类优化问题，从数学上说，它们具有以下共同特征：

(1)每一个问题都用一组未知数（X_1，X_2 …，X_n）表示某一方案；这组未知数的一组定值就代表一个具体方案。通常要求这些未知数取值是非负的。

(2)存在一定的限制条件（称为约束条件），这些限制条件都可以用一组线性等式或不等式来表达。

(3)都有一个目标要求，并且这个目标可表示为一组未知数的线性函数（称为目标函数）。按问题不同，要求目标函数实现最大化或最小化。

一般，这类问题可用数学语言描述如下：

目标函数

$$\text{Max}\ (\text{或Min})\ Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \qquad (1\cdot1)$$

满足约束条件

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leq (=, \geq)\ b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \leq (=, \geq)\ b_2 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \leq (=, \geq)\ b_m \end{cases} \qquad (1\cdot2)$$

$$X_1,\ X_2,\ \cdots X_n \geq 0 \qquad (1\cdot3)$$

这就是线性规划的数学模型。

式（1·1）称为目标函数；（1·2）与（1·3）称为约束条件，其中式（1·3）也称为非负条件

§2　线性规划问题的标准型

由前述可知，线性规划问题有各种不同的形式，为了便于以后讨论，规定了线性规划问题的标准型为：

目标函数

$$\mathrm{Max}\, Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots\cdots + C_nX_n \qquad (1\cdot 4)$$

满足条件

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots\cdots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots\cdots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots\cdots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases} \qquad (1\cdot 5)$$

$$X_1,\ X_2,\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ X_n \geq 0 \qquad (1\cdot 6)$$

其缩写形式为

$$\mathrm{Max}\, Z = \sum_{j=1}^{n} C_j X_j$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j = b_j \qquad i = 1,\ 2\cdots\cdots,\ m$$

$$x_j \geq 0 \qquad j = 1, 2, \cdots, n$$

这里假定$b_i \geq 0$ （否则等式两端同乘以-1）

有时线性规划问题也可用向量和矩阵描述

$$\text{Max } z = CX$$

$$AX = b$$

$$X \geq 0$$

其中：

$$C = (c_1, c_2, \cdots\cdots, c_n); \; X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

C　称目标函数中的系数向量（价值向量）

b　称约束方程组的常数项向量（限定向量）

X　称未知数向量

为方便起见常写成行向量的转置形式

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)^T$

A　称约束方程组的系数矩阵　（$m \times n$ 阶）

若用

$$p_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \cdots p_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, p_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

则

$$A = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$$

向量p_j称对应变量x_j的系数向量

这样，（1.5）式也可写成

$$(p_1, p_2, \cdots p_n) X = b$$

为借助于标准型的求解方法进行求解，首先要将各式各样的线性规划数学模型化成标准型。

1.若要求目标函数实现最小化，即

$$M_{in} z = c_1 x_n + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

只需令$Z' = -Z = -c_1 x_n - c_2 x_n \cdots - c_n x_n$

即可得到 $M_{ax}(-z) = -c_1 x_1 - c_2 x_2 \cdots - c_n x_n$

例如例4的目标函数化成标准型即为

$$M_{ax}(-z) = -1000 x_1 - 800 x_2$$

2.若约束条件为不等式。这里可能为“≤”或“≥”的形式，前者可在“≤”的左端加入非负的松驰变量，后者则可在“≤”的左端减去非负的剩余变量，从而把不等式约束条件化成标准型

例如，例1的数学模型为

$$\mathrm{Max}\ z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 15 \\ 2x_2 + 4x_3 \le 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 20 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

在约束条件的各不等式中，分别在"≤"号左端加上一个非负的变量 x_4，x_5，x_6，使不等式变为等式，于是得标准型

$$\mathrm{Max}\ z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + 0.x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \\ 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_6 = 20 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \ge 0$$

所加松弛变量 x_4，x_5，x_6 表示没有被利用的设备能力（或资源），由于没有被利用，当然不会转为利润（价值），所以在目标函数中，它们的系数恒为零，即 $c_4 = c_5 = c_6 = 0$

又如例2，其数学模型为

$$\mathrm{Max}\ z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \quad 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

化为标准型应为

$$\mathrm{Max}\, z = 2x_1 + 3x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + 0.x_6$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 12 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 8 \\ 4x_1 + x_5 = 16 \\ 4x_2 + x_6 = 12 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

3.若存在无非负要求的变量x_k，可令$x_k = x_k' - x_k''$

其中 x_k'，$x_k'' \geq 0$，这样，可由x_k'与x_k''的大小决定x_k的正负。

例如，线性规划问题的数学模型为

$$\mathrm{Min}\, z = 2x_2 - x_1 - 3x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 7 \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

x_1，$x_2 \geq 0$，x_3 无正负约束

化为标准型即为

$$\mathrm{Max}\, z' = x_1 - 2x_2 + 3(x_4 - x_5) + 0.x_6 + 0.x_7$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 7 \\ x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 2 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 5 \end{cases}$$