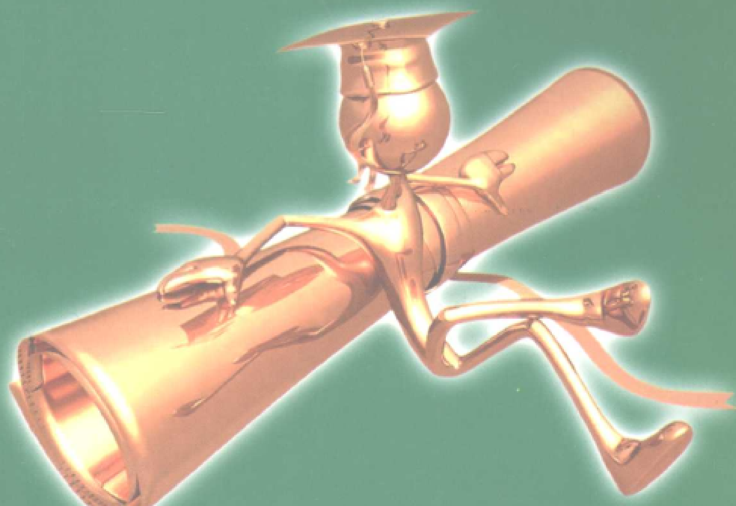
• 思远教辅精品绿色通道系列丛书 •
■依据《课程标准》《考试大纲》编写

绿色通道

高中同步用书

□ 丛书主编 贾鸿玉

● 学生用书



数学

高二上册

天津人民美術出版社

品牌教辅 畅销全国

GREEN PASSAGE

绿色通道

高中同步用书

数学

高二上册

丛书主编/贾鸿玉
本册主编/孔庆府 何明春 杜仕泽
副 主 编/任宗杰 张诚胜 许云军
刘瑞波 高艳清 王大力
编 委/刘 伟 何太聪 张让琛
罗巧林 蒲红梅 朱瑞素
张惠娟 赵聚华 邓义欣
丁志力 贾建文 郭景素

天津人民美術出版社

L S T D

绿色通道

图书在版编目（CIP）数据

高中同步用书.高二数学.上册/贾鸿玉主编；孔庆府，编著.—天津：天津人民美术出版社，2008.2

（绿色通道）

依据《课程标准》、《考试大纲》编写

ISBN 978-7-5305-3626-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.①贾…②孔…　Ⅲ.数学课-高中-教学参考资料　Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第020706号

书　　名：绿色通道·高二数学

出 版 人：刘子瑞　　责任编辑：邢立宏　　技术编辑：高　振

封面设计：思远文化　　营销策划：老　多　　责任印制：刘艳娜

出版发行：天津人民美術出版社　　邮编：300050

地　　址：天津市和平区马场道150号　　电话：（022）23287429

经　　销：全国新华书店　　印刷：河北光明印业有限公司

版　　次：2008年2月第1版　2008年2月第1次印刷

开　　本：860×1200　1/16　　印　　张：152

印　　数：0001-30000　　全套定价：304.00元（共九册）

（如出现印装错误，请与承印厂家调换）

FOREWORD

前言

高考状元秘窍
——你的成功秘窍是什么？

1 从没想过当状元

当面对“是否想过当状元”这个问题时，几乎所有的状元都回答了“没有”。原因也惊人的相似：其一，要保持良好的心态，急功近利反而会无功而返；其二，状元是偶然因素与必然因素作用的结果，不可强求；其三，状元仅仅是个称号，并无多大实际意义。状元的光环并没有冲昏他们的头脑，良好的心态是他们成功的关键。

结论：不想当将军的士兵不是好士兵，但一心想着当状元的学生往往当不上状元。

2 学习环境宽松

绝大部分状元在谈及成功的因素时，大都会感谢父母和老师给了自己一个轻松的环境。父母不看重名次、老师不看重分数，而都是注重给考生营造良好宽松的学习氛围，注意给考生塑造积极向上的考试心态。如此一来，考生没有了包袱，轻装上阵，自然能发挥出平时的水平。

不过话说回来，状元们之所以会得到家长和老师如此的态度，其基础是对考生的充分信任，考生“毋须扬鞭自奋蹄”的学习态度是父母老师敢于这么做的关键所在。

结论：壁立千仞，无欲则刚！自觉的考生无须太多管教，宽松的环境往往孕育成功。

3 注重方法，讲求效率

很多状元都强调，其实自己和一般的同学没什么两样。若要真说起状元与众不同的地方，应该是善于学习、注重方法、讲求效率。

为什么很多状元既能玩又能学还能兼顾参加课外活动？因为讲求效率。为什么很多状元学习起来得心应手，考起来左右逢源？因为注重方法。细节之处见真章，汲取、总结出适合自己的学习方法，是状元们成功的不二法门。

状元们有一个共同的心得，方法因人而宜，不见得对别人有用的方法就对自己也有用。如果想着用别人现成的方法，往往生搬硬套，效果也就可想而知了。

结论：勤奋是路，方法是灯，照亮前程。

4 立根源在课本中，紧跟老师不放松

他们认为，考试的内容在课本上都能找出答案，而课本上提供的方法和思路，又往往是最基础、最普遍的。更有状元同学把“对政治课本目录的深刻理解”作为自己高考的一个重要经验。而且，状元们大都不会脱离老师而自己另辟蹊径，老师们丰富的经验成为了他们高考成功的利器。深刻理解了课本，课堂上跟着老师走，也就打牢了基础，扎稳了根基。这样，就像一个内功深厚的武林高手，在高考的“江湖”里便可以任尔东西南北风了。

结论：基础扎实、吃透课本、紧跟老师。

FOREWORD

前言

守望希望的绿色

——思远《高考绿色通道》丛书总序

根据教育部制订的《全日制义务教育课程标准》，参考教育部考试中心最新版的《考试大纲》，以最新的高考试题为蓝本，从高中生的接受心理入手，引导学生提高思想认识、思维品质、文化品位和审美情趣，培养学生的想像力和思维敏锐的感知力，激发对未知领域积极探索的精神，培养创新意识和创新能力，提高基本素质，发展能力，形成健全心理。

教辅书呼唤升级换代，换代后的教辅应该是符合上述教育思想的教辅。《高考绿色通道》丛书是一套由高考命题研究专家精心策划，由来自北京、上海、江苏、河北、山东、辽宁等省市的全国著名重点中学特高级教师主编的精品教辅书。作者将近三年的高考试题从命题原则、意图、特点、方法及改革方向等方面作了详细探究，总结出相应的高考热点专题，力争使学生在高考复习中能有的放矢，少走弯路，尽快理解和掌握高考复习要领，把握高考方向，领会高考重点和热点知识，考出良好成绩。

本丛书结构新颖、实用，特色如下：

丛书立意

依据最新《考试大纲》提出相应的题型，精心设计层次试题，编写突出试题立意、能力立意的佳题，最大限度地对高考进行科学、高效的模拟训练。优化整理教材知识概要，从全局的角度把握相关专题的重点、热点。

试题编选

对近5年高考中常考、典型题目，依照高考考点或题型分布进行了分类，综合分析高考命题特点，从命题意图、命题形式入手，分析高考命题的演变趋势。让考生从发展的角度寻找高考命题规律，预测今后高考试题特点，使其在备考复习时更具方向性和科学性。

编写体例

书在编排时充分考虑了各种高考模式、最新考纲变化及各单独命题省市的实际等情况，方便全国各地考生使用。为了方便考生使用，本书不但将各专题下的题目分成了大小不等的小练习，而且将高考试题也拆分到了各个练习当中，考生可以从中得到更新的命题信息。

名师效应

本书每章内容都有“解惑答疑”内容，收集了教学中发现的疑难问题，有针对性地进行剖析，以加深学生对基本概念、基本理论的理解，指出学生解题过程中容易出现的错误．，对有代表性的例题，着重对解题思路、解题方法进行了较详细的解答，并对高考命题规律和解题技巧也作了总结。

答案解析

对试题类编中出现的所有题目，从命题角度、考查要点、解题思路等方面进行了全面、系统分析，有助于考生更好地掌握答题技巧。

思远《高考绿色通道》丛书以“人无我有、人有我精”的策划思想，“科学、严谨、实用、新颖”的体例编排，加之“认真”和“严格”的编写过程，对此，我们充满信心，相信该套丛书经得住读者的考验，会赢得广大师生的青睐。

思远文化有限公司策划部于北京

绿色通道 LUSETONGDAO

思远《高考绿色通道》丛书在继承以往优秀成果的基础上，更加注重创新，强化知识的系统与综合应用。学生也已逐步适应了高中的学习方式和氛围，对基础知识有了一定的把握，寻找其中的规律，强化记忆，弥补知识系统链中不完整处，这对于基础知识的巩固和较深入的学习都会有很大的帮助。

本丛书以"创新、实用"两点为总原则，增加新教材的内容。该内容包括充实了相关的信息、材料，每一知识点增加测试反馈、评估的内容，检测学生学习能力达成的情况，编写过程中还补充了新题型、新情景、新材料，修正传统教辅书中存在的问题，并使教材最新补充部分得到充分体现。整套丛书不但可作为学生同步练习使用，也可作为学生课下自主探究；更是教师备课、讲课和布置练习的好助手。

思远《高考绿色通道》丛书有以下几个特点：

讲解细致完备

全面的剖析，对知识点的讲解自然更细致。一些问题及例题、习题后的特殊点评标识，能使学生对本专题的知识掌握起来难度更小，更易于理解和记忆，学生可以有针对性地选择，以实现在较短时间里对某一整块知识学透、练透的愿望。

栏目科学实用

丛书编者多为全国知名的高考研究专家和富有教学经验的特级教师。主要栏目有"双基概要""名师辅导""技巧解说""基础练习""模拟提高""课外拓展"等内容，有较强的针对性和指导意义。

设题规范有度

丛书习题内容都经过编写者的反复推敲斟酌和认真梳理。从培养学生创新能力和实践能力出发，书中还精编、精选了许多"创新题""模拟题"，并做了精辟分析，努力使学生从习题的形式到内容都适应高考的要求。

学科联系密切

丛书充分体现在新旧知识网络的交汇点处和能力层次的交叉区内命题的原则，生动演绎"在知识的交汇点上出新颖题型，考查学生能力"的思想，即一个问题面临多个知识点的组合，多种解法的选择，注重对学科内知识的综合渗透，适度体现跨学科综合渗透的思想，突出综合性。

答案细致有序

丛书从实战出发，经典问题、梯度难题等从各个方面细细剖析，还配上标准答案以供参考，可谓详细之至。有利于提高学生的知识水平、能力水平和素质水平。具有较强的针对性、指导性和实用性，有助于学生结合具体教学内容进行巩固练习。

思远《高考绿色通道》丛书策划部不断根据市场调研的反馈，及时调整丛书的编排体例，也衷心感谢全国师生在使用中及时提出各类宝贵意见，我们相信：这套倾注了众多专家、名师心血的丛书，必将成为广大高中学生的良师益友，定能引领你走上高考成功的绿色通道。

思远《高考绿色通道》丛书策划部于北京

鸣谢：丛书的策划、编写及审定得到了北京师范大学、华中师范大学、人大附中、景山中学、湖南师大附中等单位的专家、特高级教师的鼎力相助，特此致谢！

心血铸品牌 绿色伴君行

——思远《高考绿色通道》丛书总序

高考状元——你的成功秘密是什么？

一、从没想过当状元

当面对“是否想过当状元”这个问题时，几乎所有的状元都回答了“没有”。原因也惊人的相似：其一，要保持良好的心态，急功近利反而会无功而返；其二，状元是偶然因素与必然因素作用的结果，不可强求；其三，状元仅仅是个称号，并无多大实际意义。状元的光环并没有冲昏他们的头脑，良好的心态是他们成功的关键。

结论：不想当将军的士兵不是好士兵，但一心想着当状元的学生往往当不上状元。

二、学习环境宽松

绝大部分状元在谈及成功的因素时，大都会感谢父母和老师给了自己一个轻松的环境。父母不看重名次、老师不看重分数，而都是注重给考生营造良好宽松的学习氛围，注意给考生塑造积极向上的考试心态。如此一来，考生没有了包袱，轻装上阵，自然能发挥出平时的水平。

不过话说回来，状元们之所以会得到家长和老师如此的态度，其基础是对考生的充分信任，考生“毋须扬鞭自奋蹄”的学习态度是父母老师敢于这么做的关键所在。

结论：壁立千仞，无欲则刚！自觉的考生无须太多管教，宽松的环境往往孕育成功。

三、注重方法，讲求效率

很多状元都强调，其实自己和一般的同学没什么两样。若要真说起状元与众不同的地方，应该是善于学习、注重方法、讲求效率。

为什么很多状元既能玩又能学还能兼顾参加课外活动？因为讲求效率。为什么很多状元学习起来得心应手，考起来左右逢源？因为注重方法。细节之处见真章，汲取、总结出适合自己的学习方法，是状元们成功的不二法门。

状元们有一个共同的心得，方法因人而宜，不见得对别人有用的方法就对自己也有用。如果想着用别人现成的方法，往往生搬硬套，效果也就可想而知了。

结论：勤奋是路，方法是灯，照亮前程。

四、立根源在课本中，紧跟老师不放松

他们认为，考试的内容在课本上都能找出答案，而课本上提供的方法和思路，又往往是最基础、最普遍的。更有状元同学把“对政治课本目录的深刻理解”作为自己高考的一个重要经验。而且，状元们大都不会脱离老师而自己另辟蹊径，老师们丰富的经验成为了他们高考成功的利器。深刻理解了课本，课堂上跟着老师走，也就打牢了基础，扎稳了根基。这样，就像一个内功深厚的武林高手，在高考的“江湖”里便可以任尔东西南北风了。

结论：基础扎实、吃透课本、紧跟老师。

Contents+目录指南

第6章　不等式

Contents 目录指南

绿色通道 LUSETONGDAO

Contents 目录指南

绿色通道 LUSETONGDAO

Contents+目录指南

第6章 不等式

6.1 不等式的性质(一)

本课综合评讲

本课要求了解比较两个实数(代数式)大小的方法.理解比较两个实数(代数式)大小的思维过程,培养学生对数学知识的理解能力、应用能力及论证能力.

本课重点是实数的性质,难点是实数性质的基本应用.

本节内容较少,但很重要,是学习本章的源头.因此建议同学们根据自己实际情况,把不等式的有关知识进行梳理,以利于后面各节的学习.

对于任意两个实数 a、b 来说,当且仅当 $a-b>0$ 时,$a>b$;当且仅当 $a-b<0$ 时,$a<b$;当且仅当 $a-b=0$ 时,$a=b$.也就是说:

$a-b>0\Leftrightarrow a>b$;$a-b<0\Leftrightarrow a<b$;$a-b=0\Leftrightarrow a=b$.

上式中的左边部分反映的是实数的运算性质,而右边部分反映的则是实数的大小顺序,合起来就成为实数的运算性质与大小顺序之间的关系.它是本章整个内容的基础,是不等式的证明和解不等式的主要依据.

由于判断两个实数 a 与 b 的大小,归结为判断它们的差 $a-b$ 的符号(注意是指差的符号,至于差本身究竟是多少,在这里无关紧要).因此,如果设 $a-b=m$,而 m 又可表示为某些实数运算的结果,那么要确定 m(即 $a-b$)的符号,必然又要归结到实数运算的符号法则.运用作差法时,常常需要把所得的差适当变形(如配方、因式分解等)后才能判断其符号(>0 或 <0).运用作商法时,应通过约分及有关幂的运算把商化成一个分数的幂的形式,而这个分数是否大于1应是一目了然的.

目标瞄向高考

1. 利用实数的性质进行判断

例1 (2003年高考北京春文)设 $a,b,c,d\in\mathbf{R}$ 且 $a>b>c>d$,则下列结论正确的是 ( )

A. $a+c>b+d$　　B. $a-c>b-d$

C. $ac>bd$　　D. $\frac{a}{d}>\frac{b}{c}$

解析:由题知 $a>b,c>d\Leftrightarrow a-b>0,c-d>0$,两个正数和仍为正数.$\therefore a+c>b+d$.故选A.

答案:A

2. 利用作差比较大小(通分变形)

例2 (2007年上海卷)设 a,b 为非零实数,若 $a<b$,则下列不等式成立的是 ( )

A. $a^2<b^2$　　B. $ab^2<a^2b$

C. $\frac{1}{ab^2}<\frac{1}{a^2b}$　　D. $\frac{b}{a}<\frac{a}{b}$

解析:当 $a<0<b$ 且 $|a|>|b|$ 时,易知A、B、D错误,而 $\frac{1}{ab^2}-\frac{1}{a^2b}=\frac{a-b}{a^2b^2}<0$ 总成立,C正确,故选C.

答案:C

方法技能探究

题型1　作差比较大小(1)

比较数与式的大小,一般采用作差法.作差后将差分解因式,配方,变形后便于判断正负,进而得出数与式的大小.

例1 已知 $x<y<0$,试比较 $(x^2+y^2)(x-y)$ 与 $(x^2-y^2)(x+y)$ 的大小.

[分析]　根据题目的结构特征,可考虑用差值比较法.

解析:$(x^2+y^2)(x-y)-(x^2-y^2)(x+y)$

$=(x-y)[(x^2+y^2)-(x+y)^2]=-2xy(x-y)$.

$\because x<y<0$,$\therefore xy>0$,$x-y<0$.

$\therefore -2xy(x-y)>0$.

$\therefore (x^2+y^2)(x-y)>(x^2-y^2)(x+y)$.

[评析]　比较 a 与 b 的大小,归结为判断它们的差 $a-b$ 的符号(注意是指差的符号,至于差的值究竟是多少,在这里无关紧要).

比较 a 与 b 大小的步骤是:①作差;②变形(分解因式、配方法);③判断差的符号;④结论.概括为"三步,一结论".其中"判断差的符号"是目的,变形是关键(常采用配

方、因式分解、通分、有理化等恒等变形手段).

类题 1:已知 $a\neq b$,试比较 a^4-b^4 与 $4a^3(a-b)$ 的大小.

[分析]　作差后,先分解因式,再对其中部分不易判断符号的因式配方.

[解]　$a^4-b^4-4a^3(a-b)$

$=(a-b)(a+b)(a^2+b^2)-4a^3(a-b)$

$=(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3-4a^3)$

$=(a-b)[(a^2b-a^3)+(ab^2-a^3)+(b^3-a^3)]$

$=-(a-b)^2(3a^2+2ab+b^2)$

$=-(a-b)^2[(a+b)^2+2a^2]$

$\because a\neq b$

$\therefore -(a-b)^2<0$ 又 $(a+b)^2+2a^2>0$

$\therefore -(a-b)^2[(a+b)^2+2a^2]<0$

$\therefore a^4-b^4<4a^3(a-b)$

[评析]　(1)判断 $3a^2+2ab+b^2$ 的正负是关键,此式不能再分解因式,但可配成两个平方数之和;

(2)代数式中字母取值范围是实数集的可以省略不写.

例 2　设 $a、b\in \mathbf{R}$,求证:$a^2+b^2+ab+1>a+b$.

[分析]　从最高次数为二次考虑,可比较两边差的正负,故可考虑二次三项式的配方.

[证法 1]　$a^2+b^2+ab+1-a-b$

$=\left(a+\frac{b}{2}-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\left(b-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}>0$,

$\therefore a^2+b^2+ab+1>a+b$.

[证法 2]　$a^2+b^2+ab+1-a-b$

$=a^2+(b-1)a+b^2-b+1$.

令 $f(a)=a^2+(b-1)a+b^2-b+1$,

$\Delta=(b-1)^2-4(b^2-b+1)$

$=-3\left(b-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{8}{3}<0$.

$\therefore f(a)>0$ 恒成立,即 $a^2+b^2+ab+1>a+b$.

[评析]　证法 1 是常规的比较法,而证法 2 则是从二次三项式的符号与二次函数关系出发,用函数的思想处理不等式问题.

类题 2:已知 $a,b\in \mathbf{R}$,比较 a^4+b^4 与 a^3b+ab^3 的大小.

[解析]　因为 $(a^4+b^4)-(a^3b+ab^3)$

$=a^3(a-b)+b^3(b-a)$

$=(a-b)(a^3-b^3)$

$=(a-b)^2(a^2+ab+b^2)$

$=(a-b)^2[(a+\frac{b}{2})^2+\frac{3}{4}b^2]\geqslant 0$

(当且仅当 $a=b$ 时,取"="号)

所以 $a^4+b^4\geqslant a^3b+ab^3$

题型 2　作差比较大小(2)

利用作差法比较大小,有时需要进行通分,有时需要对分子或分母有理化,变形后再判断正负,进而得出大小关系.

例 3　已知 $a\geqslant 1$,比较 $M=\sqrt{a+1}-\sqrt{a}$ 与 $N=\sqrt{a}-\sqrt{a-1}$ 的大小.

[分析]　作差后,为使差值符号便于判断,可考虑分子有理化.

解析:$M-N$

$=(\sqrt{a+1}-\sqrt{a})-(\sqrt{a}-\sqrt{a-1})$

$=\dfrac{1}{\sqrt{a+1}+\sqrt{a}}-\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a-1}}$

$=\dfrac{\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}}{(\sqrt{a+1}+\sqrt{a})(\sqrt{a}+\sqrt{a-1})}$

因为 $a\geqslant 1$　所以 $\sqrt{a-1}<\sqrt{a+1}$ 即

$\sqrt{a-1}-\sqrt{a+1}<0$

又 $\sqrt{a+1}+\sqrt{a}>0$,$\sqrt{a}+\sqrt{a+1}>0$.

所以 $M-N<0$,即 $M<N$.

[评析]　通过分子(或分母)的有理化使"方根的差"转化为"方根的和"是解决根式问题的一种常用技巧.

类题 3:试比较 $\sqrt{7}-\sqrt{5}$ 与 $\sqrt{3}-1$ 的大小.

[解析]　$\sqrt{7}-\sqrt{5}=\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$,$\sqrt{3}-1=\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$

$\therefore (\sqrt{7}-\sqrt{5})-(\sqrt{3}-1)=\dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$

由于 $\sqrt{7}+\sqrt{5}>\sqrt{3}+1$,

$\therefore \dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}<\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}$

$\therefore \dfrac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}-\dfrac{2}{\sqrt{3}+1}<0$

即 $\sqrt{7}-\sqrt{5}<\sqrt{3}-1$.

例 4　已知 $a>b$,$ab>0$ 试比较 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小.

[分析]　本题可通过作差,通分再比较;也可以由 $ab>0$ 知 a,b 同号且 $a>b$ 直接判断 $\frac{1}{a}$ 与 $\frac{1}{b}$ 的大小.

解析:作差有 $\dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}=\dfrac{b-a}{ab}$

由题知 $a>b$,$\therefore b-a<0$,又 $ab>0$.

$\therefore \dfrac{b-a}{ab}<0$　$\therefore \dfrac{1}{a}-\dfrac{1}{b}<0$

即 $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$.(直接判断略)

类题 4:若 $a\in \mathbf{R}$,$p=a^2-a+1$,$q=\dfrac{1}{a^2+a+1}$,比较 p 与 q 的大小.

[解析]　$p-q=a^2-a+1-\dfrac{1}{a^2+a+1}=\dfrac{a^2(a^2+1)}{a^2+a+1}$

因为 a^2+a+1

$=(a+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}>0$,$a^2+1>0$,$a^2\geqslant 0$

所以 $p-q\geqslant 0$,即 $p\geqslant q$.

题型3 作差后需要讨论的大小比较

含有字母的式子比较大小时，若作差、变形后，仍无法确定差的符号(差的符号与字母的取值有关)时，需对字母的取值情况进行分类讨论.进而得出大小关系.

例5 比较 $3(1+a^2+a^4)$ 与 $(1+a+a^2)^2$ 的大小.

[分析] 由于这两个代数式均为多项式，故可应用 $a>b\Leftrightarrow a-b>0$、$a=b\Leftrightarrow a-b=0$、$a<b\Leftrightarrow a-b<0$ 进行大小比较.

解析 $\because 3(1+a^2+a^4)-(1+a+a^2)^2$

$=3+3a^2+3a^4-(1+a^2+a^4+2a+2a^2+2a^3)$

$=2+2a^4-2a-2a^3$

$=2(1-a)+2a^3(a-1)$

$=2(1-a)(1-a^3)$

$=2(1-a)^2(1+a+a^2)$

$=2(1-a)^2[(1+\frac{a}{2})^2+\frac{3}{4}a^2]\geqslant 0$.

当且仅当 $a=1$ 时，上述等号成立.

当 $a=1$ 时，$3(1+a^2+a^4)=(1+a+a^2)^2$；

当 $a\neq 1$ 时，$3(1+a^2+a^4)>(1+a+a^2)^2$.

[评析] (1)作差之后要与"0"比较大小，对含有字母的代数式与"0"比较大小时，要注意是否需要讨论；(2)作差之后的整理十分重要，要注重方法.

类题5：设 $a\in\mathbf{R}$，且 $a\neq -1$，试比较 $\frac{1}{1+a}$ 与 $1-a$ 的大小.

[分析] 将已知两式求差比较时，很容易得出 $\frac{1}{1+a}-(1-a)=\frac{a^2}{1+a}$，而此式的符号是随 $a=0$、$a<-1$、$a>-1$ 变化的，因此，分以上三类情形讨论是比较 $\frac{1}{1+a}$ 与 $1-a$ 大小的关键.

[解析] $\because \frac{1}{1+a}-(1-a)=\frac{a^2}{1+a}$，

$\therefore$ 当 $a=0$ 时，$\frac{a^2}{1+a}=0$，则有 $\frac{1}{1+a}=1-a$；

当 $a<-1$ 时，$\frac{a^2}{1+a}<0$，则有 $\frac{1}{1+a}<1-a$；

当 $a>-1$ 时，且 $a\neq 0$ 时，$\frac{a^2}{1+a}>0$，则有 $\frac{1}{1+a}>1-a$.

知能巩固提高

一、选择题

1. 若 $f(x)=3x^2-x+1$，$g(x)=2x^2+x-1$，则 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小关系是 ( )

A. $f(x)>g(x)$　　B. $f(x)=g(x)$

C. $f(x)<g(x)$　　D. 随 x 值变化而变化

2. 已知 $a+b>0$，$b<0$，那么 a、b、$-a$、$-b$ 的大小关系为 ( )

A. $a>b>-b>-a$　　B. $a>-b>-a>b$

C. $a>-b>b>-a$　　D. $a>b>-a>-b$

3. 设 $m=(x-1)^2$，$n=(x+1)^2$，则 m 与 n 的大小关系是 ( )

A. $m>n$　　B. $m=n$

C. $m<n$　　D. 不确定

4. 已知 a、b、c、d 均为实数，有下列命题①若 $ab>0$，$bc-ad>0$，则 $\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$；②若 $ab>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$，则 $bc-ad>0$；③若 $bc-ad>0$，$\frac{c}{a}-\frac{d}{b}>0$，则 $ab>0$. 其中正确命题的个数是 ( )

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

5. 给出以下判断：

①不等式 $x^2+1>1-x^2$ 是绝对不等式；②不等式 $x^2-2x+1>0$ 是条件不等式；③不等式 $|x|+1<\frac{1}{2}|x|$ 是矛盾不等式；④不等式 $\frac{1}{3}x-\frac{1}{x}>1$ 与 $\frac{2}{x}-x<2$ 是同向不等式. 其中正确的为 ( )

A. ①②　　B. ②③　　C. ③④　　D. ①④

二、填空题

6. 设 $0<a<b<c<1$，则将 $\sqrt{abc}$、$\sqrt{ab}$、$\sqrt{bc}$、$\sqrt{ca}$ 按从大到小的排列的顺序是________.

7. 设 a、$b\in\mathbf{R}$，且 $ab\neq 0$，则不等式 $ab-a^2$ ________ b^2 (填>、≥、<、≤)成立.

8. 把 $(\lg x)^2$、$\lg x^2$、$\lg(\lg x)(1<x<10)$ 按从大到小的顺序排列是________.

三、解答题

9. 比较 $a^2-3|a|$ 与 $|a|-5$ 的大小.

10. 设 $f(x)=1+\log_x 3$，$g(x)=2\log_x 2(x>0$ 且 $x\neq 1)$，试比较 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的大小.

11. 已知 $a<b<c$，$x<y<z$，且 $A=ax+by+cz$，$B=ax+cy+bz$，$C=cx+by+az$，$D=bx+ay+cz$，则 A、B、C、D 中最大的是哪一个？请证明你的结论.

6.1 不等式的性质(二)

本课综合评讲

本课内容是整个不等式部分的基础，也是将来高考的必考内容，本课要求：

1. 理解比较两个实数(代数式)大小的数学思维过程和方法.

2. 理解不等式的性质及推论，掌握不等式的性质和推论的证明方法. 会应用不等式的性质证明简单的不等式.

3. 培养学生对数学知识的理解能力、应用能力及论证能力.

4. 本课侧重于不等式性质的定理1—3及其推论.

目标瞄向高考

利用不等式的性质进行判断

例1(2004年高考湖北理·5)若$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，则下列不等式①$a+b<ab$；②$|a|>|b|$；③$a<b$；④$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$中，正确的不等式有　　(　　)

A. 1个　　B. 2个

C. 3个　　D. 4个

解析：由题意$\frac{1}{a}<\frac{1}{b}<0$，$\therefore b<a<0$

$\therefore a+b<ab$　$\therefore$①正确，②不正确

③不正确. 又$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2=\frac{b^2+a^2-2ab}{ab}$

$=\frac{(a-b)^2}{ab}>0$　即$\frac{b}{a}+\frac{a}{b}>2$

$\therefore$④正确　故选B.

答案：B

方法技能探究

题型1　利用同向不等式或相乘解决范围问题

例1设$2<a\leqslant 5$，$3\leqslant b<10$，求$a+b$，$a-b$及$\frac{a}{b}$的取值范围.

解析：$\because 2<a\leqslant 5$，$3\leqslant b<10$，

$\therefore 2+3<a+b<5+10$，即$5<a+b<15$.

又$\because 3\leqslant b<10$，$\therefore -3\geqslant -b>-10$，

即$-10<-b\leqslant -3$. $\therefore 2-10<a-b\leqslant 5-3$，

即$-8<a-b\leqslant 2$. $\because 3\leqslant b<10$，$\therefore \frac{1}{10}<\frac{1}{b}\leqslant\frac{1}{3}$.

又$\because 2<a\leqslant 5$，$\therefore \frac{1}{5}<\frac{a}{b}\leqslant\frac{5}{3}$.

［评析］　构造同向不等式是解决本问题的途径，运算时应注意不等式中“等号”是否成立.

类题1：已知$1\leqslant a+b\leqslant 5$，$-1\leqslant a-b\leqslant 3$，求$3a-2b$的取值范围.

［错解］　$\because 1\leqslant a+b\leqslant 5$，$-1\leqslant a-b\leqslant 3$，

$\therefore 0\leqslant(a+b)+(a-b)\leqslant 8$.

$\therefore 0\leqslant a\leqslant 4$.

$\because 1\leqslant a+b\leqslant 5$，$-3\leqslant-(a-b)\leqslant 1$，

$\therefore -2\leqslant(a+b)-(a-b)\leqslant 6$.

$\therefore -1\leqslant b\leqslant 3$.

$\because 0\leqslant a\leqslant 4$，$-1\leqslant b\leqslant 3$，

$\therefore 0\leqslant 3a\leqslant 12$，$-6\leqslant -2b\leqslant 2$.

$\therefore -6\leqslant 3a-2b\leqslant 14$.

［正解］　设$3a-2b=\alpha(a+b)+\beta(a-b)=(\alpha+\beta)a+(\alpha-\beta)b$，

$\therefore\begin{cases}\alpha+\beta=3,\\\alpha-\beta=-2,\end{cases}$则$\begin{cases}\alpha=\frac{1}{2},\\\beta=\frac{5}{2}.\end{cases}$

$\therefore \frac{1}{2}\leqslant\frac{1}{2}(a+b)\leqslant\frac{5}{2}$，$-\frac{5}{2}\leqslant\frac{5}{2}(a-b)\leqslant\frac{15}{2}$，

$\therefore -2\leqslant\frac{1}{2}(a+b)+\frac{5}{2}(a-b)\leqslant 10$.

即$-2\leqslant 3a-2b\leqslant 10$.

［评析］　正确解法中，寻找所求代数式与已知代数式之间的关系，从而获得结果容易理解与掌握.

在错误解法中，若是由已知条件证明不等式$-6\leqslant 3a-2b\leqslant 14$，那么结论是正确的. 在此解法的各个步骤中，均施行了不等式性质中的推出关系，然而作为求$3a-2b$的取值范围，则结论不正确，显然，$3a-2b$不能取得$[-6,14]$中的一切值. 事实上，由$1\leqslant a+b\leqslant 5$与$-1\leqslant a-b\leqslant 3$，得到$0\leqslant a\leqslant 4$，$-1\leqslant b\leqslant 3$，并不意味着$a$与$b$可各自独立地取得区间$[0,4]$及$[-1,3]$的一切值. 例如，取$a=4$，$b=3$时，$a+b=7$已超过题设条件中$1\leqslant a+b\leqslant 5$的范围. 细究其原因，就是推出关系并非等价关系的缘故.

类题2：若角α、β满足$-\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，求$2\alpha-\beta$的范围.

［解析］　$\because -\frac{\pi}{2}<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，

$\therefore -\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$，$-\pi<\alpha-\beta<0$，

$\therefore -\frac{3}{2}\pi<\alpha+(\alpha-\beta)<\frac{\pi}{2}$.

$\therefore -\frac{3\pi}{2}<2\alpha-\beta<\frac{\pi}{2}$.

题型2 利用不等式性质判断正误

例2 ①若 a、b、c、$d\in\mathbf{R}$，且 $a>b$，$c>d$，那么 ( )

A. $a-c>b-d$　　B. $ac>bd$

C. $-\frac{a}{d}>-\frac{b}{c}$　　D. $a-d>b-c$

②(2004年北京)已知 a、b、c 满足 $c<b<a$，且 $ac<0$，那么下列选项中不一定成立的是 ( )

A. $ab>ac$　　B. $c(b-a)>0$

C. $cb^2<ab^2$　　D. $ac(a-c)<0$

[分析] 从不等式的性质入手，紧扣不等式的性质所具备的条件判断.

①[解析] 解法1：由已知 $a>b$，$-d>-c$，

所以 $a-d>b-c$(两同向不等式相加)，选D.

解法2：取特殊值，令 $a=2$，$b=1$，$c=-3$，$d=-4$.

A. $5>5$ 不成立；B. $-6>-4$ 不成立；C. $-\frac{1}{2}>-\frac{1}{3}$ 不成立；D. $6>4$ 成立，选D.

②[解析] 解法1：取特殊值，令 $c=-1$，$b=0$，$a=1$ 代入各选项检验知A、B、D成立，C不成立，故选C.

解法2：由题意知 $c<0$，$a>0$，由 $b>c\Rightarrow ab>ac$；

又 $b-a<0\Rightarrow c(b-a)>0$；$ac<0$，$a-c>0\Rightarrow ac(a-c)<0$；$cb^2<ab^2$ 不一定成立，因为当 $b=0$ 时，取等号. 故选C.

[答案] ①D ②C

[评析] 解有关不等式的选择题时，特别是要否定某个结论时，用特殊值代入验证的方法，可避免一些复杂的推理和运算，往往能迅速准确的选出正确答案.

类题3：判断下列命题的真假，并简述理由.

(1) $a>b$，$c>d\Rightarrow a-c>b-d$；

(2) $a>b\Rightarrow\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(3) $a>b$，$c<d$，$cd\neq0\Rightarrow\frac{a}{c}>\frac{b}{d}$；

(4) $|a|>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbf{N},n>1)$；

(5) $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\Rightarrow a>b(n\in\mathbf{N}$ 且 $n>1)$

[分析] 要判断上述命题的真假，依据就是实数的基本性质及实数运算的符号法则，以及不等式的基本性质，经过合理的逻辑推理即可判断. 也可令式中字母取一些特殊值，以检验不等式是否成立.

[解析] (1)不成立，令 $a=5$，$b=4$，$c=3$，$d=1$，有 $a>b$，$c>d$ 但 $a-c<b-d$，故(1)为假命题；

(2)不成立，令 $a=1$，$b=-1$，有 $a>b$，但 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，故(2)为假命题；

(3)不成立，$a>b>0$，$c<0$，$d>0$ 时显然有 $\frac{a}{c}<\frac{b}{d}$，故(3)为假命题；

(4)不成立，$|a|>b>0\Rightarrow|a|^n>b^n$，但 $|a|^n$ 与 a^n 可能相等，也可能互为相反数，故(4)为假命题，如 $a=-2$，$b=1$. $n=3$ 时，$|a|>b>0$，但 $a^3=-8<1=b^3$.

(5)成立，因为，若 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}>0$，则 $a>b$；若 $0>\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$，则 $|\sqrt[n]{b}|>|\sqrt[n]{a}|>0$，从而 $|b|>|a|$，又 $0>\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$

$\therefore a<0$，$b<0$

所以，$-b>-a$，即 $a>b$.

若 $\sqrt[n]{a}$ 与 $\sqrt[n]{b}$ 异号，则一定 $a>0$，$b<0$

$\therefore a>b$

若 $\sqrt[n]{a}$ 与 $\sqrt[n]{b}$ 有一个为零，则一定是 $a=0$，$b<0$ 或 $a>0$，$b<0$

$\therefore a>b$

故 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}\Rightarrow a>b(n\in\mathbf{N}$ 且 $n>1)$，故(5)为真命题.

题型3 利用不等式性质证明

例3 求证：$a>b$，$\frac{1}{a}>\frac{1}{b}\Rightarrow a>0$，$b<0$.

[证明] $\because a>b$，$\therefore a-b>0$，

又 $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}$，$\therefore\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0$，

即 $\frac{b-a}{ab}>0$，而 $b-a<0$，

$\therefore ab<0$，而 $a>b$，$\therefore a>0$，$b<0$.

类题4：已知 a、b、c、d 均为正数，$a>c+d$，$b>c+d$. 求证：$ab>ad+bc$，$ab>ac+bd$.

[证明] $\because a$、b、c、d 均为正数，$a>c+d$，$b>c+d$，

$\therefore a-c>d>0$，$b-d>c>0$，即 $(a-c)(b-d)>cd>0$.

从而 $ab-(ad+bc)=ab-ad-bc+cd-cd=a(b-d)-c(b-d)-cd=(b-d)(a-c)-cd>cd-cd=0$.

$\therefore ab>ad+bc$. 同理 $ab>ac+bd$.

知能巩固提高

一、选择题

1. 若 $a>b>c$，则下列不等式成立的是 ( )

A. $\frac{1}{a-c}>\frac{1}{b-c}$　　B. $\frac{1}{a-c}<\frac{1}{b-c}$

C. $ac>bc$　　D. $ac<bc$

2. 若 $a>b>0$，则下列不等式不成立的是 ( )

A. $a+b>a-b$　　B. $\frac{b}{a}<1$

C. $2^a>2^b$　　D. $(\frac{1}{5})^{a-b}>1$

3. (2005湖北黄冈中学高三第一次月考)若 $a<b$，$d<c$，并且 $(c-a)(c-b)<0$，$(d-a)(d-b)>0$，则 a、b、c、d 的大小关系是 ( )

A. $d<a<c<b$　　B. $a<c<b<d$

C. $a<d<b<c$　　D. $a<d<c<b$

4. (2007年济南市统考)如果 $a\in\mathbf{R}$ 且 $a^2+a<0$，那么 a、a^2、$-a$、$-a^2$ 的大小关系是 ( )

A. $a^2>a>-a^2>-a$　　B. $-a>a^2>-a^2>a$

C. $-a>a^2>a>-a^2$　　D. $a^2>-a>a>a^2$

5. 若$-1<\alpha<\beta<1$,则下列各式中恒成立的是　(　)

A. $-2<\alpha-\beta<0$　　B. $-2<\alpha-\beta<-1$

C. $-1<\alpha-\beta<0$　　D. $-1<\alpha-\beta<1$

二、填空题

6. 若$4<a<8,2<b<3$,则$(a-2b)^2$的取值范围是________.

7. 若$-1<a<b<0$,则$\frac{1}{a},\frac{1}{b},a^2,b^2$从小到大的顺序是________.

8. 设$x>1,-1<y<0$,则$x、y、-y、-xy$按由小到大的顺序是________.

三、解答题

9. 已知$a>b,c<d$,求证$a-c>b-d$.

10. 如果$20<x<27,6\leqslant y\leqslant 18$.求:$x+y,2x-y$的取值范围.

11. 已知二次函数$f(x)=ax^2+bx(a\neq 0)$满足$1\leqslant f(-1)\leqslant 2,3\leqslant f(1)\leqslant 4$,求$f(-2)$的取值范围.

12. 已知$a>b>c>0$,试比较$\lg\frac{a}{b}$与$\lg\frac{c+a}{c+b}$的大小.

6.1 不等式的性质(三)

本课综合评讲

本课内容是整个不等式知识的基础,也是将来高考必考的内容,本课要熟练掌握不等式的性质定理4-5及其推论.会灵活运用这些定理、推论证明一些简单不等式,通过学习,使学生对分类讨论思想有一定的认识,培养学生对数学知识的理解能力,应用能力和论证能力.

不等式性质定理4、5及其推论在高考试题中也是考查的重点,因为它们和其他知识联系密切,属于其他章节和不等式性质的知识的交汇点,故在学习时,应予以重视.

目标瞄向高考

1. 利用不等式的性质化简不等式

例1 (2006年高考·江西·3)若$a>0,b>0$则不等式$-b<\frac{1}{x}<a$等价于　(　)

A. $\frac{1}{b}<x<0$或$0<x<\frac{1}{a}$

B. $-\frac{1}{a}<x<\frac{1}{b}$

C. $x<-\frac{1}{a}$或$x>\frac{1}{b}$

D. $x<-\frac{1}{b}$或$x>\frac{1}{a}$

解析:解法1:当$x>0$时,$a>0,b>0,-b<\frac{1}{x}<a$可变为$-bx<1<ax$