数学竞赛研究教程

苏步青题

单墫/著

凤凰出版传媒集团
江蘇教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

shuxuejingsai
yanjiujiaocheng

下

数学竞赛研究教程

苏步青题

单 墫/著

凤凰出版传媒集团
江苏教育出版社
JIANGSU EDUCATION PUBLISHING HOUSE

shuxuejingsai yanjiujiaocheng

下

目录

CONTENTS

第 25 讲　计　数　（一）

计数的方法大致有以下几种：

(i) 基本方法. 其中包括分情况讨论——加法原理；在每种情况中，逐步递进，先做一件事，再做第二件事，……这就需要乘法原理. 还有，从反面考虑问题：在总数中减去 A 不出现的个数得到 A 出现的个数.

(ii) 应用公式. 包括排列、组合、允许重复的排列、有重复元素的全排列、允许重复的组合、圆周排列等. 这些公式在通常的课本中可以找到.

(iii) 建立递推关系.

(iv) 利用对应.

(v) 利用容斥原理.

(vi) 利用母函数.

竞赛中的计数问题，多半不太困难. 但必须细致地分析，防止出错. 出错的原因可能是漏算了一个部分，也可能是多算(重复计算)了一个部分.

例 1　$2n$ 个人，每两个人一组，有多少种不同的分组方式？

解　先取定一个人，他必须与其余 $2n-1$ 个人中某个人组成一组，这有 $2n-1$ 种方式.

再考虑剩下的 $2n-2$ 个人. 取定一个人，他有 $2n-3$ 种方式与另一个人组成一组.

如此继续下去. 根据乘法原理，答案为 $(2n-1)!!=(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$.

本题也可以由递推关系 $a_n=(2n-1)a_{n-1}$ 而导出结果.

例 2　从 n 个号码 $1, 2, \cdots, n$ 中选出 k 个. 号码允许重复选取，顺序不论。有多少种不同的选法？

解　如果选出的 k 个号码中，i 号有 x_i 个 $(1\leqslant i\leqslant n)$，那么 x_i 都是非负整数，而且 $x_1+x_2+\cdots+x_n=k$. 可以由这种选法产生 $n+k$ 个球的一种排法：

第一个球标上 1，然后排 x_1 个球(不标号). 再排一个球标上 2，然后排 x_2 个球(不标号). ……. 最后，排一个球标上 n，然后排 x_n 个球(不标号).

反之，对排成一列的 $n+k$ 个球，第一个标上 1. 然后，在其余 $n+k-1$ 个球中，选取 $n-1$ 个，依照从左到右的顺序分别标上 $2, 3, \cdots, n$. 这样的选法有 $C_{n+k-1}^{n-1}=C_{n+k-1}^{k}$ 种. 而每一种选法产生的排法显然是上面所说的排法. 两者之间一一对应.

因此，所求的选法有 C_{n+k-1}^{k} 种.

注　这就是允许重复的组合的计算公式.

例 3　6 个系协商组成校足球队，共需 16 名队员，每个系至少出 2 名队员，有多少种不同的组成方式？(同一个系中的人不加区别)

解　每个系先各出 2 名队员，共 12 名队员. 剩下 4 名队员需在 6 个系中选取. 这是

从 n 个元素中选 k 个的允许重复的组合（$n=6$，$k=4$）. 共有 $C_{n+k-1}^{k}=C_{9}^{4}=126$ 种.

例4 在两个单位的围棋擂台赛中，双方各派 7 名队员按事先排好的顺序出场参加打擂. 先由 1 号队员比赛，负者即被淘汰. 胜者再与对方的下一名队员比赛. 如此继续下去，直至有一方队员全被淘汰 . 试求所有可能出现的比赛过程的种数.

解 将 7 个白球与 7 个黑球排成一列有 C_{14}^{7} 种排法.

甲方队员可看成白球，乙方可看成黑球. 最后一个球为白或黑表明胜方为甲或乙. 因此，比赛过程亦有 C_{14}^{7} 种.

例5 m 个同样的黑球与 n 个同样的白球（$m\leqslant n+1$）排成一列，每两个黑球之间至少有一个白球. 问有多少种不同的排法？如果每两个球均不相同呢？

解 前 $m-1$ 个黑球，每个"吃掉"紧跟它的 1 个白球，剩下的 $n-m+1$ 个白球与 m 个黑球排成一列的方法有

$$C_{n+1}^{m}=\frac{(n+1)!}{m!(n-m+1)!} \tag{1}$$

种（可以将(1)理解为从 $n+1$ 个位置中选 m 个放黑球的放法，也可以理解为 $n+1$ 个球中 m 个黑球，$n-m+1$ 个白球的含有重复元素的全排列的个数）. 对于每一种排法，排定后，每个黑球"吐出"一个白球，就产生 m 个黑球与 n 个白球，每两个黑球间至少有一个白球的排法.

因此，在黑球全相同，白球全相同时，答案即(1). 在每两个球均不相同时，还应乘以 m 个黑球的全排列 $m!$ 及 n 个白球的全排列 $n!$，答案为 $\dfrac{(n+1)!n!}{(n-m+1)!}$.

例 5 中的"吃掉"是从集合 $A=\{m$ 个同样黑球，n 个同样白球，每两个黑球不相邻的排列$\}$ 到集合 $B=\{n-m+1$ 个同样白球，m 个同样黑球的排列$\}$ 的对应，而"吐出"则是它的逆对应. 由于 A，B 之间有一一对应"吃掉"，所以 $|A|=|B|$.

这种手法称为对应原理，在计数问题中经常采用. 它将集 A 的计数化为集 B 的计数，使用得当可以化难为易.

例6 8 名女生、20 名男生围成一个圆圈，每两名女生之间至少有 2 名男生. 问有多少种方法围成圆圈？

解法一 先将 8 名女生排好. 由圆圈排列公式，这样的排法有 $7!$ 种.

然后从 20 名男生中选 16 名排成一列，依照这排定的顺序，将 2 名男生插在 1 号女生后面，2 名男生插在 2 号女生后面，依此类推. 这样的排法有 $20\times19\times\cdots\times5$ 种.

每名女生与她前面的那名男生之间的"空隙"里可以插入若干名（小于等于 4）男生，也可以不插. 从 8 个"空隙"里选 4 个的允许重复的组合数为 C_{8+4-1}^{4}，4 名男生的全排列为 $4!$ 所以将最后 4 名男生安排在"空隙"里的方式有 $4!\times C_{11}^{4}$ 种.

因此，所求的种数为 $7!\times20\times19\times\cdots\times5\times4!\times\dfrac{11!}{4!\times7!}=\dfrac{20!\times11!}{4!}$.

解法二 从 20 名男生中选出 4 名，将他们与 8 名女生排在圆圈上，这有 $C_{20}^{4}\times(8+4-1)!$ 种方式.

然后在每名女生后面排两名男生. 这 16 名男生有 $16!$ 种排列方法.

于是，所求的种数为 $C_{20}^{4}\times 11!\times 16!=\dfrac{20!\times 11!}{4!}$.

注 后一种解法中，在女生后面排两名男生，相当于例 5 中，每个黑球“吐出”两个白球.

例7 将正整数 m 写成 n 个正整数的和. 如果加数的位置不同，也认为是不同的写法. 求有多少种不同的写法.（例如 $m=7$，$n=3$ 时，有 15 种写法：$7=5+1+1=1+5+1=1+1+5=4+2+1=4+1+2=2+4+1=2+1+4=1+2+4=1+4+2=3+3+1=3+1+3=1+3+3=3+2+2=2+3+2=2+2+3$）

解 设 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$，其中 $x_i\in\mathbf{N}$ $(1\leqslant i\leqslant n)$，则

$$(x_1-1)+(x_2-1)+\cdots+(x_n-1)=m-n. \tag{2}$$

我们将(2)式左边 n 个加数看做 n 个盒子，右边的 $m-n$ 看做 $m-n$ 个球. 需要将 $m-n$ 个球分配给 n 个盒子. 分配的方式共有 $C_{m+(m-n)-1}^{m-n}=C_{m-1}^{m-n}=C_{m-1}^{n-1}$ 种（即从 n 个盒子中选 $m-n$ 个的、允许重复的组合数）. 这就是本题的答案.

例8 集 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的、不含连续整数的 k 元子集共有 $f(n,\ k)$ 个. 试求 $f(n,\ k)$ 及 $F_n=\sum\limits_{k=0}^{n}f(n,\ k)$.

解 所述 k 元子集中的前 $k-1$ 个数，“吃掉”在 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 中紧跟着它的数，问题就化为从 $n-k+1$ 个数中选出 k 个的种数. 因此 $f(n,\ k)=C_{n-k+1}^{k}$.

显然 $F_1=2$，$F_2=3$.

F_n 就是集 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$ 的、不含连续整数的子集（包括空集）的个数. 这些子集可以分为两类：

第一类不含 n，它们是 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$ 的子集，共有 F_{n-1} 个.

第二类含有 n，因而不含 $n-1$，去掉 n 后，它们都是 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n-2\}$ 的子集，共有 F_{n-2} 个.

因此得到递推公式 $F_{n+1}=F_n+F_{n-1}$. 因此 F_n 就是斐波纳奇数，其通项公式见第 22 讲 $(F_n=u_{n+3})$.

注 亦可由 $f(n,\ k)=f(n-1,\ k)+f(n-2,\ k)$ 得出 F_n 的递推公式.

例9 某国防仓库有 11 名警卫人员. 任何 5 个人都不能把锁全部打开，而任何 6 个人都能把锁全部打开. 问至少有几把锁？钥匙怎样分配？

解 每 5 个人 $i_1,\ i_2,\ \cdots,\ i_5$ 有一把打不开的锁，记为 $L_{i_1i_2i_3i_4i_5}$. 由于每 6 个人均能把锁全部打开，所以 $L_{i_1i_2i_3i_4i_5}$ 互不相同. 因此，至少有 C_{11}^{5} 把锁. 每把锁可记为 $L_{i_1i_2i_3i_4i_5}$，$\{i_1,\ i_2,\ i_3,\ i_4,\ i_5\}$ 是 1, 2, …, 11 的一个 5 元子集. 将 $L_{i_1i_2i_3i_4i_5}$ 的钥匙分给 $i_1,\ i_2,\ i_3$，

i_4, i_5 以外的那 6 个人,则每 5 个人都不能打开全部的锁,而每 6 个人都能打开全部的锁.

例 10 数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n \tag{3}$$

是 1, 2, …, n 的一个排列,并且对每一个 a_i ($1 \leqslant i \leqslant n-1$),都有某个 a_j 等于 a_i+1 或 a_i-1,这里 $j>i$. 求(3)的个数 S_n.

解 在 $n=2$ 时, $S_2=2$. 设 $n>2$. 如果 a_1 为 1 或 n, a_2, …, a_n 均有 S_{n-1} 种. 如果 $a_1 \neq 1$, n,那么 a_1+1 在 a_1 后面, a_1+2 必须在 a_1+1 后面(否则 a_1+1 后面无与它差 1 的数), a_1+3 必须在 a_1+2 后面,…,直至 $a_n>a_1$. 同样理由, a_1-1, a_1-2, …, 依这顺序排在 a_1 后面,直至 $a_n<a_1$. 矛盾! 所以 a_1 必须为 1 或 n,从而

$$S_n = 2S_{n-1}. \tag{4}$$

由递推公式及 $S_2=2$ 立即得到 $S_n=2^{n-1}$.

例 11 数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_n \tag{5}$$

的每一项 $\in \{0, 1, 2, \cdots, k-1\}$,这样的数列称做长为 n 的 k 元序列. 在这种序列中, 0 出现偶数次的与出现奇数次的各有多少?

解 设 0 出现偶数次的有 x_n 个,出现奇数次的有 y_n 个,则

$$x_n + y_n = k^n. \tag{6}$$

在 a_1, a_2, …, a_{n-1} 中含偶数个 0 时,取 $a_n \neq 0$. 否则,取 $a_n=0$. 这就产生长为 n 的、含偶数个 0 的序列. 并且,每个长为 n 的、含偶数个 0 的序列均可这样产生. 所以

$$x_n = (k-1)x_{n-1} + y_{n-1}. \tag{7}$$

由于(在(6)中将 n 换作 $n-1$) $x_{n-1}+y_{n-1}=k^{n-1}$,所以(7)可化为

$$x_n = (k-2)x_{n-2} + k^{n-1}. \tag{8}$$

由递推公式(8)易得(注意 $x_1=k-1$)

$$\begin{aligned} x_n &= k^{n-1}+k^{n-2}(k-2)+\cdots+k(k-2)^{n-2}+(k-1)(k-2)^{n-1} \\ &= \frac{k^n-(k-2)^n}{2}+(k-2)^n = \frac{1}{2}(k^n+(k-2)^n). \end{aligned}$$

从而 $y_n = \dfrac{1}{2}(k^n-(k-2)^n)$.

例 12 将集 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 分拆为三个互不相交的子集 A_1, A_2, A_3 (其中允许有空集),满足:

(i) 若每个子集的元素依递增次序排列,则相邻的元素奇偶性不同.

(ii) 若 A_1, A_2, A_3 均非空,则其中恰有一个集合的最小元素是偶数.

求这种分拆的个数.

解 不考虑 A_1, A_2, A_3 的顺序. 我们可设 $1 \in A_1$, A_2 的最小元小于 A_3 的最

小元. 显然 2 有两种放法: 放入 A_1 或 A_2.

设小于 j 的数均有两种可能的放法,并已放妥. 考虑 j,这时有以下三种情况:

(i) A_2, A_3 均未放元素. j 可放入 A_1 或 A_2,但不能放入 A_3 中.

(ii) A_2 中已有元素,A_3 中还没有元素. j 可放在 $j-1$ 所在的集合,不妨设为 A_2 中. 此外,当初 $j-1$ 还可以放入 A_1 或 A_3 的某一个中,不能放入另一个中. 现在 j 则与之相反,不能放入前一个中,能够放入后一个中.

(iii) A_2, A_3 中均有元素. 与(ii)类似,j 有两种放法.

于是,所求分拆数为 2^{n-1}.

例 13 设 n 为偶数. 从 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中选出 4 个不同的数 a, b, c, d 满足 $a+c=b+d$. 证明共有 $\dfrac{n(n-2)(2n-5)}{24}$ 种不同的选法(a, b, c, d 的顺序不必考虑).

解法一 和 $a+c=s(=b+d)$ 可以取以下值: $5, 6, \cdots, n+1, n+2, \cdots, 2n-3$. 在和 s 取定后,相应的两个最小(大)的加数取自 $\left[\dfrac{s-1}{2}\right]$ 个数中,分别有

$$C_2^2, C_2^2, C_3^2, C_3^2, \cdots, C_{n/2}^2, C_{n/2-1}^2, C_{n/2-1}^2, \cdots, C_2^2, C_2^2$$

种取法. 因此,共有 $4(C_2^2+C_3^2+\cdots+C_{n/2-1}^2)+C_{n/2}^2=4C_{n/2}^3+C_{n/2}^2=\dfrac{n(n-2)(2n-5)}{24}$ 种选取 $\{a, b, c, d\}$ 的方法.

解法二 不妨设 a, b, c, d 中 a 最大. 由于 $a+c=b+d$, 所以 c 最小.

从 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中选出三个数 $a>b>c$ 的方法有 C_n^3 种. 对每一种选法,d 可由 $d=a+c-b$ 确定,但其中 $d=b$,即 $b=\dfrac{a+c}{2}$ 的情况应予排除. 由于这时 a, c 奇偶性相同,它们从 $\dfrac{n}{2}$ 个偶数或 $\dfrac{n}{2}$ 个奇数中选出,共有 $2\times C_{n/2}^2=\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{n}{2}-1\right)$ 种. 因而合乎要求的 a, b, c 共有 $C_n^3-\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{n}{2}-1\right)=\dfrac{1}{12}n(n-2)(2n-5)$ 组. d 也随之确定. 但 b, d 的顺序不予考虑,所以总的选法种数为 $\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{12}n(n-2)(2n-5)=\dfrac{1}{24}n(n-2)(2n-5)$.

例 14 在不大于 1 000 的正整数中,不被 3, 5, 7 中任何一个数整除的数共有多少个?

解 这是应用容斥原理的典型问题.

在 $1, 2, \cdots, m$ 中被 a 整除的有 $\left[\dfrac{m}{a}\right]$ 个,所以答案为 $1\,000-\left[\dfrac{1\,000}{3}\right]-\left[\dfrac{1\,000}{5}\right]-\left[\dfrac{1\,000}{7}\right]+\left[\dfrac{1\,000}{3\times5}\right]+\left[\dfrac{1\,000}{3\times7}\right]+\left[\dfrac{1\,000}{5\times7}\right]-\left[\dfrac{1\,000}{3\times5\times7}\right]=457$(个).

一般地,设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是集合 S 的 n 个子集,则

$$
\begin{aligned}
&|\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \cdots \cap \overline{A}_n| \\
=& |S| - \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |A_i| + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} |A_i \cap A_j| - \cdots \\
&+ (-1)^n |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|.
\end{aligned} \tag{9}
$$

(9)就是容斥原理. 在例 14 中, $S = \{1, 2, \cdots, 1\,000\}$,

$$
\begin{aligned}
&A_1 = \{k \mid k \in S,\ 3 \mid k\},\ A_2 = \{k \mid k \in S,\ 5 \mid k\}, \\
&A_3 = \{k \mid k \in S,\ 7 \mid k\}.
\end{aligned}
$$

用这原理立即得出欧拉函数 $\varphi(n) = \sum (-1)^k \cdot \dfrac{n}{p_1 p_2 \cdots p_k} = n \prod\limits_{p|n} \left(1 - \dfrac{1}{p}\right)$.

例 15 设 m 为一给定的自然数. 集合 $B_h = \left\{\dfrac{k}{m^h - 1} \,\middle|\, k = 1, 2, \cdots, m^h - 1\right\}$. 问 $B_{1\,989}$ 有多少个元素不在任一个 B_h $(h < 1\,989)$ 中?

解 熟知 $(m^h - 1, m^{1\,989} - 1) = m^{(h,\,1\,989)} - 1$. 因此若有 $a \in B_{1\,989} \cap B_h$ $(h < 1\,989)$, 则 $a \in B_{1\,989} \cap B_{(h,\,1\,989)}$. 所以可设 $h \mid 1\,989$.

由于 $1\,989 = 3^2 \times 13 \times 17$, 所以在 B_h $(h < 1\,989)$ 中的元素必在 $B_{3\times 13\times 17}$, $B_{3^2\times 17}$, $B_{3^2\times 13}$ 的某一个中.

由容斥原理, 所求元素个数为

$$
\begin{aligned}
&|\overline{B}_{3\times 13\times 17} \cap \overline{B}_{3^2\times 17} \cap \overline{B}_{3^2\times 13}| \\
=& |B_{1\,989}| - |B_{3\times 13\times 17}| - |B_{3^2\times 17}| - |B_{3^2\times 13}| \\
&+ |B_{3\times 17}| + |B_{3^2}| + |B_{3\times 13}| - |B_3| \\
=& (m^{1\,989} - 1) - (m^{663} - 1) - (m^{153} - 1) - (m^{117} - 1) + \\
&(m^{51} - 1) + (m^9 - 1) + (m^{39} - 1) - (m^3 - 1) \\
=& m^{1\,989} - m^{663} - m^{153} - m^{117} + m^{51} + m^{39} + m^9 - m^3.
\end{aligned}
$$

例 16 在芝诺国, 只有稻草人永远说真话, 政府发言人永远说假话, 其余的人以概率 p 说谎. 稻草人决定退出总统竞选, 并告诉他身边的第一个人, 这个人再告诉他身边的另一个人, 如此继续下去, 直至这链上第 n 个人将决定告诉政府发言人. 发言人在此之前未听到有关的信息. 问在 $n = 19$ 与 20 这两种情况中, 发言人宣布的结果与稻草人的决定相符合的可能性哪一种较大?

解 在竞赛中很少出现概率问题. 即使有, 也都是古典的概型, 其实质仍是计数(至多需要一点概率的定义与基本知识).

设发言人宣布的结果与稻草人决定相符的概率为 Q_n, 不符的概率为 $P_n = 1 - Q_n$, 则有递推关系

$$Q_n = pP_{n-1} + (1 - p)Q_{n-1}, \tag{10}$$

即

$$Q_n = p + (1 - 2p)Q_{n-1}. \tag{11}$$

将 n 换成 $n-1$ 得 $$Q_{n-1}=p+(1-2p)Q_{n-2}. \tag{12}$$

(11), (12) 相减得 $$Q_n-Q_{n-1}=(1-2p)(Q_{n-1}-Q_{n-2}). \tag{13}$$

由于 $Q_0=0$, $Q_1=p$,所以由(13)导出 $Q_n-Q_{n-1}=p(1-2p)^{n-1}$. 于是当 $p\gtreqless 1/2$ 时, $Q_{19}\gtreqless Q_{20}$.

习 题 25

1. 将集合 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 映入 X 的对应 f 满足 $f(f(k))=k(k\in X)$. 这样的(对合)对应有多少个?

2. 从年龄不同的 n 个人中选出两组,第一组 k 人,第二组 h 人 $(n\geqslant k+h)$,使第一组中最年轻的人比第二组中最年长的人年龄还要大. 有多少种选法?

3. 从 $\{11, 12, \cdots, 43\}$ 中选出两个不同的数,它们的和为偶数. 有多少种选法?

4. $m\times n$ 的长方形棋盘由 mn 个单位方格组成. 其中若干个单位方格组成的长方形称为子棋盘. 有多少个子棋盘?

5. 在 $m\times n$ 的棋盘上取两个方格,使它们既不在同一行也不在同一列. 有多少种取法?

6. 从集 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中取两个数,使它们的和大于 n. 如果允许这两个数相等,有多少种取法? 如果不允许两个数相等呢?

7. $\triangle ABC$ 的边 BC, CA, AB 上各有 l, m, n 个分点. 将每个顶点与对边上的分点相连. 如果所有的连线中,每三条都没有在三角形内部的公共点. $\triangle ABC$ 被分成多少个小区域(这个小区域以上述连线的一部分为边界,并且内部没有上述连线穿过).

8. 设 $n\geqslant 15$. 在长为 n 的 k 元序列中,第 10 项 a_{10} 与 a_1, $\cdots$, a_9 中某一个相同的有多少个?

9. 设 k_i $(1\leqslant i\leqslant n)$ 是给定整数,求方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=m$ 的满足 $x_i\geqslant k_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ 的整数解 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的个数 $(m\geqslant k_1+k_2+\cdots+k_n)$.

10. 自然数 $1, 2, \cdots, n$ 依顺时针方向依次放在一个圆周上. 从中选出 r 个,使这圆周上每 k 个相邻的数中至多选出 1 个,问有多少种选法?

11. 手握 $2n$ 根线. 将上端两两连结,下端也两两连结. 如果这 $2n$ 根线恰好被连成一个圈,则称为"吉祥". 问吉祥有多少种连法? 吉祥出现的概率是多少?

12. 将 $1, 2, \cdots, 40$ 排成数列 $\{a_n\}$,使其中第一个大于 a_{20} 的项是 a_{31}. 问这样的数列有多少个?

13. 掷 n 次硬币,无正面连续出现的概率是多少?

14. 从放在一个圆周上的 n 个数中选出一些数,不含在圆周上相邻的有多少种选法?

第26讲 计 数 （二）

计数问题，千姿百态，本讲再补充一些例子.

例1 已知集 X，Y 的元数分别为 n，m，求从 X 到 Y 的满射的个数. 这里的满射是从 X 到 Y 的映射（对应），并且 Y 的每一个元都（至少）是 X 中一个元的象.

解 从 X 到 Y 的映射共 m^n 个（每个 $x\in X$ 的象可为 m 个 $y\in Y$ 中的任一个），其中 y_i 不是象的映射共 $(m-1)^n$ 个，y_{i_1}，y_{i_2} 不是象的映射共 $(m-2)^n$ 个，…，y_{i_1}，…，$y_{i_{m-1}}$ 不是象的映射 1 个. 根据容斥原理，满射的个数为 $m^n-\mathrm{C}_m^1(m-1)^n+\mathrm{C}_m^2(m-2)^n+\cdots+(-1)^k\mathrm{C}_k^m(m-k)^n+\cdots+(-1)^{m-1}\mathrm{C}_m^{m-1}$.

注 当 $n<m$ 时，满射的个数显然为 0. 当 $n=m$ 时，满射就是 n 个 y_i 的全排列，个数为 $n!$. 因此，我们得到欧拉的一个恒等式

$$\sum_k(-1)^k\mathrm{C}_m^k(m-k)^n=\begin{cases}0,\ n<m,\\ n!,\ n=m.\end{cases}\tag{1}$$

这个等式已在第 7 讲（例 14）中证明过，在第 27 讲（例 9）中还将给出第三个证明.

例2 设 n 是正整数. 集合 $\{1,2,\cdots,2n\}$ 的一个排列 $(x_1,x_2,\cdots,x_{2n})$ 中，如果有 $|x_i-x_{i+1}|=n$ 对某个 i $(1\leqslant i\leqslant 2n-1)$ 成立，那么这个排列称为具有性质 P. 证明具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的多.

解 本题是第 30 届国际数学奥林匹克的试题. 标准答案是利用容斥原理解答的，但借助对应解答则更为简单.

设集 A 由不具有性质 P 的排列组成，集 B 由恰有一个 i 使 $|x_i-x_{i+1}|=n$ 的排列组成.

我们称元素 k $(1\leqslant k\leqslant n)$ 与 $k+n$ 为一对伴侣. B 就是恰有一对伴侣相邻的那些排列所成的集. 显然 $|B|$ 小于具有性质 P 的排列的个数 m.

设 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A$，则 x_1 的伴侣不是 x_2. 设 x_k $(k>2)$ 是 x_1 的（唯一的）伴侣，令对应 f 为

$$(x_1,x_2,\cdots,x_n)\rightarrow(x_2,\cdots,x_1,x_k,\cdots,x_n),\tag{2}$$

即将 x_1 移到它的伴侣 x_k 的前一个位置，产生一个新的排列，这个排列当然属于 B. 所以 f 是 A 到 B 的映射.

如果 A 中元素 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$(x_1',x_2',\cdots,x_n')$ 的象相同，那么仅有的一对相邻的伴侣必然相同，其余的元素也逐个相同，所以 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 与 $(x_1',x_2',\cdots,x_n')$ 相同. 即 f 为单射. 从而 $|A|\leqslant|B|<m$.

例3 设 t_n 为互不全等的、边长为整数、周长为 n 的三角形的个数（例如 $t_3=1$）. 证明：

$$t_{2n-1}-t_{2n}=\left[\frac{n}{6}\right]\text{或}\left[\frac{n}{6}\right]+1\quad(n\geqslant 2).\tag{3}$$

解　设集合 $A_n=\{(a, b, c) \mid a \geqslant b \geqslant c > a-b, a+b+c=n, a, b, c \in \mathbf{N}\}$. 如果 $(a, b, c) \in A_{2n}$，那么 $b \leqslant a \leqslant n-1$, $c \geqslant 2$.

令映射 f 为
$$(a, b, c) \rightarrow (a, b, c-1), \tag{4}$$
则 f 是 A_{2n} 到 A_{2n-1} 的映射.

显然 f 是单射，但 f 不是满射. A_{2n-1} 中形如 (a, b, b) 的元素没有原象，其他元素均有原象，所以
$$t_{2n-1}-t_{2n}=s, \tag{5}$$
这里 s 是满足
$$a+2b=2n-1, \tag{6}$$
$$b \leqslant a \leqslant 2b-1 \tag{7}$$
的数组 (a, b, b) 的个数.

由(6)，(7)解得
$$\frac{2n-1}{3} \geqslant b \geqslant \frac{n}{2}. \tag{8}$$
从而 b 的个数为
$$\left[\frac{2n-1}{3}\right]-\left[\frac{n+1}{2}\right]+1. \tag{9}$$
这也就是 s（因为 a 由(6)式唯一确定）. 因此
$$s=\begin{cases}\left[\dfrac{n}{6}\right], & n=6k, 6k+1, 6k+3; \\ \left[\dfrac{n}{6}\right]+1, & n=6k+2, 6k+4, 6k+5.\end{cases}$$
所以(3)成立.

注　t_n 可以算出，参见习题 26 第 11 题.

例 4　元素为非负整数，并且每一行、每一列的和都等于 n 的三阶方阵，有多少个？

解　设矩阵
$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$
满足要求. 由习题 25 第 9 题，满足
$$a_1+b_1+c_1=n \tag{10}$$
的非负整数解 (a_1, b_1, c_1) 共有 C_{n+2}^2 个. 同样，(a_2, b_2, c_2) 也有 C_{n+2}^2 个.

第三行的元素由前两行确定：

$$a_3=n-(a_1+a_2),\ b_3=n-(b_1+b_2),\ c_3=n-(c_1+c_2), \tag{11}$$

但其中可能有负值. 若 $a_3<0$，则 $a_1+a_2\geqslant n+1$,

$$b_1+c_1+b_2+c_2=2n-(a_1+a_2)\leqslant n-1, \tag{12}$$

从而 b_3，c_3 均为正数. 即第三行至多一个元素不符合要求. 由于习题 25 第 9 题方程

$$b_1+c_1+b_2+c_2=n+a_3 \tag{13}$$

的非负整数解为 $C_{n+a_3+3}^3$，所以 a_3 为负值时产生的例外情况共有 $\sum\limits_{a_3=-n}^{-1}C_{n+a_3+3}^3=C_{n+3}^4$.

于是,合乎要求的三阶方阵共 $(C_{n+2}^2)^2-3C_{n+3}^4$ 个.

例5 从 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中选出 k 项的严格递增数列,每相邻两项的差小于等于 m，$m(k-1)<n$，有多少种不同的选法?

解 设第一个数为 x_1+1,第二个数为 $(x_1+1)+(x_2+1)$，…，第 i 个数为 $(x_1+1)+\cdots+(x_i+1)$，…，第 k 个数为 $(x_1+1)+\cdots+(x_k+1)$,其中

$$0\leqslant x_i\leqslant m-1\quad(2\leqslant i\leqslant k). \tag{14}$$

设

$$x_2+x_3+\cdots+x_k=r, \tag{15}$$

则由(15)及

$$(x_1+1)+\cdots+(x_k+1)\leqslant n, \tag{16}$$

得

$$0\leqslant x_1\leqslant n-k-r. \tag{17}$$

因此对确定的 r，x_1 可取 $n-k-r+1$ 个值.

将 $(1+x+\cdots+x^{m-1})^{k-1}$ 展开,并按照 x 的幂集项,则 x^r 的系数 a_r 就是方程(15)的、满足条件(14)的整数解 $(x_2, x_3, \cdots, x_k)$ 的个数,即

$$(1+x+\cdots+x^{m-1})^{k-1}=\sum_{r\geqslant 0}a_r x^r. \tag{18}$$

所求的选法共 $\sum a_r(n-k-r+1)$ 种.

由于

$$\sum a_r(n-k-r+1)=(n-k+1)\sum a_r-\sum ra_r, \tag{19}$$

所以只需求出 $\sum a_r$ 与 $\sum ra_r$.

在(18)中令 $x=1$ 便得

$$\sum a_r=m^{k-1}. \tag{20}$$

为了求出 $\sum ra_r$,我们在(18)中令 $x=1+y$. 这时(18)的右边成为

$$\sum a_r(1+y)^r=\sum a_r(1+ry+C_r^2y^2+\cdots), \tag{21}$$

所以 $\sum ra_r$ 就是(21)中 y 的系数.

另一方面,(18) 的左边成为

$$
\begin{aligned}
&(1+(1+y)+\cdots+(1+y)^{m-1})^{k-1}\\
&=\left(m+\frac{(m-1)m}{2}y+\cdots\right)^{k-1}\\
&=m^{k-1}+m^{k-2}\cdot(k-1)\cdot\frac{(m-1)m}{2}y+\cdots. \qquad (22)
\end{aligned}
$$

比较(21),(22) 即得 $\sum ra_r=\frac{m^{k-1}(m-1)(k-1)}{2}$. (23)

由(19),(20),(23)得本题答案为

$$
\begin{aligned}
&(n-k+1)m^{k-1}-\frac{m^{k-1}(m-1)(k-1)}{2}\\
&=m^{k-1}\cdot\left(n-\frac{1}{2}(k-1)(m+1)\right). \qquad (24)
\end{aligned}
$$

在上面的解法中,我们利用了多项式(18),(21),它的系数与问题的解密切相关,从而通过多项式的运算可以获得答案.这样的多项式就是第 28 讲中的母函数.

注 熟悉微积分的读者可以对(18)求导,然后令 $x=1$ 以求出 $\sum ra_r$. 我们采用代换 $x=1+y$ 是为了避开微积分.两者的功效相当.

例6 一个正三角形砍去头得到一个梯形 $ABCD$(如图 26-1),上底为 k,下底为 n (k, n 都是正整数).将下底等分为 n 份,过各个分点作两腰的平行线.将一腰等分为 $(n-k)$ 份,过各分点作另一腰及底的平行线.这些线将梯形分成许多小的正三角形.问在这梯形内共有多少个正三角形(大小不一定相同).

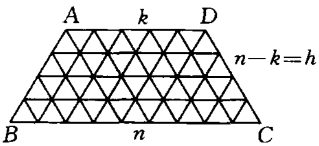

图 26-1

解 设有 a_n 个"尖向上"的正三角形,b_n 个"尖向下"的正三角形.先建立 a_n 的递推公式.

BC 边上有 $n+1$ 个分点,从中选出两个距离小于等于 h $(=n-k)$ 的,它们必可与梯形 $ABCD$ 中另一个点构成正三角形.反之,一边在 BC 上的正三角形均可这样产生.根据上例(在(24)中将 n, m, k 分别换为 $n+1$, h, 2),这种三角形的个数为

$$(n+1)h-\frac{(h+1)h}{2}. \qquad (25)$$

因此,
$$a_n=a_{n-1}+(n+1)h-\frac{(h+1)h}{2}. \qquad (26)$$

又显然 $a_k=0$,所以由(26) 导出

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{i=k}^{n}(i+1)(i-k)-\sum_{i=k}^{n}\frac{(i-k)(i-k+1)}{2}\\
&= \sum_{i=0}^{h}(i+k+1)i-\sum_{i=0}^{k}\frac{i(i+1)}{2}\\
&= \sum_{i=0}^{h}\frac{i(i+1)}{2}+k\sum_{i=0}^{h}i\\
&= \mathrm{C}_{h+2}^{3}+k\mathrm{C}_{h+1}^{2}.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

再建立 b_n 的递推公式. 这有两种情况:

(i) $n\leqslant 2k$. 这时一边在与底平行、长为 i 的线段 EF 上,另一个顶点在 BC 上的正三角形边长为 $n-i$,共有 $2i-n+1$ 个(这三角形左边的顶点可为 E, EF 的第一个分点,…,EF 的第 $2i-n$ 个分点),如图 26-2 所示.

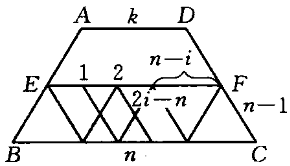

图 26-2

因此,

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_{n-1}+\sum_{i=k}^{n-1}(2i-n+1)\\
&= b_{n-1}+k(n-k).
\end{aligned}
\tag{28}
$$

显然 $b_k=0$,所以由(28) 导出

$$
b_n=k\sum_{j=k}^{n}(j-k)=\frac{k(n-k)(n-k+1)}{2}=k\mathrm{C}_{h+1}^{2}. \tag{29}
$$

(ii) $n>2k$. 这时(28)需改为

$$
\begin{aligned}
b_n &= b_{n-1}+\sum_{i=\left[\frac{n+1}{2}\right]}^{n-1}(2i-n+1)\\
&= b_{n-1}+\left(n-\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)\left[\frac{n+1}{2}\right],
\end{aligned}
$$

即

$$
b_n=b_{n-1}+\left[\frac{n^2}{4}\right]. \tag{30}
$$

由(29), $b_{2k}=k\mathrm{C}_{k+1}^{2}$,所以由(30) 推出

$$
b_n=k\mathrm{C}_{k+1}^{2}+\sum_{j=2k+1}^{n}\left[\frac{j^2}{4}\right]. \tag{31}
$$

当 $n=2t$ 时, $\sum_{j=2k+1}^{n}\left[\frac{j^2}{4}\right]=t^2+t(t-1)+(t-1)^2+(t-1)(t-2)+\cdots+(k+1)k$

$$
\begin{aligned}
&= 2\sum_{j=k+1}^{t}j(j-1)+\sum_{j=k+1}^{t}j\\
&= 4(\mathrm{C}_{t+1}^{3}-\mathrm{C}_{k+1}^{3})+\mathrm{C}_{t+1}^{2}-\mathrm{C}_{k+1}^{2}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

所以由(31)，(32)得 $$b_n = 4C_{t+1}^3 + C_{t+1}^2 - C_{k+1}^3. \tag{33}$$

当 $n = 2t+1$ 时，(33)需增加一项 $t(t+1)$. 综合起来得

$$b_n = 4C_{[n/2]+1}^3 + (2-(-1)^n)C_{[n/2]+1}^2 - C_{k+1}^3. \tag{34}$$

$$\text{本题的答案为 } a_n + b_n = \begin{cases} C_{h+2}^3 + 2kC_{h+1}^2, & \text{若 } n \leqslant 2k, \\ C_{h+2}^3 + kC_{h+1}^2 + 4C_{[n/2]+1}^3 + \\ (2-(-1)^n)C_{[n/2]+1}^2 - C_{k+1}^3, & \text{若 } n > 2k. \end{cases} \tag{35}$$

其中 $h = n-k$.

下面的几道例题与著名的卡塔兰(E. C. Catalan，1814 ～ 1894)数

$$C_n = \frac{1}{n+1}C_{2n}^n \tag{36}$$

有关.

例 7　用在多边形内部互不相交的对角线将凸多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 分为 $n-2$ 个三角形，有多少种分法?

解　设有 a_n 种分法. 如果点 A_1 处不引对角线，那么 A_n，A_1，A_2 组成三角形，凸 $n-1$ 边形 $A_2A_3\cdots A_n$ 有 a_{n-1} 种分法. 如果点 A_1 处引出对角线 A_1A_k，而 A_1 与 A_3，…，A_{k-1} 均不相连，那么在剖分中必有 $\triangle A_1A_2A_k$，$k-1$ 边形 $A_2A_3\cdots A_k$ 有 a_{k-1} 种分法，$n-k+2$ 边形 $A_kA_{k+1}\cdots A_nA_1$ 有 a_{n-k+2} 种分法. 所以

$$a_n = \sum_{k=2}^{n-1} a_k a_{n-k+1}, \tag{37}$$

其中约定 $a_2 = 1$.

显然 $a_3 = 1$. 为了从递推关系(37)导出 a_n 的通项公式，我们采用母函数

$$F(x) = a_2x + a_3x^2 + \cdots + a_nx^{n-1} + \cdots. \tag{38}$$

由于
$$\begin{aligned} F(x)\cdot F(x) &= x^2 + (a_2a_3 + a_3a_2)x^3 + \cdots + \sum_{k=2}^{n-1} a_ka_{n-k+1}x^{n-1} + \cdots \\ &= F(x) - x, \end{aligned} \tag{39}$$

所以 $F(x) = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}$. 由于 $F(0) = 0$，我们取

$$F(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2}. \tag{40}$$

利用二项式定理

$$(1-4x)^{1/2}=1-\sum_{n\geqslant 1}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}(-4x)^n$$
$$=1-\sum_{n\geqslant 1}\frac{2}{n}\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}x^n,$$

得
$$F(x)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\mathrm{C}_{2n-2}^{n-1}x^n. \tag{41}$$

从而
$$a_n=\frac{1}{n-1}\mathrm{C}_{2(n-2)}^{n-2}. \tag{42}$$

即 a_n 为卡塔兰数 C_{n-2}.

不利用母函数也能解决例 7,请参看例 9 后面的注.

例 8 给定两个不同的字 b_1 与 b_2,它们的积有两种:$b_1\times b_2$, $b_2\times b_1$. 给定三个不同的字 b_1, b_2, b_3,有 12 种方式组成它们的积:$b_1\times(b_2\times b_3)$, $(b_1\times b_2)\times b_3$, $b_1\times(b_3\times b_2)$, $(b_1\times b_3)\times b_2$, $b_2\times(b_3\times b_1)$, $(b_2\times b_3)\times b_1$, $b_2\times(b_1\times b_3)$, $(b_2\times b_1)\times b_3$, $b_3\times(b_1\times b_2)$, $(b_3\times b_1)\times b_2$, $b_3\times(b_2\times b_1)$, $(b_3\times b_2)\times b_1$. 有多少种方式可以组成 n 个不同字的积?(我们假定字的乘法中,交换集、结合律均不成立)

解 设所求的方式有 a_n 种,我们证明
$$a_{n+1}=2(2n-1)a_n. \tag{43}$$

事实上,对 n 个字 b_1, …, b_n 的每一个积 t,可以作出两个积:$b_{n+1}\times t$, $t\times b_{n+1}$. 此外,b_{n+1} 也可能在中间的某一步运算出现. 原来运算共 $n-1$ 步,设第 i 步运算是 $(1\leqslant i\leqslant n-1)$
$$t_i\times t_{i+1}, \tag{44}$$
保持其余部分不动,我们将(44)变为
$$(t_i\times b_{n+1})\times t_{i+1},\ (b_{n+1}\times t_i)\times t_{i+1},$$
$$t_i\times(b_{n+1}\times t_{i+1}),\ t_i\times(t_{i+1}\times b_{n+1})$$
中的任何一种,便产生 $n+1$ 个字的积. 例如对于 $(b_1\times b_2)\times b_3$,将 b_4 插入第 2 步运算有 4 种插法 $(i=2,\ t_i=b_1\times b_2,\ t_{i+1}=b_3)$:
$$((b_1\times b_2)\times b_4)\times b_3,\ (b_4\times(b_1\times b_2))\times b_3,$$
$$(b_1\times b_2)\times(b_4\times b_3),\ (b_1\times b_2)\times(b_3\times b_4).$$
对于 $b_1\times(b_2\times b_3)$,将 b_4 插入第 2 步运算也有 4 种插法 $(i=2,\ t_i=b_2,\ t_{i+1}=b_3)$:
$$b_1\times(b_4\times(b_2\times b_3)),\ b_1\times((b_4\times b_2)\times b_3),$$
$$b_1\times((b_2\times b_3)\times b_4),\ b_1\times(b_2\times(b_3\times b_4)).$$
对于每个 i $(1\leqslant i\leqslant n-1)$, b_{n+1} 均有 4 种插法,因此