21

全国成人高等教育规划教材

高等数学

本科使用

第二版　上　册

教育部高等教育司　组编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

V.1

21 全国成人高等教育规划教材

高等数学

本科使用

第二版 上册

教育部高等教育司 组编

主编 李心灿

副主编 蔡燧林 徐 兵

编委（以姓氏笔画为序）

计慕然 刘浩荣 刘 晓

吴 满 杨万禄 张魁元

金桂堂 龚冬保 谢 鹏

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

全书是按照教育部1998年颁布的成人高等教育工科各专业本科高等数学课程教学基本要求编写的。分上下两册出版。上册分6章，主要内容为一元函数微积分；下册6章，包括向量代数与空间解析几何，多元函数微积分，无穷级数，常微分方程，节末有习题，思考题，章末有总复习题。其特点是：内容符合基本要求；例、习题丰富，与正文密切配合；结合成人特点，注意培养应用意识；概念清晰，注重几何直观与物理解释；讲解数学方法，注意归纳、整理、总结，便于读者理解和掌握；附录中还编入了与本书有关的数学家简介。

与此教材配套，还编有高等数学学习辅导书.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.上：成人本科/李心灿主编.—2版.
北京：高等教育出版社，2003.8
ISBN 7-04-011956-0

Ⅰ.高… Ⅱ.李… Ⅲ.高等数学-成人教育：
高等教育-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第037487号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-82028899		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
排　　版	高等教育出版社照排中心		
印　　刷	化学工业出版社印刷厂		
		版　　次	1999年6月第1版
开　　本	850×1168　1/32		2003年8月第2版
印　　张	12.25	印　　次	2003年8月第1次印刷
字　　数	310 000	定　　价	16.80元

策划编辑　徐　可
加工编辑　胡乃冏
封面设计　张　楠
责任绘图　朱　静
版式设计　胡志萍
责任校对　王　雨
责任印制　孔　源

前　言

本书第二版是全国成人高等教育规划教材之一．是编者根据教育部 1998 年颁布的全国成人高等教育本科高等数学课程教学基本要求，在本书第一版经过三年教学实践的基础上修订而成．

“高等数学”是成人高等教育许多专业的一门必修的重要基础理论课，它对提高学员的科学、文化素质，为学员学习后继课程，从事工程技术、经济、管理和科学研究工作，以及进一步获得现代科学知识奠定必要的数学基础．

在这次修订中我们努力体现下述特点：

1．严格按照教学基本要求，遵循成人教育的教学规律，在保证教学质量与普通高等学校“大体一致”的前提下，充分考虑成人教育的特点，以“必需”“够用”为度，加强素质培养．

2．重点突出，难点分散，注重几何直观与物理解释，重视培养学员的几何想象能力、抽象概括能力、逻辑推理能力．

3．为了便于自学，对基本概念、基本理论、基本方法，作了深入浅出的介绍，配备了较多的例题并附有一些解说，以便学员更好地理解、掌握它们的实质，并能将基本方法条理化，以培养学员的运算能力．

4．为了培养学员应用数学的意识、兴趣和能力，教材中编入了较多的应用实例和习题．

5．在附录中，编入了与本书有关的 20 多位数学家的简介．这不但可使读者了解这些数学家的生平、业绩、治学态度、治学方法、品德、风采，向他们学习；而且把定理、公式和名人轶事联系起来，往往使人印象深刻甚至终身难忘．

6．为了辅导学员学习，编写了一本与教材配套的学习辅导

书.该书按照教材章节对应编写,每章内容紧扣教学基本要求和主教材,包括五个部分:教学基本要求;重点;应明确的几个问题;思考题分析;范例解析.有助于使“无疑者须教有疑,有疑者却要无疑”,力图帮助学员理出知识框架和脉络,领会思想,掌握精髓,培养学员分析问题、解决问题的能力,使学习辅导书能成为学员不见面的辅导教师.

本书的第一版和第二版的编写和出版,自始至终都得到了高等教育出版社有关领导的重视,并给予了大力支持和帮助;天津大学齐植兰教授认真审阅了第一版全部书稿,并提出了不少宝贵意见;第一版的责任编辑文小西编审和第二版的责任编辑徐可先生为本书的编辑、出版付出了辛勤的劳动,并提出诸多好建议.在此一并致以诚挚的谢意.

本书是由北京航空航天大学、浙江大学、西安交通大学、同济大学、天津大学、吉林大学、华南理工大学、华中科技大学、北方交通大学、北京西城经济科学技术大学,共10所大学的12位数学教师组成的编委会合作编写的.全书由李心灿任主编,蔡燧林、徐兵任副主编,第二版第一、二章由张魁元执笔,第三章由计慕然执笔,第四章由吴满执笔,第五、六章由金桂堂执笔,第七章由徐兵、刘晓执笔.第八章由杨万禄执笔,第九、十章由龚冬保,徐兵执笔,第十一章由徐兵执笔,第十二章由刘浩荣执笔,附录由李心灿、徐兵编写,书中的大部分插图由谢鹏用计算机绘制,最后由正、副主编修改、统稿、定稿.

书中标有*号的内容不作基本要求.

由于我们水平所限,书中若有不当之处,恳请同仁和读者批评指正.

编　者

2003年春

目　　录

第一章　函　数

高等数学与初等数学区别的主要标志在于前者研究的对象是变量,而后者研究的对象基本上是不变的量.函数关系是变量之间的依赖关系,它是高等数学中最重要的基本概念.本章在复习中学课本有关函数知识的基础上,进一步深入研究函数的性质,分析初等函数的结构.

§1.1　预备知识

一、实数集

人类对于数的认识是逐步发展的.最基本的数是正整数.为了使减法运算能够顺利进行,数的范围扩充到了整数,整数集记作 $\mathbf{Z}$,$\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$.随着人们对客观世界认识的逐步深入,数的范围又扩大到了有理数,有理数集记作 $\mathbf{Q}$,$\mathbf{Q}=\left\{x \mid x=\dfrac{p}{q}, p,q\in\mathbf{Z}, q\neq 0\right\}$.即一个数是有理数,当且仅当它可以写成分数或整数.

一个有理数如果用十进制小数表示,则这个小数或者是有穷的,或者是无限循环的.譬如,$\dfrac{1}{4}=0.25$,$-\dfrac{4}{5}=-0.8$,$\dfrac{22}{7}=3.\dot{1}4285\dot{7}$.反之,有穷小数或无限循环小数都可化为分数,即它们是有理数.

在直线上,给出原点、正方向和长度单位,则称为数轴.每个有理数在数轴上都恰有一个点与之对应.与有理数对应的点叫作有

理点.有理数在数轴上是处处稠密的,即在任意两个有理点之间仍有有理点.事实上,任取 $a,b\in\mathbf{Q}$ 且 $a\neq b$,则 $c=\dfrac{a+b}{2}$ 介于 a,b 之间,且易证 $c\in\mathbf{Q}$.有理数虽然处处稠密,但有理点却未充满整个数轴,如$\sqrt{2}$,圆周率 π,当它们被表示成十进制小数时,既不是有穷的,也不是无限循环的.经计算,$\sqrt{2}=1.414\ 213\ 56\cdots$,$\pi=3.141\ 592\ 65\cdots$.这种无限不循环小数称为无理数.数轴上与无理数对应的点叫做无理点.

有理数与无理数统称为实数,实数集记作 $\mathbf{R}$.本书如无特殊声明,总是在实数集 $\mathbf{R}$ 上讨论问题.实数的全体充满了整个数轴,即实数不但是稠密的,而且是连续的.这样,实数与数轴上的点就成为一一对应的了.为了方便起见,我们经常把实数和它在数轴上对应的点不加区分.实数系统可表示为

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{正分数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}\\\text{无理数}\left.\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\right.\text{(无限不循环小数)}\end{cases}$$

二、实数的绝对值

实数的绝对值是高等数学中经常用到的概念.下面介绍实数的绝对值及其性质.

实数 x 的绝对值记为 $|x|$,其定义为

$$|x|=\begin{cases}x & \text{当}\,x\geqslant 0,\\-x & \text{当}\,x<0.\end{cases}$$

例如,$|2.05|=2.05$,$|-5|=5$,$|0|=0$.从几何意义上来讲,实数 x 的绝对值 $|x|$ 为数轴上点 x 到原点的距离.

实数的绝对值有如下性质：

(1) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,有 $|x|\geqslant 0$. 当且仅当 $x=0$ 时，才有 $|x|=0$.

(2) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,有 $|-x|=|x|$.

(3) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,有 $|x|=\sqrt{x^2}$.

(4) 对于任意的 $x\in\mathbf{R}$,有 $-|x|\leqslant x\leqslant|x|$.

(5) 设 $a>0$,则 $|x|<a$ 的充分必要条件是 $-a<x<a$.

(6) 设 $a\geqslant 0$,则 $|x|\leqslant a$ 的充分必要条件是 $-a\leqslant x\leqslant a$.

(7) 设 $a\geqslant 0$,则 $|x|>a$ 的充分必要条件是 $x<-a$ 或者 $x>a$.

(8) 设 $a\geqslant 0$,则 $|x|\geqslant a$ 的充分必要条件是 $x\leqslant -a$ 或者 $x\geqslant a$.

性质(5)的几何意义是很显然的. 在数轴上 $|x|<a$ 表示所有与原点的距离小于 a 的点 x 构成的集合，而 $-a<x<a$ 表示所有位于点 $-a$ 和点 a 之间的点 x 构成的集合，它们表示的是同一个集合. 性质(6)~(8)可作类似的解释.

由性质(5)可以推得不等式 $|x-A|<a$ 与 $A-a<x<A+a$ 是等价的，其中 A 为实数，a 为正实数.

关于实数四则运算的绝对值，有如下结论. 对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$,恒有

(1) $|x+y|\leqslant|x|+|y|$(三角不等式)；

(2) $|x-y|\geqslant\big||x|-|y|\big|\geqslant|x|-|y|$;

(3) $|xy|=|x||y|$;

(4) $\left|\dfrac{x}{y}\right|=\dfrac{|x|}{|y|}\quad(y\neq 0)$.

三、区间与邻域

区间是高等数学中经常用到的实数集，包括四种有限区间和五种无限区间，它们的名称、记号和定义如下：

闭区间　$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$，

开区间　$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}$，

半开区间　$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$，

$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$，

无限区间　$(a,+\infty)=\{x \mid a<x\}$，

$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\}$，

$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$，

$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$，

$(-\infty,+\infty)=\{x \mid x\in\mathbf{R}\}$.

其中 a,b 为确定的实数，分别称为区间的左端点和右端点．闭区间$[a,b]$，半开区间$[a,b)$及$(a,b]$，开区间(a,b)为有限区间．有限区间右端点 b 与左端点 a 之差 $b-a$ 称为区间长度．$+\infty$与$-\infty$分别读作“正无穷大”与“负无穷大”，它们不表示任何数，仅仅是记号．

区间在数轴上表示如图 1.1.

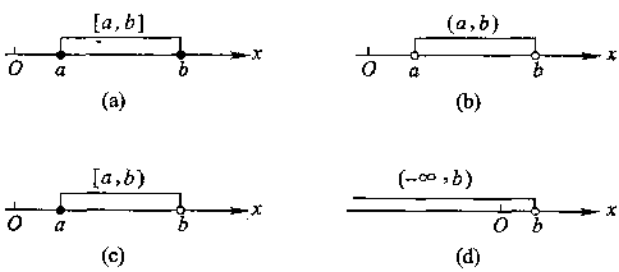

图 1.1

邻域是高等数学中经常用到的概念．称实数集

$$\{x \mid |x-a|<\delta\}$$

为点 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$，a 称为**邻域的中心**，δ 称为**邻域的半径**．由邻域的定义知，

$$U(a,\delta)=(a-\delta,a+\delta)$$

是以 $a-\delta,a+\delta$ 为端点的开区间,区间长度为 2δ,见图 1.2.

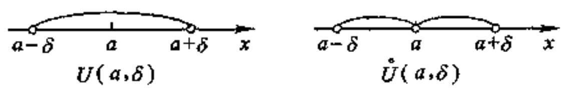

图 1.2

在 $U(a,\delta)$中去掉中心点 a 得到的实数集

$$\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}$$

称为点 a 的**去心 δ 邻域**,记作 $\mathring{U}(a,\delta)$. 显然,去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)$ 是两个开区间$(a-\delta,a)$与$(a,a+\delta)$的并,即

$$\mathring{U}(a,\delta)=(a-\delta,a)\cup(a,a+\delta).$$

如图 1.2 所示.

习题 1.1

用区间表示下列范围:

(1) $x\geqslant 0$;　　(2) $2<x\leqslant 4$;

(3) $|x-2|<\varepsilon$;　　(4) $U(a,\delta)$.

§1.2 函数及其表示法

一、变量与常量

在客观世界中,我们经常要遇到各种各样的量.如果一个量在某过程中是变化的,即可取不同的数值,则称这样的量为**变量**;如果一个量在某过程中保持不变,总取同样的值,则称这样的量为**常量**.

例如,一架客机在从北京飞往杭州的行程中,飞机与北京的水平距离及飞行高度是变量,而机中的乘客数及飞机的长度是常量.

然而当飞机到达杭州机场,在旅客下飞机的过程中,飞机与北京的水平距离及飞机离地面的高度是常量,在机中乘客数为变量.可见变量与常量是相对于某个过程而言.本书中变量用 $x,y,t,\cdots$ 表示,常量用 $a,b,c,\cdots$ 表示.

二、函数的概念

在同一过程中,往往有几个不同的变量在同时变化着.这些变量一般来说不是孤立的,而是互相联系并遵循着一定的变化规律,它们之间存在着内在的联系.本章只讨论两个变量的情况.先看下面的例子.

例 1(自由落体运动) 设物体下落的时间为 t,下落的位移为 s.假定开始下落的时刻为 $t=0$,那么 s 与 t 之间的相依关系由下式给定:

$$s=\frac{1}{2}gt^2,$$

其中 g 是重力加速度.假定物体着地时刻为 $t=T$,那么当时间 t 在闭区间 $[0,T]$ 上任取一值时,由上式就可以确定相应的 s 值.

例 2 一天中气温的变化.图 1.3 记录了北方某城市在夏季的一天中气温 H(℃)随时间 t(h)变化的情况.

通过此图可以了解该市在这一天中任一时刻的气温,也可以观察气温随时间的变化趋势.

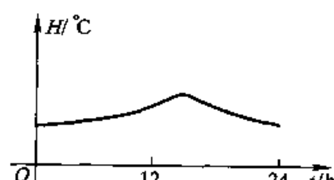

图 1.3

以上二例均表达了两个变量之间的相依关系,当其中的一个变量在某一数集内任意取定一值时,另一变量就依此关系有一确定的值与之对应.两个变量之间的这种关系称为函数关系.

定义 设 x 和 y 是两个变量,X 是实数集 $\mathbf{R}$ 的某个子集.如果对于 X 中的每个 x 值,变量 y 按照一定的规律,总有一个确定

的值 y 与之对应,则称 y 是 x 的**函数**,记作

$$y=f(x).$$

数集 X 称作这个函数的**定义域**. x 称为**自变量**, y 称为**因变量**.

当自变量 x 取数值 $x_0\in X$ 时,与 x_0 对应的因变量 y 的数值称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的函数值,记为 $f(x_0)$,或 $y\Big|_{x=x_0}$. 当 x 遍取 X 的各个数值时,对应的函数值 y 的全体组成的数集称作这个函数的**值域**.

在函数 $y=f(x)$ 中,记号 f 表示自变量 x 与因变量 y 的对应规则,也可以改用其它字母,如 F,φ,f_1,f_2 等. 如果两个函数的**定义域相同**,并且**对应规则**也**相同**(从而值域相同),那么它们就应该用同一个记号来表示.

在实际问题中,函数的定义域是由实际意义确定的. 如例 1 中的定义域为 $[0,T]$,例 2 中的定义域为 $[0,24]$. 在研究由算式表达的函数时,我们约定:函数的定义域就是自变量所能取的使表达式有意义的一切实数值. 例如,函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 的定义域就是 $[-1,1]$,而函数 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 的定义域是 $(-1,1)$.

例 3 求函数 $y=\dfrac{x}{x+2}$ 的定义域.

解 此函数只有当 $x+2\neq 0$ 时,即 $x\neq -2$ 时表达式才有意义. 所以函数的定义域为 $x\neq -2$ 的全体实数,用区间表示为

$$(-\infty,-2)\cup(-2,+\infty).$$

例 4 求函数 $y=\sqrt{16-x^2}+\lg\sin x$ 的定义域.

解 要使函数 y 有定义,当且仅当

$$\begin{cases}16-x^2\geqslant 0,\\ \sin x>0.\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-4\leqslant x\leqslant 4,\\ 2n\pi<x<(2n+1)\pi \quad (n=0,\pm 1,\cdots).\end{cases}$$

这两个不等式的公共解为

$$-4\leqslant x<-\pi \quad 与 \quad 0<x<\pi.$$

所以函数的定义域为$[-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

例 5 求函数 $f(x)=x^2-3x+5$ 在 $x=2, x=x_0+1, x=x_0+h$ 各点处的函数值.

解

$$\begin{aligned} f(2)&=2^2-3\times 2+5=3,\\ f(x_0+1)&=(x_0+1)^2-3(x_0+1)+5\\ &=x_0^2-x_0+3,\\ f(x_0+h)&=(x_0+h)^2-3(x_0+h)+5\\ &=x_0^2+2hx_0+h^2-3x_0-3h+5\\ &=x_0^2+(2h-3)x_0+(h^2-3h+5).\end{aligned}$$

例 6 设有函数 $f(x)=x+1$ 和 $g(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$,它们是否表示同一个函数?

解 因为 $f(x)$的定义域是$(-\infty,+\infty)$,而 $g(x)$的定义域是$(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.虽然当 $x\neq 1$ 时,函数值 $f(x)=g(x)$,但由于这两个函数的定义域不同,因此它们不是同一个函数.

设函数 $y=f(x)$的定义域为 X,对于任意的 $x\in X$,通过函数 $y=f(x)$都可确定平面上的一个点 $M(x,y)$,当 x 遍取定义域 X 中所有值时,点 $M(x,y)$描出的图形(如图 1.4 所示)称为函数 $y=f(x)$的图形.也称函数 $y=f(x)$的图形为曲线 $y=f(x)$.

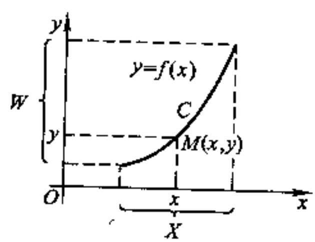

图 1.4

三、函数的表示法

在函数的定义中并没有规定函数的表示方法.为了能很好地研究函数,就应该采用适当的方法把它表示出来.函数表示法通常有三种:表格法、图示法和公式法.

(1) 表格法　把自变量的值依次列成一行,把因变量的对应值写在下面.这样就将函数关系用表格表示出来了.

例 7　由实验观测得到某金属轴在不同温度 T 时的长度 l 如表 1.1 所示:

表 1.1

T/°C	10	20	30	40	50	60
l/m	1.000 12	1.000 24	1.000 35	1.000 48	1.000 61	1.000 72

这样就将该金属轴在不同温度 T 时的长度 l 用表格表示出来了.

大家熟悉的对数表、开方表和三角函数表等都是用表格法表示函数的例子.表格法的优点是利用现成的数据,可以直接查到函数值.用起来方便、简单、省时.但是表中所列数据往往不完全,不能查出函数的任意值.当表格很大时,变量变化的全面情况不易从表上看清楚,不便于进行运算和理论分析.

(2) 图示法　函数 $y=f(x)$的图形(见图 1.4)直观地表达了自变量 x 与因变量 y 之间的关系.图示法的主要优点在于直观性强,函数的主要特性在图上都一目了然.例如,因变量的增减情况及因变量增减的快慢等可以由曲线的升、降及陡、缓表示出来.

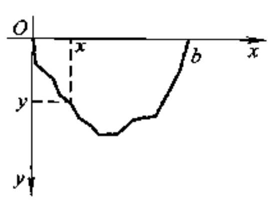

图 1.5

例 8　某河道一个断面的形状如图 1.5 所示.其深度 y 与该断面和岸的交点