



College Mathematics Guidance Series
大学数学学习辅导丛书

□ 浙江大学 盛 骤 谢式千 潘承毅 编

概率论与数理统计 习题全解指南

浙大·第四版



高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

大学数学学习辅导丛书

概率论与数理统计 习题全解指南

浙大·第四版

浙江大学 盛 骤 谢式千 潘承毅 编



高等教育出版社
Higher Education Press

内容提要

本书是浙江大学盛骤等编的《概率论与数理统计》(第四版)的配套辅导书,全书按照主教材的要求和章节顺序进行编排,与主教材习题一致。本书对教材的全部 300 多道题目都给了解答,少数题目是一题多解,有些作了题目分析、解题思路分析和解题方法归纳,并指出易犯的错误,究其原因,澄清不正确的想法。通过本书的学习,可使读者提高分析问题和解决问题的能力,加深对基本内容的理解和掌握。

本书可作为理工科和其他非数学类专业的学生学习概率论与数理统计的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计习题全解指南:浙大·第4版/盛骤,
谢式千,潘承毅编.—北京:高等教育出版社,2008.6

ISBN 978-7-04-023898-3

I. 概… II. ①盛…②谢…③潘… III. ①概率论-高等
学校-解题②数理统计-高等学校-解题 IV. O21-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 062233 号

策划编辑 李蕊 责任编辑 蒋青 封面设计 王凌波 责任绘图 尹莉
版式设计 余杨 责任校对 王雨 责任印制 尤静

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	网上订购	http://www.landaco.com
印 刷	北京泽明印刷有限责任公司		http://www.landaco.com.cn
		畅想教育	http://www.widedu.com
开 本	787×960 1/16	版 次	2008年6月第1版
印 张	18.75	印 次	2008年6月第1次印刷
字 数	350 000	定 价	19.80 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有 侵权必究

物料号 23898-00

前 言

本书是编者所编的《概率论与数理统计》(第四版)(高等教育出版社2008年出版)的习题全解.

本书按教材各章习题顺序编排,与教材的习题一致,少数题目有一题多解.在有些题解中,指出易犯的错误,究其原因,澄清不正确的想法.在有些题解中,指出在解题时应当注意的事项.

通过对本书的参考和学习,可使读者提高分析问题和解题的能力,加深对基本内容的理解和掌握,还会增强对学好本门课程的信心和兴趣.

我们希望读者先自行思考,自己解题,然后与题解进行对照.如果自己不动手去做题而照抄,是无益的.

本书可作为大学理科、工科学生学习概率论与数理统计课程的参考书,可供报考研究生的读者和工程技术人员参考.

本书承浙江大学范大茵教授详细审阅,她提出许多宝贵意见,对此我们表示衷心的感谢.

本书不足之处,诚恳地希望读者批评指正.

盛 骤 谢式千 潘承毅
2008年4月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》，其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

反盗版举报传真：(010) 82086060

E-mail: dd@hep.com.cn

通信地址：北京市西城区德外大街4号

高等教育出版社打击盗版办公室

邮编：100120

购书请拨打电话：(010)58581118

目 录

第一章	概率论的基本概念	(1)
第二章	随机变量及其分布	(27)
第三章	多维随机变量及其分布	(52)
第四章	随机变量的数字特征	(87)
第五章	大数定律及中心极限定理	(117)
第六章	样本及抽样分布	(127)
第七章	参数估计	(134)
第八章	假设检验	(157)
第九章	方差分析及回归分析	(181)
第十二章	随机过程及其统计描述	(204)
第十三章	马尔可夫链	(212)
第十四章	平稳随机过程	(223)
第十五章	选做习题	(236)

第一章 概率论的基本概念

1. 写出下列随机试验的样本空间 S :

(1) 记录一个班一次数学考试的平均分数(设以百分制记分).

(2) 生产产品直到有 10 件正品为止,记录生产产品的总件数.

(3) 对某工厂出厂的产品进行检查,合格的记上“正品”,不合格的记上“次品”,如连续查出了 2 件次品就停止检查,或检查了 4 件产品就停止检查,记录检查的结果.

(4) 在单位圆内任意取一点,记录它的坐标.

解 (1) 以 n 表示该班的学生数,总成绩的可能取值为 $0, 1, 2, 3, \dots, 100n$, 所以试验的样本空间为

$$S = \left\{ \frac{i}{n} \mid i = 0, 1, 2, \dots, 100n \right\}.$$

(2) 设在生产第 10 件正品前共生产了 k 件不合格品,样本空间为 $S = \{10 + k \mid k = 0, 1, 2, \dots\}$ 或写成 $S = \{10, 11, 12, \dots\}$.

(3) 采用 0 表示检查到一件次品,以 1 表示检查到一件正品,例如 0110 表示第一次与第四次检查到次品,而第二次与第三次检查到的是正品,样本空间可表示为

$$S = \{00, 100, 0100, 0101, 0110, 1100, 1010, 1011, 0111, 1101, 1110, 1111\}.$$

(4) 取一直角坐标系,则有 $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$, 若取极坐标系,则有 $S = \{(\rho, \theta) \mid \rho < 1, 0 \leq \theta < 2\pi\}$.

2. 设 A, B, C 为三个事件,用 A, B, C 的运算关系表示下列各事件:

(1) A 发生, B 与 C 不发生.

(2) A 与 B 都发生,而 C 不发生.

(3) A, B, C 中至少有一个发生.

(4) A, B, C 都发生.

(5) A, B, C 都不发生.

(6) A, B, C 中不多于一个发生.

(7) A, B, C 中不多于两个发生.

(8) A, B, C 中至少有两个发生.

解 以下分别用 $D_i (i = 1, 2, \dots, 8)$ 表示(1), (2), \dots , (8)中所给出的事件. 注意到一个事件不发生即为它的对立事件发生,例如事件 A 不发生即为 \bar{A}

发生.

(1) A 发生, B 与 C 不发生, 表示 A, \bar{B}, \bar{C} 同时发生, 故 $D_1 = A\bar{B}\bar{C}$ 或写成 $D_1 = A - B - C$.

(2) A 与 B 都发生而 C 不发生, 表示 A, B, \bar{C} 同时发生, 故 $D_2 = AB\bar{C}$ 或写成 $D_2 = AB - C$.

(3) 由和事件的含义知, 事件 $A \cup B \cup C$ 即表示 A, B, C 中至少有一个发生, 故 $D_3 = A \cup B \cup C$.

也可以这样考虑: 事件“ A, B, C 至少有一个发生”是事件“ A, B, C 都不发生”的对立事件, 因此, $D_3 = \overline{A\bar{B}\bar{C}}$.

也可以这样考虑: 事件“ A, B, C 中至少有一个发生”表示三个事件中恰有一个发生或恰有两个发生或三个事件都发生, 因此, D_3 又可写成

$$D_3 = A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup ABC.$$

$$(4) D_4 = ABC.$$

$$(5) D_5 = \bar{A}\bar{B}\bar{C}.$$

(6) “ A, B, C 中不多于一个发生”表示 A, B, C 都不发生或 A, B, C 中恰有一个发生, 因此, $D_6 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}BC$.

又“ A, B, C 中不多于一个发生”表示“ A, B, C 中至少有两个不发生”, 亦即 $\bar{A}\bar{B}, \bar{B}\bar{C}, \bar{A}\bar{C}$ 中至少有一个发生, 因此又有 $D_6 = \bar{A}\bar{B} \cup \bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}\bar{C}$.

又“ A, B, C 中不多于一个发生”是事件 $G = “A, B, C$ 中至少有两个发生”的对立事件. 而事件 G 可写成 $G = AB \cup BC \cup CA$, 因此又可将 D_6 写成

$$D_6 = \overline{AB \cup BC \cup CA} = \overline{AB} \cap \overline{BC} \cap \overline{CA}.$$

(7) “ A, B, C 中不多于两个发生”表示 A, B, C 都不发生或 A, B, C 中恰有一个发生或 A, B, C 中恰有两个发生. 因此, $D_7 = \bar{A}\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}\bar{B}C \cup \bar{A}BC \cup A\bar{B}\bar{C} \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}BC$. 又“ A, B, C 中不多于两个发生”表示 A, B, C 中至少有一个不发生, 亦即 $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ 中至少有一个发生, 即有 $D_7 = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$.

又“ A, B, C 中不多于两个发生”是事件“ A, B, C 三个都发生”的对立事件, 因此又有 $D_7 = \overline{ABC}$.

$$(8) D_8 = AB \cup BC \cup CA, \text{ 也可写成 } D_8 = ABC \cup \bar{A}BC \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \bar{A}B\bar{C}.$$

注意: (i) 两事件的差可用对立事件来表示, 例如 $A - B = A\bar{B}$, $A - BC = A\bar{B}\bar{C}$.

(ii) 易犯的错误的是, 误将 \overline{AB} 与 $\bar{A}\bar{B}$ 等同起来, 事实上, $\overline{AB} = \bar{A} \cup \bar{B} \neq \bar{A}\bar{B}$, 又如 $\overline{ABC} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C} \neq \bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

(iii) 误以为 $S = A \cup B \cup C$, 事实上, $S - A \cup B \cup C$ 可能不等于 \emptyset , 一般 $S \supset A \cup B \cup C$.

3. (1) 设 A, B, C 是三个事件, 且 $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{4}$, $P(AB) = P(BC) = 0$, $P(AC) = \frac{1}{8}$, 求 A, B, C 至少有一个发生的概率.

(2) 已知 $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(C) = \frac{1}{5}$, $P(AB) = \frac{1}{10}$, $P(AC) = \frac{1}{15}$, $P(BC) = \frac{1}{20}$, $P(ABC) = \frac{1}{30}$, 求 $A \cup B, \bar{A}\bar{B}, A \cup B \cup C, \bar{A}\bar{B}\bar{C}, \bar{A}\bar{B}C, \bar{A}B\bar{C}, \bar{A}B\bar{C}$ 的概率.

(3) 已知 $P(A) = \frac{1}{2}$, (i) 若 A, B 互不相容, 求 $P(A\bar{B})$, (ii) 若 $P(AB) = \frac{1}{8}$, 求 $P(A\bar{B})$.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad & P(A \cup B \cup C) \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC) \\ &= \frac{5}{8} + P(ABC). \end{aligned}$$

由 $ABC \subset AB$, 已知 $P(AB) = 0$, 故 $0 \leq P(ABC) \leq P(AB) = 0$, 得 $P(ABC) = 0$. 所求概率为 $P(A \cup B \cup C) = \frac{5}{8}$.

$$(2) \quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{10} = \frac{11}{15}.$$

$$P(\bar{A}\bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B) = \frac{4}{15}.$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{15} - \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{51}{60} = \frac{17}{20}. \end{aligned}$$

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\overline{A \cup B \cup C}) = 1 - P(A \cup B \cup C) = \frac{3}{20}.$$

$$\begin{aligned} P(\bar{A}\bar{B}C) &= P(\bar{A}\bar{B}(S - \bar{C})) = P(\bar{A}\bar{B} - \bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A}\bar{B}) - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) \\ &= \frac{4}{15} - \frac{3}{20} = \frac{16 - 9}{60} = \frac{7}{60}. \end{aligned}$$

记 $p = P(\bar{A}\bar{B}C)$, 由加法公式

$$p = P(\bar{A}\bar{B}) + P(C) - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = \frac{4}{15} + \frac{1}{5} - \frac{3}{20} = \frac{7}{20}.$$

$$(3) \quad (i) \quad P(A\bar{B}) = P(A(S - B)) = P(A - AB) = P(A) - P(AB) = \frac{1}{2}.$$

$$(ii) \quad P(A\bar{B}) = P(A(S - B)) = P(A - AB) = P(A) - P(AB)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

4. 设 A, B 是两个事件

(1) 已知 $A\bar{B} = \bar{A}B$, 验证 $A = B$.

(2) 验证事件 A 和事件 B 恰有一个发生的概率为 $P(A) + P(B) - 2P(AB)$.

解 (1) 假设 $A\bar{B} = \bar{A}B$, 故有 $(A\bar{B}) \cup (AB) = (\bar{A}B) \cup (AB)$, 从而 $A(\bar{B} \cup B) = (\bar{A} \cup A)B$, 即 $AS = SB$, 故有 $A = B$.

(2) A, B 恰好有一个发生的事件为 $A\bar{B} \cup \bar{A}B$, 其概率为

$$\begin{aligned} P(A\bar{B} \cup \bar{A}B) &= P(A\bar{B}) + P(\bar{A}B) = P(A(S-B)) + P(B(S-A)) \\ &= P(A-AB) + P(B-AB) = P(A) + P(B) - 2P(AB). \end{aligned}$$

5. 10 片药片中有 5 片是安慰剂.

(1) 从中任意抽取 5 片, 求其中至少有 2 片是安慰剂的概率.

(2) 从中每次取一片, 作不放回抽样, 求前 3 次都取到安慰剂的概率.

解 (1) $p = 1 - P(\text{取到的 5 片药片均不是安慰剂})$

$- P(\text{取到的 5 片药片中只有 1 片是安慰剂})$

$$= 1 - \binom{5}{0} \binom{10-5}{5} / \binom{10}{5} - \binom{5}{1} \binom{10-5}{4} / \binom{10}{5} = \frac{113}{126}.$$

$$(2) p = \frac{5}{10} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8} = \frac{1}{12}.$$

6. 在房间里有 10 个人, 分别佩戴从 1 号到 10 号的纪念章, 任选 3 人记录其纪念章的号码.

(1) 求最小号码为 5 的概率.

(2) 求最大号码为 5 的概率.

解 E : 在房间里任选 3 人, 记录其佩戴的纪念章的号码. 10 人中任选 3 人共有 $\binom{10}{3} = 120$ 种选法, 此即为样本点的总数. 以 A 记事件“最小的号码为 5”, 以 B 记事件“最大的号码为 5”.

(1) 因选到的最小号码为 5, 则其中一个号码为 5 且其余两个号码都大于 5, 它们可从 6~10 这 5 个数中选取, 故 $N(A) = \binom{5}{2}$, 从而

$$P(A) = N(A)/N(S) = \binom{5}{2} / \binom{10}{3} = \frac{1}{12}.$$

(2) 同理, $N(B) = \binom{4}{2}$, 故

$$P(B) = N(B)/N(S) = \binom{4}{2} / \binom{10}{3} = \frac{1}{20}.$$

7. 某油漆公司发出 17 桶油漆, 其中白漆 10 桶、黑漆 4 桶、红漆 3 桶, 在搬运中所有标签脱落, 交货人随意将这些油漆发给顾客. 问一个订货为 4 桶白漆、3 桶黑漆和 2 桶红漆的顾客, 能按所订颜色如数得到订货的概率是多少?

解 E : 在 17 桶油漆中任取 9 桶给顾客. 以 A 表示事件“顾客取到 4 桶白漆、3 桶黑漆与 2 桶红漆”, 则有 $N(S) = \binom{17}{9}$, $N(A) = \binom{10}{4} \binom{4}{3} \binom{3}{2}$, 故

$$P(A) = N(A)/N(S) = \binom{10}{4} \binom{4}{3} \binom{3}{2} / \binom{17}{9} = \frac{252}{2431}.$$

8. 在 1 500 件产品中有 400 件次品、1 100 件正品. 任取 200 件.

(1) 求恰有 90 件次品的概率.

(2) 求至少有 2 件次品的概率.

解 E : 从 1 500 件产品中任取 200 件产品. 以 A 表示事件“恰有 90 件次品”, 以 B_i 表示事件“恰有 i 件次品”, $i=0, 1$, 以 C 表示事件“至少有 2 件次品”.

$$(1) N(S) = \binom{1500}{200},$$

$$N(A) = \binom{400}{90} \binom{1100}{200-90} = \binom{400}{90} \binom{1100}{110},$$

故
$$P(A) = N(A)/N(S) = \binom{400}{90} \binom{1100}{110} / \binom{1500}{200}.$$

(2) $C = S - B_0 - B_1$, 其中, B_0, B_1 互不相容, 所以

$$P(C) = P(S - B_0 - B_1) = P(S - [B_0 \cup B_1]) \\ = 1 - P(B_0 \cup B_1) = 1 - P(B_0) - P(B_1).$$

因

$$N(B_0) = \binom{1100}{200}, \quad N(B_1) = \binom{400}{1} \binom{1100}{199},$$

故

$$P(B_0) = \binom{1100}{200} / \binom{1500}{200}, \quad P(B_1) = \binom{400}{1} \binom{1100}{199} / \binom{1500}{200},$$

因此有

$$P(C) = 1 - \binom{1100}{200} / \binom{1500}{200} - \binom{400}{1} \binom{1100}{199} / \binom{1500}{200} \\ = 1 - \left[\binom{1100}{200} + \binom{400}{1} \binom{1100}{199} \right] / \binom{1500}{200}.$$

9. 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只, 问这 4 只鞋子中至少有两只配成一双的概率是多少?

解 E : 从 5 双不同的鞋子中任取 4 只. 以 A 表示事件“所取 4 只鞋子中至少有两只配成一双鞋子”, 则 \bar{A} 表示事件“所取 4 只鞋子无配对”. 先计算 $P(\bar{A})$ 较为简便. 以下按 $N(\bar{A})$ 的不同求法, 列出本题的 3 种解法, 另外还给出一种直接求 $P(A)$ 的解法.

解法(i) 考虑 4 只鞋子是有次序一只一只取出的. 自 5 双(10 只)鞋子中任取 4 只共有 $10 \times 9 \times 8 \times 7$ 种取法, $N(S) = 10 \times 9 \times 8 \times 7$. 现在来求 $N(\bar{A})$. 第一只可以任意取, 共有 10 种取法, 第二只只能在剩下的 9 只中且除去与已取的第一只配对的 8 只鞋子中任取一只, 共 8 种取法. 同理第三只、第四只各有 6 种、4 种取法, 从而 $N(\bar{A}) = 10 \times 8 \times 6 \times 4$. 故

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - N(\bar{A})/N(S) \\ = 1 - \frac{10 \times 8 \times 6 \times 4}{10 \times 9 \times 8 \times 7} = \frac{13}{21}.$$

解法(ii) 从 10 只鞋子中任取 4 只, 共有 $\binom{10}{4}$ 种取法, 即 $N(S) = \binom{10}{4}$. 为求 $N(\bar{A})$, 先从 5 双鞋子中任取 4 双共有 $\binom{5}{4}$ 种取法, 再自取出的每双鞋子中各取 1 只(在一双中取一只共有 2 种取法), 共有 2^4 种取法, 即 $N(\bar{A}) = \binom{5}{4} 2^4$. 故

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{\binom{5}{4} 2^4}{\binom{10}{4}} = \frac{13}{21}.$$

解法(iii) 现在来求 $N(\bar{A})$. 先从 5 只左脚鞋子中任取 k 只($k=0, 1, 2, 3, 4$), 有 $\binom{5}{k}$ 种取法, 而剩下的 $4-k$ 只鞋子只能从(不能与上述所取的配对的)5- k 只右脚鞋子中选取, 即对于每个固定的 k , 有 $\binom{5}{k} \binom{5-k}{4-k}$ 种取法. 故

$$N(\bar{A}) = \sum_{k=0}^4 \binom{5}{k} \binom{5-k}{4-k} = 80.$$

故

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - N(\bar{A})/N(S) = 1 - \frac{80}{\binom{10}{4}} = \frac{13}{21}.$$

解法(iv) 以 A_i 表示事件“所取 4 只鞋子中恰能配成 i 双”($i=1, 2$), 则 $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 A_2 = \emptyset$, 故 $P(A) = P(A_1) + P(A_2)$. 因 A_2 为 4 只恰能配成 2 双,

它可直接从 5 双鞋子中成双地取得,故 $N(A_2) = \binom{5}{2}$. $N(A_1)$ 的算法是:先从 5 双中取 1 双,共有 $\binom{5}{1}$ 种取法,另外两只能从其他 8 只中取,共有 $\binom{8}{2}$ 种取法,不过这种取法中将成双的也算在内了,应去掉.从而

$$N(A_1) = \binom{5}{1} \left[\binom{8}{2} - \binom{4}{1} \right] = 120.$$

$N(S)$ 仍为解法(ii)中的 $\binom{10}{4} = 210$ 种,故

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(A_2) = \frac{N(A_1)}{N(S)} + \frac{N(A_2)}{N(S)} \\ &= \frac{120 + 10}{210} = \frac{13}{21}. \end{aligned}$$

例 10. 在 11 张卡片上分别写上 probability 这 11 个字母,从中任意连抽 7 张,求其排列结果为 ability 的概率.

解法(i) E : 自 11 个字母中随机地接连抽 7 个字母并依次排列. 将 11 个字母中的两个 b 看成是可分辨的,两个 i 也看成是可分辨的, $N(S) = A_{11}^7$. 以 A 记事件“排列结果为 ability”,则 $N(A) = 4$ (因 b 有两种取法, i 也有两种取法), 因而

$$P(A) = N(A)/N(S) = \frac{4}{A_{11}^7} = 2.4 \times 10^{-6}.$$

解法(ii) 本题也可利用乘法定理来计算. 以 $A_1, B_2, I_3, L_4, I_5, T_6, Y_7$ 依次表示取得字母 a, b, i, l, i, t, y 各事件, 则所求概率为

$$\begin{aligned} P(A_1 B_2 I_3 L_4 I_5 T_6 Y_7) &= P(A_1) P(B_2 | A_1) P(I_3 | A_1 B_2) \\ &\quad \times P(L_4 | A_1 B_2 I_3) P(I_5 | A_1 B_2 I_3 L_4) \\ &\quad \times P(T_6 | A_1 B_2 I_3 L_4 I_5) P(Y_7 | A_1 B_2 I_3 L_4 I_5 T_6) \\ &= \frac{1}{11} \cdot \frac{2}{10} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{A_{11}^7}. \end{aligned}$$

注意,在解法(i)中仅当将两个 i 看成是可以区分的,两个 b 看成是可以区分的,才属于古典概型问题.

11. 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去,求杯子中球的最大个数分别为 1, 2, 3 的概率.

解 E : 将 3 只球随机地放入 4 个杯子中去. 易知共有 4^3 种放置法. 以 A_i 表示事件“杯子中球的最大个数为 i ”, $i=1, 2, 3$.

A_3 只有当 3 只球放在同一杯子中时才能发生,有 4 个杯子可以任意选择,

于是 $N(A_3) = \binom{4}{1}$, 故

$$P(A_3) = N(A_3)/N(S) = \binom{4}{1}/4^3 = \frac{1}{16}.$$

A_1 只有当每个杯子最多放一只球时才能发生. 因而 $N(A_1) = 4 \cdot 3 \cdot 2 = A_4^3$, 故

$$P(A_1) = N(A_1)/N(S) = A_4^3/4^3 = \frac{3}{8}.$$

又 $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = S$, 且 $A_i A_j = \emptyset$ ($i \neq j$), 故 $P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 1$, 从而

$$P(A_2) = 1 - \frac{1}{16} - \frac{3}{8} = \frac{9}{16}.$$

12. 50 只铆钉随机地取来用在 10 个部件上, 其中有 3 只铆钉强度太弱. 每个部件用 3 只铆钉. 若将 3 只强度太弱的铆钉都装在一个部件上, 则这个部件强度就太弱. 问发生一个部件强度太弱的概率是多少?

解 将部件自 1 到 10 编号. E : 随机地取铆钉, 使各部件都装 3 只铆钉. 以 A_i 表示事件“第 i 号部件强度太弱”. 由题设, 仅当 3 只强度太弱的铆钉同时装在第 i 号部件上, A_i 才能发生. 由于从 50 只铆钉中任取 3 只装在第 i 号部件上共有 $\binom{50}{3}$ 种取法, 强度太弱的铆钉仅有 3 只, 它们都装在第 i 号部件上, 只有

$\binom{3}{3} = 1$ 种取法, 故

$$P(A_i) = 1/\binom{50}{3} = \frac{1}{19\,600}, \quad i = 1, 2, \dots, 10,$$

且知 A_1, A_2, \dots, A_{10} 两两互不相容, 因此, 10 个部件中有一个强度太弱的概率为

$$\begin{aligned} p &= P\{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{10}\} \\ &= P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_{10}) \\ &= \frac{10}{19\,600} = \frac{1}{1\,960}. \end{aligned}$$

13. 一俱乐部有 5 名一年级学生, 2 名二年级学生, 3 名三年级学生, 2 名四年级学生.

(1) 在其中任选 4 名学生, 求一、二、三、四年级的学生各一名的概率.

(2) 在其中任选 5 名学生, 求一、二、三、四年级的学生均包含在内的概率.

解 (1) 共有 $5+2+3+2=12$ 名学生, 在其中任选 4 名共有 $\binom{12}{4} = 495$ 种

选法,其中每年级各选1名的选法有 $\binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1}=60$ 种选法,因此,所求概

率为 $p=\frac{60}{495}=\frac{4}{33}$.

(2) 在12名学生中任选5名的选法共有 $\binom{12}{5}=792$ 种. 在每个年级中有一

个年级取2名,而其他3个年级各取1名的取法共有

$$\binom{5}{2}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{5}{1}\binom{2}{2}\binom{3}{1}\binom{2}{1} + \binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{2}\binom{2}{1} + \binom{5}{1}\binom{2}{1}\binom{3}{1}\binom{2}{2} = 240(\text{种}).$$

于是所求的概率为

$$p = \frac{240}{792} = \frac{10}{33}.$$

14. (1) 已知 $P(\bar{A})=0.3, P(B)=0.4, P(AB)=0.5$, 求条件概率 $P(B|A \cup \bar{B})$.

(2) 已知 $P(A)=\frac{1}{4}, P(B|A)=\frac{1}{3}, P(A|B)=\frac{1}{2}$, 试求 $P(A \cup B)$.

$$\begin{aligned} \text{解 (1)} \quad P(B|A \cup \bar{B}) &= \frac{P(B(A \cup \bar{B}))}{P(A \cup \bar{B})} \\ &= \frac{P(AB)}{P(A) + P(\bar{B}) - P(AB)}. \end{aligned}$$

由题设得 $P(A)=1-P(\bar{A})=0.7, P(\bar{B})=1-P(B)=0.6, P(AB)=P(A(S-\bar{B}))=P(A)-P(A\bar{B})=0.2$, 故

$$P(B|A \cup \bar{B}) = \frac{0.2}{0.7+0.6-0.5} = 0.25.$$

$$(2) \quad P(AB) = P(B|A)P(A) = \frac{1}{12},$$

$$P(B) = P(AB)/P(A|B) = \frac{1/12}{1/2} = \frac{1}{6},$$

故

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(AB) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

15. 掷两颗骰子, 已知两颗骰子点数之和为7, 求其中有一颗为1点的概率(用两种方法).

解 E: 掷两颗骰子, 观察其出现之点数. 以A记事件“两骰子点数之和为7”, 以B记事件“两颗骰子中有一颗出现1点”.

解法(i) 按条件概率的定义式: $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$ 来求条件概率. 设想两颗骰子是可分辨的, 样本空间为

$$S = \{(1,1), (1,2), \dots, (1,6), (2,1), (2,2), \dots, (2,6), \dots, (6,6)\},$$

$$A = \{(1,6), (2,5), (3,4), (4,3), (5,2), (6,1)\},$$

$AB = \{(1,6), (6,1)\}$. 现在 $N(S) = 36, N(A) = 6, N(AB) = 2$, 因此

$$P(B|A) = \frac{2/36}{6/36} = \frac{1}{3}.$$

解法(ii) 按条件概率的含义来求 $P(B|A)$. 样本空间原有 36 个样本点, 现在知道了“ A 已经发生”这一信息, 根据这一信息, 不在 A 中的样本点就不可能出现了, 因而试验所有可能结果所成的集合就是 A , 而 A 中共有 6 个可能结果, 其中只有两个结果 $(1,6)$ 和 $(6,1)$ 有一颗骰子出现 1 点, 因此

$$P(B|A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

16. 据以往资料表明, 某一 3 口之家, 患某种传染病的概率有以下规律:

$$P\{\text{孩子得病}\} = 0.6, P\{\text{母亲得病} | \text{孩子得病}\} = 0.5,$$

$$P\{\text{父亲得病} | \text{母亲及孩子得病}\} = 0.4,$$

求母亲及孩子得病但父亲未得病的概率.

解 以 A 记事件“孩子得病”, 以 B 记事件“母亲得病”, 以 C 记事件“父亲得病”, 按题意需要求 $P(ABC\bar{C})$. 已知 $P(A) = 0.6, P(B|A) = 0.5, P(C|BA) = 0.4$, 由乘法定理得

$$\begin{aligned} P(ABC\bar{C}) &= P(\bar{C}BA) = P(\bar{C}|BA)P(BA) \\ &= P(\bar{C}|BA)P(B|A)P(A) \\ &= (1 - P(C|BA))P(B|A)P(A) \\ &= 0.6 \times 0.5 \times 0.6 = 0.18. \end{aligned}$$

17. 已知在 10 件产品中有 2 件次品, 在其中取两次, 每次任取一件, 作不放回抽样. 求下列事件的概率:

- (1) 两件都是正品;
- (2) 两件都是次品;
- (3) 一件是正品, 一件是次品;
- (4) 第二次取出的是次品.

解 E : 在 10 件产品中(其中有 2 件次品)任取两次, 每次取 1 件, 作不放回抽样. 以 $A_i (i=1, 2)$ 表示事件“第 i 次取出的是正品”. 因为是不放回抽样, 所以

$$(1) P(A_1A_2) = P(A_2|A_1)P(A_1) = \frac{7}{9} \times \frac{8}{10} = \frac{28}{45}.$$

$$(2) P(\bar{A}_1\bar{A}_2) = P(\bar{A}_2|\bar{A}_1)P(\bar{A}_1) = \frac{1}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{45}.$$

$$\begin{aligned}
 (3) \quad & P(A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1A_2) \\
 &= P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1A_2) \quad (\text{因 } (A_1\bar{A}_2)(\bar{A}_1A_2) = \emptyset) \\
 &= P(\bar{A}_2 | A_1)P(A_1) + P(A_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_1) \\
 &= \frac{2}{9} \times \frac{8}{10} + \frac{8}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{16}{45}.
 \end{aligned}$$

亦可利用(1)(2)的结果. 因为 $A_1A_2 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2 \cup A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1A_2 = S$, 且 $A_1A_2, \bar{A}_1\bar{A}_2, A_1\bar{A}_2, \bar{A}_1A_2$ 两两不相容, 故

$$P(A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1A_2) = 1 - \frac{28}{45} - \frac{1}{45} = \frac{16}{45}.$$

$$\begin{aligned}
 (4) \quad & P(\bar{A}_2) = P[(A_1 \cup \bar{A}_1)\bar{A}_2] = P(A_1\bar{A}_2 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2) \\
 &= P(A_1\bar{A}_2) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2) \\
 &= P(\bar{A}_2 | A_1)P(A_1) + P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_1) \\
 &= \frac{2}{9} \times \frac{8}{10} + \frac{1}{9} \times \frac{2}{10} = \frac{1}{5}.
 \end{aligned}$$

18. 某人忘记了电话号码的最后一个数字, 因而他随意地拨号. 求他拨号不超过三次而接通所需电话的概率. 若已知最后一个数字是奇数, 那么此概率是多少?

解法(i) 以 A_i 表示事件“第 i 次拨号拨通电话”, $i=1, 2, 3$. 以 A 表示事件“拨号不超过 3 次拨通电话”, 则有

$$A = A_1 \cup \bar{A}_1A_2 \cup \bar{A}_1\bar{A}_2A_3.$$

因 $A_1, \bar{A}_1A_2, \bar{A}_1\bar{A}_2A_3$ 两两互不相容, 且 $P(A_1) = \frac{1}{10}$,

$$P(\bar{A}_1A_2) = P(A_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_1) = \frac{1}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10},$$

$$\begin{aligned}
 P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3) &= P(A_3 | \bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_1) \\
 &= \frac{1}{8} \times \frac{8}{9} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{10},
 \end{aligned}$$

即有

$$P(A) = P(A_1) + P(\bar{A}_1A_2) + P(\bar{A}_1\bar{A}_2A_3)$$

$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{3}{10}.$$

当已知最后一位数是奇数时, 所求概率为

$$p = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$

解法(ii) 沿用解法(i)的记号, 知

$$\begin{aligned}
 P(A) &= 1 - P(\text{拨号 3 次都接不通}) = 1 - P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3) \\
 &= 1 - P(\bar{A}_3 | \bar{A}_1\bar{A}_2)P(\bar{A}_2 | \bar{A}_1)P(\bar{A}_1)
 \end{aligned}$$