七彩数学

姜伯驹 主编

QICAISHUXUE

趣话概率

——兼话《红楼梦》中的玄机

安鸿志 著

科学出版社
www.sciencep.com

七彩数学

姜伯驹 主编

QICAISHUXUE

趣话概率

——兼话《红楼梦》中的玄机

安鸿志 著

科学出版社

北京

内 容 简 介

本书叙述了若干有趣的话题，其中，涉及了各种各样的可能性问题.在每个话题中，通过提出和解答问题，体现出在处理带有偶然性的问题时，为作出好的决策，使用概率统计的思维方法是很有必要的.

本书共有7章，每章可单独阅读.第1章，叙说掷骰子时的不确定现象，用概率描述其中的确定性规律；在第2，3章中，用概率统计的思维方法，讨论"中奖问题"与"评委打分问题"，它们都是生活中常遇到的不确定性问题；第4章，以囚徒为话题，讨论既有不确定性，又有逻辑性的最优策略问题；第5章，让读者从算数的眼光看到非线性科学中的难点以及确定性与不确定性之间的联系；第6章，是用概率的观点思考某类悖论问题，并与生活中的成语"吹毛求疵"相联系；第7章，针对"红学"中的某些不同观点，尝试分析它们"为真"概率大小的问题.

在工作、生活或娱乐中，遇到具有不确定性的事物或现象时，又关心其中可能性大小问题的读者，只要具有高中文化(含在学高中学生)都可阅读本书，或可选读某几章，从中获得有益的启发.

图书在版编目(CIP)数据

趣话概率：兼话《红楼梦》中的玄机/安鸿志著.—北京：科学出版社，2009
(七彩数学/姜伯驹主编)
ISBN 978-7-03-023517-6

Ⅰ.趣… Ⅱ.安… Ⅲ.概率论-普及读物 Ⅳ.O211-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2009)第185771号

责任编辑：陈玉琢/责任校对：朱光光
责任印制：钱玉芬/封面设计：王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2009年1月第 一 版 开本：A5(890×1240)
2009年1月第一次印刷 印张：4 7/8
印数：1—5 000 字数：68 000

定价：22.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换〈双青〉)

从书序言

2002 年 8 月，我国数学界在北京成功地举办了第 24 届国际数学家大会，这是第一次在一个发展中国家举办这样的大会. 为了迎接大会的召开，北京数学会举办了多场科普性的学术报告会，希望让更多的人了解数学的价值与意义. 现在由科学出版社出版的这套小丛书就是由当时的一部分报告补充、改写而成.

数学是一门基础科学. 它是描述大自然与社会规律的语言，是科学与技术的基础，也是推动科学技术发展的重要力量. 遗憾的是，人们往往只看到技术发展的种种现象，并享受由此带来的各种成果，而忽略了其背后支撑这些发展与成果的基础科学. 美国前总统的一位科学顾问说过："很少有人认识到，当前被如此广泛称颂的高科技，本质上是数学技术."

在我国，在不少人的心目中，数学是研究古老难题的学科，数学只是为了应试才要学的一门学科. 造成这种错误印象的原因有很多. 除了数学本身比较抽象，不易为公众所了解之外，还

有学校教学中不适当的方式与要求、媒体不恰当的报道等.但是,从数学家自身来检查,工作也有欠缺,没有到位.向社会公众广泛传播与正确解释数学的价值,使社会公众对数学有更多的了解,是义不容辞的责任.因为数学的文化生命的位置,不是积累在库藏的书架上,而应是闪烁在人们的心灵里.

20世纪下半叶以来,数学科学像其他科学技术一样迅速发展.数学本身的发展以及它在其他科学技术的应用,可谓日新月异,精彩纷呈.然而许多鲜活的题材来不及写成教材,或者挤不进短缺的课时.在这种情况下,以讲座和小册子的形式,面向中学生与大学生,用通俗浅显的语言,介绍当代数学中七彩的话题,无疑将会使青年受益.这就是这套丛书的初衷.

这套丛书还会继续出版新书,诚恳地邀请数学家同行们参与,欢迎有合适题材的同志踊跃投稿.这不单是传播数学知识,也是和年轻人分享自己的体会和激动.当然,由于水平所限,未必能完全达到预期的目标,丛书中的不当之处,也欢迎大家批评指正.

姜伯驹

2007年3月

前　言

概率是用来度量可能性大小的，它与偶然性有关.具体地说，在遇到具有偶然性的事件时，预期结果是以一定可能性出现的，如常言所说的“有可能……”或者“……可能性很大”等.现在不满足于用“有”或“无”、“很小”或“很大”来描述可能性，要用数量化方法来度量可能性的大小.例如，买一张彩票，中大奖的可能性很小，小到怎样程度，可以计算出来，这就是此可能性的度量，称之为概率.又如，买了一种股票，很关心它的股价是涨还是跌，人们也需要量化涨跌的可能性.这种量化是有意义的，因为，在偶然现象中存在着必然性的规律，掌握并使用它们能提高方法论的水平.事实上，随着对这种量化研究的进步，已经形成了一门学问——概率统计.概率统计是近代数学的分支学科，在近代社会进步中，有着重要的应用.这里不备细说，只关心它与大众生活的关系.

如今，随着科学技术的飞速发展，信息充满

了生活的各个角落,而且绝大多数的信息又是以量化形式传播的.例如,据报道本月交通事故比上月下降了 20%.又如,从网上看到,今天股票市场的道·琼斯指数增加了 50 点.再如,小报报道,某种食品对防肥胖症成功率为 97%等.这些数字信息多如牛毛,又多与偶然性有关.对于公众来说,如何从中获取有用的信息,有助于提高生活的质量或者丰富生活的情趣,这是大家所关心的问题.

面对公众的需要,许多发达国家都非常强调把科学知识传播给大众,解释与日常生活有关的科学和技术发现的蕴涵.本书正是希望传播概率统计科学知识.

在向公众传播科技知识时,有两点是被公认的,一是结合有趣的事例分析,二是强调有普适性的思维方法.这也是本书趣话概率时所遵循的主旨.

本书以叙述事例为话题,论及各种各样的可能性问题.在谈到每个话题时,都是通过提出和解答问题的全过程,充分体现出在解决带有偶然性的问题时,使用概率统计思维方法是很有必要的.在选定本书的话题时,既要考虑趣味性,又要照顾话题的广泛性,还要避免太专业化

的术语.所以书中论及到的概率统计知识实在微不足道,称不上传播这门学科知识.用一句时尚话来说,仅仅是广而告之,让公众理解概率统计是有用的.

本书共有7章,各节联系松散,每节可单独阅读.第1章通过掷骰子叙说偶然现象,并用概率描述其中的确定性规律,这在以后各节中有参考价值.第2,3章用概率统计的思考方法,讨论了“中奖问题”与“评委打分问题”,它们都是生活中常遇到的不确定性问题.第4章以囚徒为话题,讨论既有不确定性,又有逻辑性的最优策略问题.第5章的目的是让读者从算数的眼光,看到非线性科学中的难点,以及确定性与不确定性之间的联系.第6章是用概率的观点思考某类悖论问题,并与生活中的成语“吹毛求疵”相联系.第7章,针对“红学”中的某些不同观点,尝试分析它们“为真”概率大小的问题.

寥寥数语,愿为阅读作引.

目 录

1 掷骰子与概率

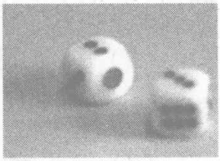

图 1.1　两个骰子

骰子是一个小小的正六面体,每个面上刻有从 1～6 个不同的圆点(图 1.1),它是玩麻将时不可缺少的用具.这里不关心玩麻将之事,只讨论投骰子时出现的有趣现象,并给它们以合理的解释.这些现象使得掷骰子与近代数学分支——概率论结下了不解之缘.

1.1　掷单个骰子

投掷一个骰子所出现的点数,可能是 1,2,

3,4,5,6 中的任何一个,不能预先确定.但是可以认定,出现每个点数的可能性是相等的.换句话说,对于任何预先指定的一个点数,如 3,投掷一次出现 3 点可能性的量化值是 1÷6.为书写方便,常用等价记号 1/6＝1÷6 表示.于是后文中常说,投掷一次出现 3 点的概率是 1/6,那么不出现 3 点的概率是 5/6.这几乎是微不足道的常识.为了考查投掷多个骰子的情况,从以上认识中归纳出如下 3 点:

(1) 投掷一个骰子所出现的可能结果有 6 种:1,2,3,4,5,6 不同的点数;

(2) 出现哪种结果不能预先确定,或者说是随机出现的;

(3) 这 6 种结果都以等可能性出现.

这是考查掷骰子事件的三部曲,简称为可能性、随机性和等可能性.这对于同类事件有普遍的适用性,后文提到的“投硬币”就是一例.

1.2 掷两个骰子

现在考虑一次投掷两个骰子这件事.这也恰好是玩麻将时常见的事,而且较多地使用两

个骰子出现的点数的和数.暂不考虑它们的点数之和,先根据以上3点考查一次投掷两个骰子出现的结果,看看能得出怎样的结论.仿照对于投掷一个骰子的分析,容易给出相应的分析.其一,投掷两个骰子所出现的可能结果有36种,可用如下方阵表示它们:

$(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),$

$(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),$

$(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$

$(4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),$

$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),$

$(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6),$

在这里(k,j)表示第一个骰子出现的点数是k,第二个骰子出现的点数是j.其二,出现哪种结果,不能预先确定.其三,这36种结果,都以等可能性出现.由此可见,一次投掷两个骰子时,出现36种结果中的任何一种的概率都是1/36.对这样的结论,也容易取得共识.

但是在有些时候,如在玩麻将时,常常使用(k,j)中的和数$m=k+j$.那么,这一和数m有多少种不同的结果呢?容易看出,有如下11种:

$$2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12.$$

还容易理解，无法预先确定哪一种将会出现. 若要问这 11 种结果是以等可能性出现的吗？如果不相等，它们各是多少呢？回答这样的问题，不再是一目了然的了. 稍加思考便能看出，它们不是等可能性出现的. 但是有时候这一点容易被疏忽，而误以为是等可能性出现的. 为了避免这种错误，算一算它们各自出现的可能性有多大. 其实这并不难，只要仔细考查投掷两个骰子可能出现的 36 种结果，也就是看一看前面 36 个数对(k,j)所排成的 6 行 6 列的方阵，能使和数 $k+j=m$ 的数对(k,j)有几个，以此个数乘上 1/36 便得到其概率值.

例如，和数 $m=2$ 时，只有数对(1,1)使得 $1+1=2$. 依前所述，出现(1,1)的概率是 1/36，从而出现和数 $m=2$ 的概率也是 1/36. 为简便使用记号

$$P(m=2)=P(k+j=2)=\frac{1}{36},$$

在此公式中的 P 是英文单词“概率”(probability)的第一个字母，$(m=2)$与$(k+j=2)$表示投掷两个骰子时出现点数之和为 2. 于是此公式的含义是：投掷两个骰子出现点数的和数 $m=2$ 的概率是 1/36. 可见这种表达方式有多方便.

再算一算和数 $m=3$ 的概率是多少. 为此，再看一看由 36 个数对 (k,j) 排成的方阵. 容易看出，能使和数 $k+j=m=3$ 的数对 (k,j) 有两个，即(1,2)和(2,1)，再根据它们以等可能性出现，其概率都是 1/36，于是出现和数 $m=3$ 的概率是 2/36. 按照同样计算方法，可以算出和数 m 取每个可能数字的概率，这里不逐一细算了. 为了对比它们的大小，现将 11 个概率数值列在表 1.1 中.

表 1.1　和数 m 取各数值的概率

和数 m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
相应的概率值	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

从表 1.1 中列出的 $P(m=2)=1/36$，$P(m=3)=2/36$，直到 $P(m=12)=1/36$ 的诸概率值中，清楚地看出 $P(m=7)=6/36=1/6$ 的数值最大，以它为中心，其两边的数值有整齐的对称性. 利用此表的概率值，可以对下面的问题给出圆满的解答.

1.3 一个赌博问题

有一庄家用一次投掷两个骰子作为赌博方法，他声称："凡赌客自己选定 2 至 12 中的一个数作赌码，待参赌者都确定好赌码后，我投掷两个骰子，得到两个骰子的点数之和数. 凡是赌码与此和数相同的赌客是赢家，我将按赌码数的平方数(元)付给赢家，凡是赌码与此和数不同者是输家，并按赌码数(元)付给我. 例如，某人的赌码是 10，当点数之和数是 10 时，我付给他 $10\times10=100$(元)，当和数不是 10 时，他付给我 10(元)."

请问，是否存在着最佳赌码？是几？解答如下：

所谓最佳赌码是对赌客而言的，使用最佳赌码获利最多. 首先要明确怎样计算获利. 注意，每次赌博的结果是不确定的，所以其获利只能是期望值，它是一种客观的描述值，不是主观的愿望值. 例如，以 3 作为赌码时，当点数之和数是 3 时，庄家付给他 $3\times3=9$(元)，这是赌客的收益项. 不过，他是以一定的可能性获得此项

收益的.由表 1.1 可知他获得 9(元)的概率是 2/36,于是 9×2/36=1/2(元)是所期望的收益项.当点数之和数不是 3 时,赌客付给庄家 3(元),这是赌客的付出项,同样由表 1.1 可知他付出 3(元)的概率是 36/36−2/36=34/36.于是 3×34/36=17/6(元)是预期的付出项.综合收益项与付出项,获利的期望值被选为

$$3\times3\times\frac{2}{36}-3\times\frac{34}{36}=\frac{18-102}{36}=-\frac{84}{36}=-\frac{7}{3}(\text{元}).$$

按照同样的计算方法,反复使用表 1.1 可以算出各赌码获利的期望值,这里不逐一细算了,只将它们列在表 1.2 中.

表 1.2　各赌码获利的期望值

赌码	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
期望值	−66÷36	−84÷36	−84÷36	−60÷36	−6÷36	84÷36	72÷36	36÷36	−30÷36	−132÷36	−276÷36

从表 1.2 中清楚地看到最佳赌码是 7,最差赌码是 12.不但如此,取赌码为 7,8 或 9 时都有正的期望值.如此看来,天底下没有这样傻的庄家,因为使用表 1.2 能把庄家赢得倾家荡产.或许有谁会问,虽然期望值是正的,可是每次赌的结果是随机的,未必能赢得垮庄家.是的,此提