数学考研辅导教程（下册）

苏兆龙 主编　庞秀梅 郭妤 编

SHUXUE KAOYAN FUDAO JIAOCHEN

国防工业出版社
National Defense Industry Press

内容简介

本书涵盖了考研数学的全部内容，把本科中学过的所有内容有机地、交叉地融合在一起，重新编排了章节，紧扣考试大纲编纂而成的。本书分上、下册共10章，包括：极限和连续，一元函数导数和微分，多元函数的导数与微分·空间解析几何，积分，常微分方程，级数，向量·矩阵·方程组，特征值与特征向量，概率论，数理统计初步等内容。

本书适用于报考研究生需要考数学的考生使用，主要是针对“数学一”的考生写的，但删去了某些章节后可以适用于其它类型的考生。本书可供有关教员参考，也适用于大学一、二年级学生在学习时参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

数学考研辅导教程/苏兆龙主编．—北京：国防工业出版社，2008.8

ISBN 978-7-118-05704-1

Ⅰ.数… Ⅱ.苏… Ⅲ.高等数学－研究生－入学考试－自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第059703号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100044)

腾飞印务有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 26 字数 470 千字

2008年8月第1版第1次印刷 印数 1—4000册 定价 92.00元(上、下册)

国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474

发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

前　言

作者从事考研辅导已有许多年了，讲授获得了听课学生的欢迎和好评，也获得了很好的成绩。在教学实践的基础上，作者于2000年曾编写了《数学考研辅导教程》（江苏教育出版社出版），这是我们多年上辅导课的工作的总结，也是根据多年的备课笔记加以整理、提高、扩充而成的。主要目的是为了满足广大考研同学对考研辅导书面资料的要求，解决一部分考生不能参加我们辅导班面授的缺憾，同时也是希望有个机会将作者前一段所做的工作做一个小结。

今年有幸，国防工业出版社对该书组织再版。说是再版，实际上我们对内容作了重大调整，许多章节和内容都完全重写。有的章节的内容也做了扩充或者缩减，所以奉献给读者的可以说是一本新的教材。我们安排各章节的内容紧扣考纲，并有由历届考题（尤其是近几年）所反映出的考试重点，以此来指导我们的辅导过程，指导本书的编纂工作。当然，由于数学学科本身的特点，我们不能仅以考点而讲考点，但主要还是围绕着考点而展开的。

本书具有如下的特点：

(1)本书是综合型的、混合型的，并不拘泥于原教材中一章一节的讲述，而是把前、后的内容有机地、交叉地融合在一起，并重新编排了章节。本书特别适合于在大学一年级、二年级已经学过有关大学数学的学生作为复习资料阅读和使用。

(2)本书把必要的定义、定理、公式都罗列在有关章节之中，以便学生查阅。

(3)本书以考试大纲为原则，对凡是考纲中列举的内容都进行了复习，但在内容的安排上有简略、有详尽。对在考试中，容易考到且考生掌握相对比较困难的内容都作了详尽的讨论，并列举了大量的例子、分析了各种可能的变化，力争让学生感到“难点不难”。而对虽列在考纲中但不太可能考到的内容也作了适当的讨论，一方面使学生不至于牵涉过多的精力；另一方面，万一考到（小概率事件发生了），考生也不会惊慌失措、无从应对。

(4)本书的难度是“中等”程度的，但要比课本中的内容更深、更概括、更系统全面。书中讨论了许多在课本中未见的题型及处理方法，更重要的是增加了综合讨论和题型。但内容还是紧紧围绕着考纲进行的。有些不可能考到的内容（如重积分中一般的坐标变换）则一概删去（虽然有些作者把这些内容列入到他们的书中）。对某些技巧性过强的题（甚至可以说是“一题一巧”），我们也没有列举（其

实这样的题是最“抓”学生的)，因为对于考研的实用性不大。

(5)在讲到每一章节的内容时，我们都对该内容在考试中出现的可能性作一估计，并对整个试卷的构成也作了估计，也就是说对考研试题的内容、类型、范围作一猜测。作者每年都要进行这方面的工作，而且颇有成效，命中率较高。其体会是：要站在出题人的立场来考虑今年的考题会是什么样，即假如由我来出今年的考题，那么我应该会出什么样的题呢？有这样的换位思考，命中率就会提高了。

(6)书中还有大量的例题，其中包含了众多的解题技巧。而许多技巧都是作者自创的(其它书中并没有)，对求解某些问题颇有奇效。经过多年考试实践，证明这些例题和技巧覆盖了整个考试范围，并无遗漏。

书中的例题的讲解非常详尽，目的就是为了解决部分考生不能面授的缺憾。每个例题都有分析、解答和附注，交待了如何入手，如何做好第一步，并讲解作者是如何想到用这个技巧的。例题中也详细交代了解题时要注意哪些要素。作者几乎每年都参加阅卷工作，根据历年阅卷的经验，特别注意指出学生容易出错的地方及出错的类型，甚至列出了错误的做法，以引起学生的重视和警惕。

(7)在各章后都列有一定数目的习题，这是作者经过多年揣摩，精心编撰而成的，而且习题的数量也是适当的(作者一向反对搞题海战术)。适当做一些题是可以的，也是应该的。但是如果整日沉陷在题海中，四处搜寻一些怪题和偏题来做，就不能深入钻研基本概念和基本运算技巧了，可以说是本末倒置。考研和高考有明显的不同。考研的试题(尤其是大题)一般不会见诸于任何已知的书籍，要求解它主要靠基本概念、基本理论和基本技巧的掌握。我们习题的数量虽说是中等，但覆盖面相当广泛，且适合考研学生使用，并且习题均有答案，便于学生查对。习题虽说列在各章的后面，仍在求解过程中往往要用到其它各章的内容，因为很多的习题是综合性的。

考研的复习是一个系统工程，作者建议按以下步骤进行为宜。

第一步 首先，作者建议读者全面地、系统地阅读以下在一年级、二年级时用过的教科书：

(1)高等数学(同济大学编，第五版)上、下册。包括所有讲过的内容，凡是小字排印的、或者打“*”号的内容可以跳过不看。

(2)线性代数(同济大学编)。包括所有讲过的内容。但这本书内容相对较浅，读者可参考北京大学编的“高等代数”有关章节(凡是同济版未涉及的内容可以不看)以及习题。

(3)概率论与数理统计(浙江大学编，第三版)。前7章半内容(即第8章只需要前四节)。

读书的时候，要掌握各个基本概念、定义、定理、公式(基本极限、求导公式、积分公式、展开公式等要做到如数家珍般地熟练)，还要搞清重要概念(公式、定理)

之间的关系。关于课本后的习题，可以采用以下的原则：凡是感到熟悉的内容，所附习题可以不做或少做；感到不太熟悉的内容，所附习题可以多做，甚至全做。

第二步 参加我们的考研辅导班及详细阅读本书。阅读本书时不仅要注意所列的内容，还要认真注意书中所列的定理、公式的条件、适用范围及所针对的对象。仔细阅读例题，揣摩作者为什么要使用这些技巧和方法的（这些都是有规律可寻的）。

作者有个体会：读书的时候别做题，做题的时候别读书”。最忌讳的就是：读一点书，然后就开始做题。题不会做了，再到前面去翻书、找公式，完了再去做题。这样做收效甚微，就是白白浪费时间。待掩卷之后，你就会发现书上的内容在头脑中成了一锅粥，毫无头绪。因此，作者认为正确做法是：先读书，先理解内容，在自认为把基本概念、基本定义、基本定理（公式）、基本运算技巧都搞明白了的时候再来做题。

做题起着巩固、加深书本知识的目的，是为了熟身练手，是为了检验自己掌握书本知识的状况，决不能试图靠做题来达到学习的目的，这样就本末倒置了。

第三步 在读完本书后可以做一些书中的习题，题量不是很大，但覆盖面比较广，应付考试所需要的基本内容都已经包括其中。如果感觉所列习题的题量太大（主要是针对那些基础比较好的同学而言），可以挑选一些题做。

例题和习题有一部分是重复的，目的主要是照顾那些仅需要找题做的同学。

本书后还附有习题的答案，以供同学们参考，这也仅仅是参考而已。作者非常反对围绕着答案去做题，至少作者本人从不去查对后面的答案（包括作者在当学生的时候）。答案对了，并不意味着你的做法一定是对的；而答案错了，也并不意味着你的思路一定是错的（甚至不排除有些答案本身就不正确的可能性）。

现在市场上有不少“仿真题”、“模拟题”类图书出售。同学们购买一些作为参考也是可以的，但希望考生要以平常心来对待这些“仿真题”，即不要让这些题来干扰自己的情绪和思路。这些仿真题做得很顺，不说明自己就复习得很好了；相反地，做得不顺也不必沮丧，因为这些仿真题毕竟也只是一家之言而已。

在做习题的时候，希望同学们能认真做，包括注意书写格式，要注意养成良好的习惯。作者不赞同仅用阅题和粗略思考来代替做题。读者应该清楚：“想”和“写”是有本质的区别。有些解题的关键步骤在“想”的时候可能会被忽略过去，只有在“写”的时候这些问题才会现露出来。同学们也要养成按正确格式书写的习惯。有时候思路虽然是正确的，但由于书写的颠倒和混乱，会让阅卷的老师读不懂，即使能读懂，也会因为不满意你的书写而扣分。

最后还要提醒一句：部分考生在复习时存在着只注意钻研一些难题，而忽略了对整个理论体系的回顾和对定义、概念的复习；只注意解题的技巧，而忽略了对基本计算能力的培养和基本求解程序复习的问题。这是万不可取的，是只见树木而

不见森林的做法。做任何一件事都要按它的内在规律系统地进行，复习也是如此。虽然这是老生常谈，但如果考生能注意到这一点，自当获益匪浅。

这本书是作者和同仁们多年心血所凝成的，可毕竟是一家之言，如有不当之处，敬请各位专家和使用本书的读者不吝指教，我们自当感激不尽。

编 者

2008 年春

目　录

第 7 章　向量·矩阵·方程组

现在准备用两章的篇幅一起复习一下线性代数。线性代数这一部分在考题中占 30 分，是一块举足轻重的部分。

所谓的线性代数，是"研究线性空间上线性变换"的一门数学分支。但在课程中（以及考纲的规定中），线性空间的内容涉及得很少，而线性变换甚至都没有涉及到。因而这里所讲的内容从本质上来说只不过是一些例子、材料而已，而缺乏有力的线索把它们串起来，因而显得有点散。考点也往往分散在各部分的内容中。

7.1　向量的概念及运算

1. 向量的概念和线性运算

在线性代数中，我们将向量理解成 n 元有序数组。一个 n 维向量，一般用小写希腊字母来表示。例如

$$\boldsymbol{\alpha} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$

$a_i (i = 1,2,\cdots,n)$ 称为向量的元素、分量或坐标。n 维向量是指有 n 个分量的向量。一般地讨论 $n \geqslant 2$。

把以上书写的向量称为行向量，但在正式场合中一般都用列向量来表示。即

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

在不做特殊声明时，我们讨论的都是列向量。这两种表示方法当然不一样，当然谈不到是不是相等，是不是线性无关的问题。借用后面矩阵转置的概念，可见这两种向量的表示方法实际上是互为转置的。

两个向量 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 相等，首要条件是它们必须是同维的。两个向量不同维，就谈不到它们是否相等，它们之间也不能做加法（因而无法谈及它们之间是线性相关还是线性无关的问题）与内积（当然也就无法谈及它们之间是否正交的问题）。这一点务必注意（在选择题中有可能涉及到这些问题）。

两个同维向量

$$\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix} \quad 和 \quad \boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}$$

相等的充要条件是所有的对应元素相等,即

$$a_i=b_i(i=1,2,\cdots,n)$$

我们也有零向量的概念。零向量是指每一个分量都是0的向量。零向量有无数多条,针对每个维数有一条零向量。

向量的线性运算是两种:加法和数乘。

两个同维向量(注意:必须同维)$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$的和还是一条与$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$同维的向量,其分量等于$\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$对应分量的和,即

$$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+b_1\\a_2+b_2\\\vdots\\a_n+b_n\end{bmatrix}$$

它的主要性质:

(1) 交换律。$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}$;

(2) 结合律。$(\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta})+\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}+(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\gamma})$;

(3)$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{0}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{\alpha}$,当然$\boldsymbol{0}$和$\boldsymbol{\alpha}$应是同维的;

(4) 对任一个n维向量$\boldsymbol{\alpha}$,都存在n维向量$\boldsymbol{\beta}$,使得$\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$,其中$\boldsymbol{\beta}$称为$\boldsymbol{\alpha}$的负向量(当然$\boldsymbol{\alpha}$也是$\boldsymbol{\beta}$的负向量),记为$\boldsymbol{\beta}=-\boldsymbol{\alpha}$。实际上$-\boldsymbol{\alpha}$的构造是把$\boldsymbol{\alpha}$中的每一个分量都乘以$(-1)$而得的。

向量的第二个线性运算是数乘。设$\boldsymbol{\alpha}$是一个n维向量,λ是一个数,则$\lambda\boldsymbol{\alpha}$(称为数$\lambda$和向量$\boldsymbol{\alpha}$的数乘)仍是一个$n$维向量,它的每一个分量由$\boldsymbol{\alpha}$对应的分量乘以$\lambda$而得到。即

$$\lambda\boldsymbol{\alpha}=\lambda\begin{bmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda a_1\\\lambda a_2\\\vdots\\\lambda a_n\end{bmatrix}$$

数乘的主要性质:

(1) $1 \cdot \boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}$

(2) $\lambda(\mu\boldsymbol{\alpha}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{\alpha}$

(3) $(\lambda + \mu)\boldsymbol{\alpha} = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \mu\boldsymbol{\alpha}$

(4) $\lambda(\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}) = \lambda\boldsymbol{\alpha} + \lambda\boldsymbol{\beta}$

注意:和矩阵的乘法相区别的是:如 $\lambda\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$,则必有 $\lambda = 0$ 或者 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$。

2. 向量的内积

向量的第三种运算为内积。设有两个 n 维向量

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

定义它们的内积为对应坐标乘积的和

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

如借用矩阵乘法的写法,我们又可把内积写为

$$(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$$

其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置(有的书上写作为 $\boldsymbol{\alpha}'$),即由列向量变为行向量。我们声明,在这儿(及考题涉及到的)讨论的都是实向量,即所有的分量都是实数的情况。复向量内积的定义有所变化(不需要掌握)。

注意:向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积 $\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 不再是一个向量,而是一个数。这点要注意(在选择题中,时有这方面的讨论)。例如 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} + 2\boldsymbol{\alpha}$ 是没有意义的(这是数加上向量),而 $(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}$ 是允许的(这是向量的数乘)。

向量内积的主要性质有:

(1) 对称性:$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$

(2) 严格正性:$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} \geqslant 0$,且 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$

(3) 对第一变元的线性,有

$$(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = \lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$$

对第二变元也有同样的线性。

(4) 对任意的 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$,有

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\mathbf{0} = \mathbf{0}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0$$

其中 $\mathbf{0}$ 是 n 维零向量。

要强调一下,如果 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 是 n 维列向量,则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积,而 $\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 不是

内积，它表示一个 n 阶方阵。同样地，如果 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是 n 维行向量，则 $\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$ 表示 $\boldsymbol{\alpha}$ 和 $\boldsymbol{\beta}$ 的内积，而 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}$ 表示一个 n 阶方阵。

例 7.1　设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为三维列向量

$$\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

求 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$。

[解] 有

$$\boldsymbol{A}^2=\begin{bmatrix}3 & -3 & 3\\ -3 & 3 & -3\\ 3 & -3 & 3\end{bmatrix}=3\boldsymbol{A}$$

另一方面，还有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^2&=(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\alpha\alpha}^{\mathrm{T}}\\ &=(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

故

$$\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=3$$

例 7.2　设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{bmatrix}1\\1/2\\1/3\end{bmatrix}$是两个三维列向量，令 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}$，求 $\boldsymbol{A}^n$。

[分析] 根据前面的讨论，知 $\boldsymbol{A}$ 是一个三阶方阵。如若先把 $\boldsymbol{A}$ 求出，再逐次求 $\boldsymbol{A}$ 的次方以找出规律，这样的做法显然太繁琐。我们注意到 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是内积，是个数，在矩阵运算中它可以自由地提来提去。

[解] 有 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=3$，因而

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=\underbrace{(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})\cdots(\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}})}_{(\text{共有}n\text{个})}\\ &=\boldsymbol{\alpha}\underbrace{(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\cdots(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})}_{(\text{共有}n-1\text{个})}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^{n-1}\boldsymbol{\alpha\beta}^{\mathrm{T}}\\ &=3^{n-1}\boldsymbol{A}=3^{n-1}\begin{bmatrix}1 & 1/2 & 1/3\\ 2 & 1 & 2/3\\ 3 & 3/2 & 1\end{bmatrix}\end{aligned}$$

在这里，还可以引进 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度的概念。

定义 $\boldsymbol{\alpha}$ 的长度 $\|\boldsymbol{\alpha}\|$（有的写作 $|\boldsymbol{\alpha}|$）是

$$\|\boldsymbol{\alpha}\| = \sqrt{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}}$$

长度的基本性质为

(1) 严格正性：$\|\boldsymbol{\alpha}\| \geq 0$，且 $\|\boldsymbol{\alpha}\| = 0$ 的充要条件是 $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\theta}$。

(2) 正齐次性：$\|\lambda\boldsymbol{\alpha}\| = |\lambda| \cdot \|\boldsymbol{\alpha}\|$

(3) 三角形不等式：$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| + \|\boldsymbol{\beta}\|$

(4) Schwary 不等式：$|\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}| \leq \|\boldsymbol{\alpha}\| \cdot \|\boldsymbol{\beta}\|$

设 $\boldsymbol{\alpha}$ 为 n 维向量，且 $\|\boldsymbol{\alpha}\| = 1$，则称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是一单位向量，或称 $\boldsymbol{\alpha}$ 是规范的（标准的）。

注意：n 维（$n \geq 2$）的单位向量有无穷多条。一般地，如 $\boldsymbol{\alpha}$ 是任意一条 n 维向量，且 $\boldsymbol{\alpha} \neq \boldsymbol{\theta}$。则 $\dfrac{\boldsymbol{\alpha}}{\|\boldsymbol{\alpha}\|}$ 即为和向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 平行的一条单位向量。

也可考虑两条向量之间的夹角，设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是两条非零的 n 维向量，则定义它们的夹角为

$$\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = \arccos \frac{\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta}}{\|\boldsymbol{\alpha}\| \ \|\boldsymbol{\beta}\|}$$

根据 Schwary 不等式，这个定义是有意义的。

不讨论零向量和其它向量的夹角问题。特别感兴趣的是 $\langle\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}\rangle = \dfrac{\pi}{2}$ 的情况，此时称这两条向量正交（在二维、三维空间中称为垂直）。为了包含更广泛的情况，则修改一下定义。

设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 是两条 n 维向量，称 $\boldsymbol{\alpha}$、$\boldsymbol{\beta}$ 正交，当且仅当 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$。

由定义可知，零向量和任何向量正交。

如 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 均和 n 维向量 $\boldsymbol{\beta}$ 正交，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 的任意线性组合 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k$ 也和 $\boldsymbol{\beta}$ 正交。

两条 n 维向量正交的充要条件是勾股定理，即 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\beta} = 0$（有的书上记作为 $\boldsymbol{\alpha} \perp \boldsymbol{\beta}$）的充要条件是

$$\|\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}\|^2 + \|\boldsymbol{\beta}\|^2$$

这个结果可以推广到多个向量的情况：n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 两两正交，则广义的勾股定理成立，即

$$\|\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_k\|^2 = \|\boldsymbol{\alpha}_1\|^2 + \|\boldsymbol{\alpha}_2\|^2 + \cdots + \|\boldsymbol{\alpha}_k\|^2$$

如果一个 n 维向量组的每个向量都是（n 维）单位向量，并且是两两正交的，则这个向量组称为是规范正交的。

这一部分的例题见于其余各节，这里就不专列了。

3. 线性相关性和线性无关性

本节还有一个重要内容,就是线性相关性和线性无关性。这是我们考试的重点之一。

设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 均是 n 维向量,$\lambda_1,\lambda_2,\cdots、\lambda_k$ 均是实数,则 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k$ 称为向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 的一个线性组合。

如 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 是一 n 维向量组,$\boldsymbol{\beta}$ 是一 n 维向量,如存在实数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$,使得 $\boldsymbol{\beta}=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k$,则称 $\boldsymbol{\beta}$ 可由此向量组线性表出。

向量组等价的概念。设有两个向量组

(Ⅰ)$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$

(Ⅱ)$\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$

如果每个 $\boldsymbol{\beta}_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 均可由向量组(Ⅰ)线性表出,则称向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅰ)线性表出。

如果向量组(Ⅱ)可由向量组(Ⅰ)线性表出,同时向量组(Ⅰ)也可由向量组(Ⅱ)线性表出,则称这两个向量组是等价的。

“等价”关系具有反身性、对称性和传递性。

两个向量组等价的话,它们的秩必定相同(秩的概念见后面的讨论),而和向量组中含有的向量的个数并无直接的联系,这个问题在考题中经常出现(通常以选择题的形式出现),应注意。当然,如果两个向量组具有相同的秩,它们也不一定是等价的。

线性相关和线性无关的概念。

一个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$,如存在不全为 0 的常数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$,使得

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0}$$

则称这个向量组是线性相关的。

一个 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$,如不是线性相关的,则称其是线性无关的。或者说,如有

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0}$$

则必有 $\lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_k=0$,那么这个向量组是线性无关的。

换个角度来说,以 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 为未知数的方程组

$$\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k=\mathbf{0}$$

(每一个分量是一个方程,共有 n 个方程),如其有非零解,则这个向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 是线性相关的;如方程组没有非零解(即只有零解),则这个向量组就是线性无关的。这个观点也提示我们如何讨论某些向量组的线性相关性。

例 7.3 证明:$\boldsymbol{\alpha}_1=(3,0,-1,4)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(2,1,0,-\frac{3}{2})^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(5,-2,-3,$

$15)^{\mathrm{T}}$ 是线性相关的。

[证明] 根据上面的说明,令

$$\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\lambda}_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 为未知数,每个分量对应一个方程,则有

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + 5\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - 3\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 - \dfrac{3}{2}\lambda_2 + 15\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

它有一组非零解:$\lambda_1 = 3,\lambda_2 = -2,\lambda_3 = -1$,故这个向量组是线性相关的。

[附注] 上面的方程组有无穷多组解,只需证明存在一组非零解即可。

我们讨论的是列向量,但经常是用行向量的转置形式来写的(出于排版的原因),考卷中经常是如此印。

例 7.4 证明:向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (3,0,-1,4)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (2,1,0,-\frac{3}{2})^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\alpha}_3 = (1,-2,-1,-1)^{\mathrm{T}}$ 是线性无关的。

[证明] 和上题一样,令

$$\boldsymbol{\lambda}_1\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\lambda}_2\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\lambda}_3\boldsymbol{\alpha}_3 = \mathbf{0}$$

其中 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 是未知数。每个分量对应一个方程,则有

$$\begin{cases} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 - \dfrac{3}{2}\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

由上式第(2)个方程和第(3)个方程可得 $\lambda_1 = -\lambda_3,\lambda_2 = 2\lambda_3$,代入到第(1)个方程就得到 $\lambda_3 = 0$,代入到上面的结果就有 $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$,也即方程组只有零解。故此向量组是线性无关的。

以下有一些需要记住的结论:

(1) 含有零向量的向量组一定线性相关。

(2) 只有一条向量所组成的向量组线性相关的充要条件是此向量为零向量。

(3) 由两条向量所组成的向量组线性相关的充要条件是:这两条向量的对应坐标成比例。

(4) 由 k 条($k \geqslant 3$) 向量所组成的向量组线性相关的充要条件是:其中必有一条向量可以表示为其它向量的线性组合。

(5) 任意 m 条($m > n$)n 维向量所组成的向量组必定线性相关。

(6) 如 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 线性相关,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k+s}$ 必线性相关。

它的逆否命题是:如 n 维向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k,\boldsymbol{\alpha}_{k+1},\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{k+s}$ 线性无关,则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 必线性无关。

用简略的语言来说,上面的结论可以表达为:如“小组”线性相关,则“大组”必线性相关;如“大组”线性无关,则“小组”必线性无关。

必须注意:若已知“小组”线性无关,则关于“大组”是否线性无关并没有结论。同样地,若已知“大组”线性相关,则关于“小组”是否线性相关也没有结论”。

(7) 如 n 维向量组

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1 = (a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n})^{\mathrm{T}} \\ \qquad\vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_k = (a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn})^{\mathrm{T}}\end{cases}$$

是线性无关的,则“加长了的”$n+s$ 维向量组

$$\begin{cases}\boldsymbol{\alpha}_1 = (a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n},a_{1,n+1},\cdots,a_{1,n+s})^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2 = (a_{21},a_{22},\cdots,a_{2n},a_{2,n+1},\cdots,a_{2,n+s})^{\mathrm{T}} \\ \qquad\vdots \\ \boldsymbol{\alpha}_k = (a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{kn},a_{k,n+1},\cdots,a_{k,n+s})^{\mathrm{T}}\end{cases}$$

也是线性无关的。

它的逆否命题是:若“加长了的”向量组线性相关,则原向量组也是线性相关的。

还需注意:若“加长了的”向量组线性无关,则关于原向量组的线性无关性并没有什么结论。同样地,若原向量组线性相关,则关于“加长了的”向量组的线性相关性也没有什么结论。

(8) 现有 n 条 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_n$,设它们所对应的分量所组成的矩阵(是个 n 阶方程)为 $\boldsymbol{A}$,则 $\boldsymbol{A}$ 所对应的行列式 $|\boldsymbol{A}| = 0$ 是这个向量组线性相关的充要条件。

例 7.5 设向量 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (a,0,c)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2 = (b,c,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3 = (0,a,b)^{\mathrm{T}}$ 线性无关,求 a,b,c 应满足的关系式。

[解] 根据对应的性质,3 条三维向量线性无关,则它们所组成的行列式 $|\boldsymbol{A}| \neq 0$,于是

$$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ 0 & c & a \\ c & 0 & b \end{vmatrix} = 2abc \neq 0$$

故所求的条件是 a、b、c 均不为0。

以下两条结论见于后面章节的讨论，这里先把它们列出来。

(9) 从属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

(10) 两两正交的非零向量必定线性无关。

这个结论作为例题我们给出如下证明。

例 7.6 设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 是两两正交的非零的 n 维向量组，则 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 是线性无关的。

[证明] 令 $\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k=\boldsymbol{0}$

将它和任一个 $\boldsymbol{\alpha}_i(1\leqslant i\leqslant k)$ 作内积，则有

$$0=\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}(\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+\lambda_k\boldsymbol{\alpha}_k)=\lambda_i\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_i$ 是非零向量，故 $\boldsymbol{\alpha}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}_i\neq 0$，因而 $\lambda_i=0(1\leqslant i\leqslant k)$。据定义知 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_k$ 是线性无关的。

例 7.7 （选择题）设向量 $\boldsymbol{\beta}$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_m$ 线性表示，但不能由向量组（Ⅰ）:$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1}$ 线性表示。记向量组（Ⅱ）,$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_{m-1},\boldsymbol{\beta}$，则（　　）。

A. $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由（Ⅰ）线性表示，也不能由（Ⅱ）线性表示

B. $\boldsymbol{\alpha}_m$ 不能由（Ⅰ）线性表示，但可由（Ⅱ）线性表示

C. $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由（Ⅰ）线性表示，也可由（Ⅱ）线性表示

D. $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由（Ⅰ）线性表示，不可由（Ⅱ）线性表示

[分析] 如果 $\boldsymbol{\alpha}_m$ 可由（Ⅰ）线性表示，即有表示式

$$\alpha_m=\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\cdots+\mu_{m-1}\alpha_{m-1}$$

由 $\boldsymbol{\beta}$ 可由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性表示，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}&=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}+\lambda_m\alpha_m\\&=\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_{m-1}\alpha_{m-1}+\lambda_m(\mu_1\alpha_1+\mu_2\alpha_2+\cdots+\mu_{m-1}\alpha_{m-1})\\&=(\lambda_1+\lambda_m\mu_1)\alpha_1+(\lambda_2+\lambda_m\mu_2)\alpha_2+\cdots+(\lambda_{m-1}+\lambda_m\mu_{m-1})\alpha_{m-1}\end{aligned}\tag{7.1}$$

即 $\boldsymbol{\beta}$ 可由（Ⅰ）线性表出，和已知条件矛盾。此矛盾说明 α_m 不可由（Ⅰ）线性表出。

在式(7.1)中，如果 $\lambda_m=0$，则此式表明 $\boldsymbol{\beta}$ 可由（Ⅰ）线性表出，和已知条件矛盾。此矛盾说明 $\lambda_m\neq 0$，则从式(7.1)可以得到