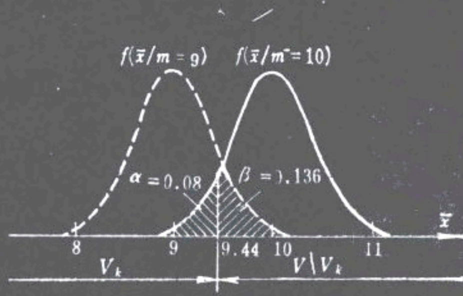
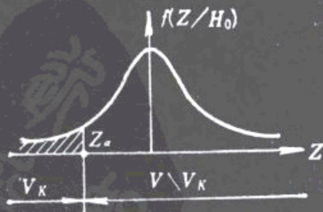
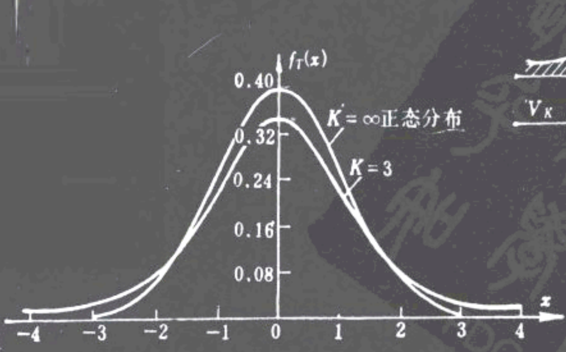


概率统计

关家骥　李云甫　雷宝瑶　武　坤编

湖南科学技术出版社





前　　言

本书是根据国家教委1992年制定的《高等工业学校概率与数理统计课程教学要求》，在保持关家骥等编的《概率与数理统计》（中南工业大学出版社，1989年）一书的主要优点基础上改编而成的。此书可作为高等工业学校工科工程数学——概率与数理统计课程的教材。

全书分两大部分。概率论部分（等1章至第5章）为基础知识，包括随机事件及其概率、随机变量的分布、数字特征、极限定理等；数理统计部分（第6章至第9章）为统计推断的基础知识：参数估计、假设检验、线性回归。其中线性回归虽未列入上述《教学基本要求》，但应用日益广泛，因此也编入书中，以供教学选用或学生自学。此外，由于计算机的应用日益普及，书中附有数理统计有关的几个计算程序，供上机时参考。打“*”号的内容则根据需要选用。

本书编写分工是：第1章李云甫，第2，9章及计算机程序为武坤，第3、4、5章为雷宝瑶，第6、7、8章为关家骥。全书由关家骥教授主审。在编写过程中，中南工业大学工程数学教研室全体教师曾提出过宝贵意见。同时，参考了兄弟院校出版的同类教材，得到了中南工业大学数力系和教材科的大力支持，在此一并表示感谢。

由于编者水平有限，书中缺点和不妥之处难免，竭诚欢迎读者批评指正。

编　者

1993年12月

目　录

第1章　随机事件及其概率

§1.1　随机事件与样本空间

一、随机现象

在自然界和人类社会中，人们观察到的现象，大体可归纳为两类：一类是可以预言其结果的，即在相同条件下，重复进行试验或观测，它的结果总是确定的，这一类现象称为必然现象或确定性现象。例如，在标准大气压下，温度达到100°C时，水必沸腾；向上抛一石子必然下落等。我们过去所学的微积分和线性代数等就是研究这类现象的数学工具。另一类是不能预言其结果的，即使在相同条件下，重复进行试验或观测，其结果未必相同，而且在每次试验之前并不能确切预料将出现什么结果，这类现象称为偶然现象或随机现象。例如，投掷一枚质地均匀而对称的硬币，其结果可能是正面（国徽面）向上，也可能是反面（币值面）向上；一射手，远距离射击较小目标，其结果可能击中，也可能击不中等。

随机现象既然无法预言其结果，它是否就无规律可循呢？人们经过长期的实践发现，所谓不可预言，只是对一次或少数几次试验观测而言，而在相同条件下进行大量的试验和观测，它们却呈现出明显的规律性。例如，投掷一枚质地均匀而对称的硬币多次，就会发现出现正面和反面次数的比约为1:1。概率论与数理统计正是研究和揭示这种随机现象的统计规律性的一

门数学学科。由于随机现象的普遍存在，这就使得概率统计的概念与方法具有普遍的意义，它的结果也有着广泛的应用。

二、随机试验与事件

我们这里所说的试验，它包括各种各样的科学实验，也包括对某一事物的某一特征的观测。如果一个试验具有以下三个特征：

1.可在相同的条件下重复地进行；

2.每次试验的可能结果不止一个，并且能事先明确试验的所有可能结果；

3.进行一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。

则称此试验为**随机试验**，简称**试验**，并记作 E。今后所说的试验都是指随机试验。现举例如下：

例1 E_1：投掷一枚质地均匀而对称的硬币，观察其出现正面或反面；

例2 E_2：从一批产品中，依次取10件，记录出现正品与次品的件数；

例3 E_3：记录某电话交换台一分钟内接到的呼唤次数；

例4 E_4：在一批灯泡中，任取一只，测试它的寿命。

我们就是通过研究随机试验来研究随机现象的。

在随机试验中，对一次试验可能出现也可能不出现，而在大量重复试验中却具有某种规律性的事情，称之为此随机试验的**随机事件**，简称**事件**。通常用字母A、B、C…表示。

例如，在例2中“没有次品”，“有一件次品”，“有两件次品”，…，“10件都是次品”。显然，这些都是随机事件，因为它们是这个试验的最简单的随机事件，我们称这些事件为

基本事件。此外，如“次品数不超过3”，“次品数大于3”，“次品数为偶数”，“次品数为奇数”等等，也都是随机事件；不过，这些事件都是由前面的一些基本事件复合而成的，称为复合事件。如“次品数不超过3”这一事件，它是由“没有次品”，“有一件次品”，“有两件次品”和“有三件次品”所组成，当且仅当这四个基本事件之一发生，“次品数不超过3”这一事件才发生。

一般地，我们把在一定条件下和一定范围内不能再分解的事件称为**基本事件**，而由多个基本事件组成的事件，称为**复合事件**。

在试验E中，把必然发生的事件，称为**必然事件**，记作Ω；不可能发生的事件，称为**不可能事件**，记作ϕ。例如，在例2中，“次品数不超过10”是必然事件，“次品数大于10”是不可能事件。必然事件和不可能事件都是确定性现象，但为了以后讨论问题方便，我们把它们也看作为两个特殊的随机事件。

三、样本空间

为了利用点集的知识讨论随机事件，我们引入样本空间的概念。

所谓**样本空间**是指随机试验的所有基本事件组成的集合。它作为事件是一个必然事件，也记作Ω。Ω中的元素就是试验的基本事件，基本事件也称**样本点**，用e表示。包含n个基本事件$e_1, e_2, \cdots, e_n$的试验的样本空间记作

$$\Omega=\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$$

例如，在例2中，记e_i表示“有i件次品”的事件，$i=0, 1,$

2，…，10，则

$$\Omega=\{e_0, e_1, \cdots, e_{10}\}$$

试验E的任一事件，都是样本空间Ω的某些样本点所组成的集合，因而事件可定义为Ω的子集。而且事件发生，当且仅当子集中的一个样本点发生。如在例2中，设A表示"次品数不超过3"的事件，则$A=\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$，A是Ω的子集。因此，在进行某一随机试验时，弄清它的样本空间是由哪些样本点组成，以及某个事件是由哪些样本点组成是十分重要的。

例5 写出下列试验的样本空间。

（1）掷投一颗骰子，观察其发生的点数；

（2）投掷3枚硬币，观察其正面（记作H），反面（记作T）出现的情况；

（3）从A、B、C、D、E 5本书中，任取3本，观察其出现的情况；

（4）一分钟内，观察某电话交换台接到的呼唤次数；

（5）在一批灯泡中，任取一只，观察其使用寿命。

解（1）设e_i表示出现i点的事件，（$i=1, 2, \cdots, 6$）

则 $$\Omega=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}。$$

（2）我们用HHH表示甲、乙、丙3枚硬币都出现正面，HHT表示甲、乙两硬币出现正面，丙硬币出现反面的事件，其余类推，则投掷三枚硬币的试验的样本空间为

$$\Omega=\{HHH, HHT, HTH, THH, HTT, THT, TTH, TTT\}。$$

（3）以ABC表示取到的书一本是A，一本是B，一本是C，其余类推，则从5本书中任取3本书的样本空间为

$\Omega=\{ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE\}$。

(4) 以w_i表示接到i次呼唤的事件，($i=0, 1, 2, 3, \cdots$)

则 $\Omega=\{w_0, w_1, w_2, \cdots\}$

(5) 以w_t表示灯泡使用寿命为t小时的事件。则

$\Omega=\{w_t|0\leqslant t\leqslant T\}$

四、事件的关系与运算

在实际问题中，在同样条件下发生的一些事件，往往不是孤立的，而是彼此之间有联系的。研究几个事件及它们之间的联系，不仅能帮助我们更深入的认识事件的本质，而且可以大大简化一些复杂的事件。

为了直观地表示事件之间的关系，我们常用平面上的一个矩形表示样本空间，矩形内的每一点表示样本点，矩形中的圆A和圆B分别表示事件A与事件B。

1．事件的包含及相等

如果事件A发生必然导致事件B发生，则称事件B**包含事件A**，记作$A\subset B$（或$B\supset A$），此时称A是B的**子事件**。［如图1－1 (a)］。

例如，投掷一颗骰子，设A表示出现两点的事件，B表示出现偶数点的事件，则$B\supset A$。

又例如，一圆柱形零件，如它的直径及高度都合格，则说这个零件是合格的。显然，直径不合格必导致产品不合格，所以产品不合格包含直径不合格。

如果$A\supset B$与$B\subset A$同时成立，则称事件A与事件B**相等**，记作$A=B$。如“直径与长度都合格”必导致“产品合格”，

反之，“产品合格”必导致“直径与长度都合格”。所以“直径与长度都合格”与“产品合格”是相等的。

2。事件的并（和）

“两个事件A、B中至少有一个发生”的事件，称为A与B的并（或和），记作$A\cup B$。[如图1-1(b)]

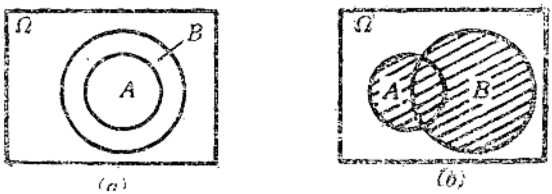


图 1-1

例如，“产品不合格”就是“直径不合格”与“长度不合格”的并。又如，一个盒子中有10个完全相同的球，分别标以1、2、3、…10，从中任取一球，设

$A=\{$球的标号为偶数$\}$

$B=\{$球的标号$\leqslant 3\}$

则　　$A\cup B=\{$球的标号为1，2，3，4，6，8，10$\}$

两事件的并（或和）的概念可以推广到多于两个事件的并的情况，即n个事件A_1、A_2、…A_n的并记作$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$（简记为$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$），它表示事件$A_1$、$A_2$、…、$A_n$中至少有一个发生。例如，上例中，记　$A_i=\{$取得球的标号为$i\}$；$C=\{$球的标号$\leqslant 5\}$。则$C=A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4\cup A_5$。

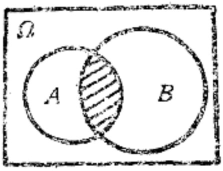
3。事件的交（积）

“两事件A、B同时发生”的事件，称为A与B的交（或

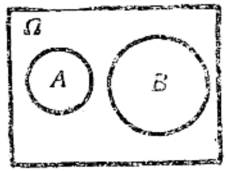
积），记作$A \cap B$或记为AB。〔如图1-2(a)〕，例如“产品合格”便是“直径合格”与“长度合格”的交。又如在上例中，$A \cap B=\{$球的标号为2$\}$。类似地，“事件A_1，$A_2, \cdots, A_n$同时发生”的事件，称为A_1，$A_2, \cdots, A_n$的交(或积)，记作$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$（简记为$\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$）

4．互斥事件

如果事件A与事件B不能同时发生，即$AB=\phi$，则称事件A与B**互斥**（**或互不相容**）〔如图1-2(b)〕。例如，投掷一枚硬币，“出现正面”与“出现反面”是互斥的。又如，“一分钟内电话交换台接到呼唤次数多于10次”和“一分钟内接到呼唤次数少于10次”是互斥的。



(a)



(b)

图 1-2

如果A、B是互斥事件，则$A \cup B$常写为$A+B$。如果n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$（或无穷多个事件A_1, A_2, $A_3, \cdots$, $A_n, \cdots$）两两互斥，则称A_1，A_2，$\cdots A_n$（或A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$）互斥。

5．对立事件

如两事件A、B必发生其一，且仅发生其一，即$A \cup B=\Omega$，且$A \cap B=\phi$，则称A与B**互逆**，或称A是B的**对立事件**（或B是A的对立事件）。记事件A的对立事件为$\overline{A}$〔如图1-3(a)〕。

例如，“产品合格”与“产品不合格”是对立事件，“一分钟内接到电话”与“一分钟内没有接到电话”也是对立事件。

注意：互逆必互斥，但互斥未必互逆。

6．事件的差

“事件A发生而事件B不发生”所组成的事件，称为事件A与事件B的差，记作$A-B$[如图1-3(b)]。

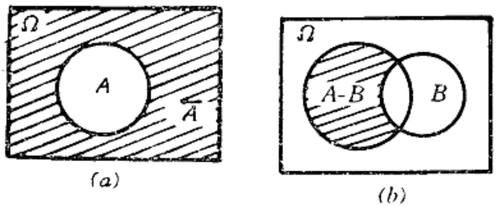


图 1-3

例如，“直径合格但长度不合格”是“直径合格”与“长度不合格”的差。

例6 设一批零件，有正品也有次品，从这批零件中任意抽取 7 件，用A、B分别表示下列事件。

A：抽到的次品数不多于3（即取得的次品数为：0，1，2或3）。

B：抽到的次品数为奇数（即取得的次品数为1，3，5或7）。

问：事件$A\cup B$；AB；$A-B$；$\overline{B}$各表示什么意思。

解 $A\cup B$：取到的次品数为：0，1，2，3，5或7。

AB：取到的次品数为：1或3。

$A-B$：取到的次品数为：0或2。

$\overline{B}$：取到的次品数为偶数：即0，2，4或6。

例7 如图1-4所示的电路中，以A表示"信号灯亮"这一事件，以B、C、D分别表示继电器接点Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ闭合等事件，则

$BC\subset A$，$BD\subset A$，

$BC\cup BD=A$

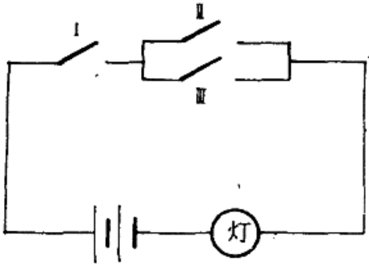


图 1-4

解 因为BC发生，即开关Ⅰ、Ⅱ同时闭合，则整个电路接通，于是灯泡亮，即A发生，所以$BC\subset A$，同理可说明$BD\subset A$。

如果$BC\cup BD$发生，即BC或BD中至少有一个发生，则整个电路通，于是灯泡亮，所以

$BC\cup BD\subset A$

反之，如A发生，即灯泡亮，则BC或BD中至少有一个发生，所以，$A\subset BC\cup BD$，由事件相等的定义，知$BC\cup BD=A$。

上述事件间的关系与集合论中集合之间的关系是相互对应的，为便于比较，列表1-1。

从集合的运算规则，可以得到事件的运算规则。

(1) $A\cup B=B\cup A$，$AB=BA$；

(2) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，$(AB)C=A(BC)$；

(3) $(A\cup B)C=AC\cup BC$，

$(A\cup C)(B\cup C)=AB\cup C$；

(4) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

表 1.1

记号	概率论	集合论
Ω	样本空间，必然事件	全集
ϕ	不可能事件	空集
e	基本事件	元素
A	事件	子集
$A\subset B$	事件A发生导致事件B发生	A是B的子集
$A=B$	事件A与事件B相等	集合A与集合B相等
$A\cup B$	事件A与事件B的并	集合A与集合B的并集
$A\cap B$	事件A与事件B的交	集合A与集合B的交集
$\overline{A}$	事件A的逆(或对立)事件	集合A的余集
$A-B$	事件A与事件B的差	集合A与集合B的差集
$A\cap B=\phi$	事件A与事件B互斥	集合A与集合B无公共元素

练 习 1.1

1. 指出下列事件中，哪些是必然事件？哪些是不可能事件？哪些是随机事件？

(1) 袋中有10只球，其中有6只黑球，4只红球，$A=\{$任取一球，取得的是红球$\}$，$B=\{$任取一球，取得是白球$\}$，$C=\{$从中任取5只球，至少有一只是黑球$\}$。

(2) $D=\{$某公共汽车站有两人在候车$\}$；

(3) $E=\{$方程$ax^2+bx+c=0$有两个实根$\}$；

2. 写出下列随机试验的样本空间：

(1) 投掷一枚硬币，观察正、反面向上情况；

(2) 甲乙两人下棋一局，观察棋赛的结果；

(3) 从包含两件次品(记作a_1, a_2) 和三件正品 (记作b_1, b_2, b_3) 的五件产品中，任意取出两件。

3 下列各式，分别表示A、B之间有什么包含关系？

(1) $A\cap B=A$ (2) $A\cup B=A$

4 图书馆中任选一本书，设$A=\{$数学书$\}$；$B=\{$中文版的$\}$；$C=\{$90年后出版的$\}$，问：

(1) $A\cap B\cap \overline{C}$ 表示什么事件？

(2) 在什么条件下有$A\cap B\cap C=A$？

(3) $\overline{C}\subset B$表示什么意思。

5. 指出下列命题中哪些成立？哪些不成立。

(1) $A\cap B=A\overline{B}\cup B$; (2) $A\cup B=\overline{A}B$

(3) $(AC)(A\overline{C})=\phi$ (4) $\overline{AB}=\overline{A}\,\overline{B}$

(5) $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cup\overline{B}$

§1.2 随机事件的概率

当我们观察一个随机试验的各种事件时，常常发现有些事件出现的可能性大些，有些事件出现的可能性小些，有些事件出现的可能性彼此大致相同。因此，研究随机事件出现可能性大小，揭示出现这些事件的内在的统计规律性，在生产实践中具有重要的意义。为了研究事件发生的可能性，就需要用一个数字来描述这种可能性的大小，我们把刻划这种可能性大小的数量指标叫做事件的概率。事件A、B、C的概率分别用$P(A)$、$P(B)$、$P(C)$表示。

一、古典概型 概率的古典定义

先考察两个例子：

例1 掷一颗匀称的骰子，其结果是出现的点数为1，2，3，4，5，6这六种情况之一，由于匀称性，六种情况中的任何一种出现的可能性应该完全一样，即每种情况出现的可能性都是1/6。出现点数为偶数的可能性就是3/6，出现点数为3的倍数的可能性就是2/6。

例2 设盒子中有20个零件，其中有5个次品，15个正品，今从盒子中任意取出一个，由于零件完全一样，所以每一个零件被取出的可能性完全一样，即都是1/20，取到正品的可能性就是15/20。

上述两例，有两个共同的特点：

（1）试验的全部基本事件个数是有限的（例1中有六个基本事件，例2中有20个基本事件。）

（2）每一个基本事件发生的可能性是相等的。

具有上述两个特点的试验，叫做**古典型试验**。

定义 设试验E满足条件

（1）它的样本空间只有有限个基本事件；

（2）每一个基本事件发生的可能性相等，则称E是**古典型的随机试验**。在古典试验下，如果基本事件的总数为n（n为有限数），事件A由m个（$m\leqslant n$）基本事件组成。则事件A发生的概率$P(A)$定义为

$$P(A)=\frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}}{\text{试验的基本事件总数}}=\frac{m}{n} \tag{1.1}$$