21世纪高职高专规划教材

微积分基础

◆ 主　编　马君儿

◆ 副主编　边文莉　王文慧

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

21世纪高职高专规划教材

责任编辑：周艳红

封面设计：彩多设计 MULTI COLOUR

ISBN 978-7-5640-1639-5

9 787564 016395 >

定价：19.00元

21 世纪高职高专规划教材

微积分基础

马君儿　主　编

边文莉　王文慧　副主编

北京理工大学出版社
BEIJING INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分基础/马君儿主编 . —北京:北京理工大学出版社,2008.6
ISBN 978 - 7 - 5640 - 1639 - 5

Ⅰ. 微… Ⅱ. 马… Ⅲ. 微积分 - 高等学校 - 教材 Ⅳ. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 094408 号

出版发行 / 北京理工大学出版社
社　　址 / 北京市海淀区中关村南大街 5 号
邮　　编 / 100081
电　　话 / (010)68914775(办公室) 68944990(批销中心) 68911084(读者服务部)
网　　址 / http://www.bitpress.com.cn
经　　销 / 全国各地新华书店
印　　刷 / 北京国马印刷厂
开　　本 / 787 毫米 ×960 毫米 1/16
印　　张 / 9
字　　数 / 180 千字
版　　次 / 2008 年 6 月第 1 版 2008 年 6 月第 1 次印刷
印　　数 / 1 ~ 3000 册　　　　责任校对 / 陈玉梅
定　　价 / 19.00 元　　　　责任印制 / 吴皓云

前　　言

为了进一步适应高职高专院校《高等数学》基础课教学，按照“必需、够用为度”的原则，在认真研究国内同类数学教材的基础上，取长补短编写而成这本《微积分基础》，可供高职高专经济、管理类等专业学生作试用教材或教学参考书。本书基本概念的引入自然，理论介绍浅显易懂，通过大量典型实例的求解，注重培养学生的应用能力。

极限的$\varepsilon-N$与$\varepsilon-\delta$定义书中不作介绍，有些内容加注了*号，作为选学内容。

本书由马君儿主编，其中第 1 章、第 5 章由王文慧编写，第 2 章、第 3 章由边文莉编写，第 4 章、第 6 章由马君儿编写。全书由马君儿负责审稿。在编写过程中得到了相关领导及数学教研室同事的大力支持，在此表示感谢。

由于编者水平有限，加上时间仓促，书中难免会有不足之处，恳请读者指正！

编者

目　录

第1章　函　数

§1-1　函数的概念

函数概念是客观世界中变量之间相互依赖关系的反映，是刻画运动变化中变量相依关系的数学模型. 函数既是高等数学中最重要的基本概念之一，也是微积分研究的主要对象. 为了研究事物在变化过程中的数量变化规律，首先必须区分常量和变量.

一、常量与变量

人们在观察自然现象、研究某些实际问题或从事生产的过程时，常常会遇到很多量，如面积、体积、长度、时间、速度、温度等. 量是数学最基本的研究对象，在我们讨论的问题中，一般可以分为两类，一类是在过程进行中保持不变的量，这一类量称为常量，如火车在两站之间的运价，全部行李的质量等，常量通常用字母 $a,b,c\cdots$ 来表示；另一类是在过程进行中不断变化的量，可以取得不同的值，这一类量称为变量，如火车在两站之间运行的速度等，变量通常用字母 $x,y,z,u,v\cdots$ 来表示.

应当注意，在研究一些特定的自然现象时，同一个量在这一现象中是常量，而在另一现象中却是变量. 例如速度，在匀速运动中是常量，在匀加速运动中是变量. 还须注意事物的变动是绝对的，而静止是相对的. 因此，说某个量是常量，总是相对于一定的问题或在一定的环境下讲的. 例如，火车在两站之间的行驶速度，在开始阶段或刹车阶段是变量，在正常行驶阶段作严格匀速行驶，则速度就是常量.

二、区间

区间是微积分中常用的实数集合，是指介于某两个实数之间的全体实数. 这两个实数叫做区间的端点.

定义 1.1　设 a,b 是两个实数，且 $a<b$. 则数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为以 a,b 为端点的开区间，记作 (a,b)，即 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$，如图 1-1 所示；

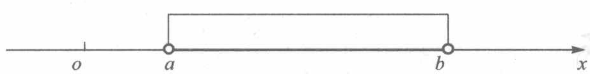

图 1-1

同样地，$\{x|a \leqslant x \leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，如图 1-2 所示；

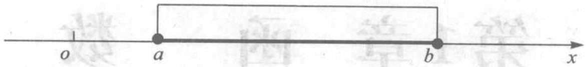

图 1-2

$\{x|a \leqslant x < b\}$ 称为半开区间，记作 $[a,b)$；

$\{x|a < x \leqslant b\}$ 称为半开区间，记作 $(a,b]$.

以上区间称为有限区间，有限区间的长度为 $(b-a)$. 除了这些有限区间外，还有各种无限区间：

$[a,+\infty)=\{x|a \leqslant x\}$、$(a,+\infty)=\{x|a < x\}$、$(-\infty,b)=\{x|x < b\}$、

$(-\infty,b]=\{x|x \leqslant b\}$、$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty < x < +\infty\}$

特别注意，$-\infty$，$+\infty$ 分别读作负无穷大、正无穷大，它们不是数，仅仅是记号.

以后为了使叙述简洁，常用“区间 I ”来代表上述各类有限或无限区间，读者应该注意 I 的具体所指.

三、邻域

定义 1.2 设 x_0,δ 为两个实数，且 $\delta > 0$，数集 $\{x||x-x_0| < \delta\}$ 称为点 x_0 的 δ 邻域，记作 $U(x_0,\delta)$，即 $U(x_0,\delta)=\{x||x-x_0| < \delta\}$.

因为不等式 $|x-x_0| < \delta$ 等价于 $x_0-\delta < x < x_0+\delta$，在数轴上它表示到点 x_0 的距离小于 δ 的所有点的集合，即 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. 所以称 x_0 为邻域中心，δ 为邻域半径. 如图 1-3 所示.

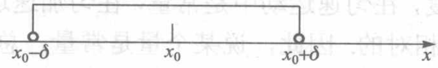

图 1-3

例 1 $U(2,1)=\{x||x-2| < 1\}$ 是以点 $x_0=2$ 为中心，以 $\delta=1$ 为半径的邻域，即开区间 $(1,3)$.

有时要用到去掉中心的邻域，把邻域 $U(x_0,\delta)$ 的中心去掉，所得到的数集 $\{x|0<|x-x_0|<\delta\}$ 称为点 x_0 的 δ 去心邻域，记为 $\overset{0}{U}(x_0,\delta)$，即

$$\overset{0}{U}(x_0,\delta)=\{x|\ 0<|x-x_0|<\delta\}=(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$$

例 2 $\overset{0}{U}(2,3)=\{x|\ 0<|x-2|<3\}$ 为以 2 为中心，以 3 为半径的去心邻域，即为开区间 $(-1,2)\cup(2,5)$.

四、函数的概念

在研究某一自然现象或实际问题时，往往会发现问题中存在多个不断变化的量，这些变

量并不都是彼此独立变化的，它们之间相互联系，相互依赖，并按照一定的规律变化着.

例3 物体在时刻$t=0$时从高度为h处自由下落（空气阻力忽略不计），设时刻t下落的距离为s，则s与t之间有如下的依存关系：

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

其中，g为重力加速度.

例4 斜边为10但两腰不固定的直角三角形，一腰长度为a，与它所对应的角为A，则a与A之间有如下的依存关系：

$$a=10\sin A$$

不难看出，上面两个例子中s与t，a与A存在确定的对应关系，把这种单值对应关系抽象化就得函数的概念.

定义1.3 设有x和y两个变量，D是一个给定的非空数集，若对于任意一个$x\in D$，变量y按照一定的对应法则f总有确定的数值与之对应，则称y是x的函数，记作

$$y=f(x),\quad x\in D$$

其中，x称为自变量，y称为因变量，数集D称为这个函数的定义域.

如果对于自变量x的某个确定的值$x_0\in D$，通过对应法则f，因变量y有唯一确定的值y_0与之对应，则称函数$y=f(x)$在x_0处有定义，y_0为函数$y=f(x)$在x_0处的函数值，记作$y_0=f(x_0)=y\big|_{x=x_0}$.

当自变量x取遍D的所有数值时，函数值的集合$W=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$称为函数的值域.

例5 设$f(x)=2x^2-3$，求$f(0)$、$f(2)$、$f(x_0)$、$f\left(\frac{1}{a}\right)$.

解 $f(0)=2\times0^2-3=-3$

$f(2)=2\times2^2-3=5$

$f(x_0)=2{x_0}^2-3$

$$f\left(\frac{1}{a}\right)=2\times\left(\frac{1}{a}\right)^2-3=\frac{2-3a^2}{a^2}$$

说明：由函数的定义可以看出函数关系包含下面两个要素：

（1）自变量的取值范围，即函数的定义域D；

（2）自变量与因变量的对应法则f.

而函数的值域可由定义域及对应法则所确定. 因此，当函数的定义域和函数的对应法则确定以后，这个函数就完全确定了，对两个函数来说，当且仅当它们的定义域和对应法则分别都相同时，这两个函数才表示同一个函数. 至于用什么字母来表示自变量和因变量，则仅仅是一个形式问题.

对于函数的定义域，在实际问题中应根据问题的实际意义具体确定. 如例 3 中定义域为 $\left[0,\sqrt{\dfrac{2h}{g}}\right]$，但是式子 $s=\dfrac{1}{2}gt^2$ 对任何实数 t 都有意义.

例 6 判断下列每组的两个函数是否表示同一个函数.

（1）$y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 与 $y=x+1$；（2）$y=\ln x^2$ 与 $s=2\ln|t|$

解 （1）函数 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ 的定义域为 $(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$，而函数 $y=x+1$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，即两个函数的定义域不同，尽管 $y=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1\ (x\neq 1)$，两个函数的对应法则相同，但不是同一个函数.

（2）函数 $y=\ln x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；而函数 $s=2\ln|t|$ 的定义域也是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，所以两个函数的定义域相同. 又

$$s=2\ln|t|=\ln|t|^2=\ln t^2$$

所以两个函数的对应法则也相同. 尽管两个函数的自变量、因变量所用的字母不同，但两个函数表示同一个函数.

例 7 设 $f(x+3)=\dfrac{x+1}{x+2}$，求 $f(x)$.

解 令 $t=x+3$，则 $x=t-3$

故 $f(t)=\dfrac{(t-3)+1}{(t-3)+2}=\dfrac{t-2}{t-1}$

故 $f(x)=\dfrac{x-2}{x-1}$

如果讨论的是纯数学问题，不考虑实际意义，函数的定义域就是使函数的表达式有意义的一切实数所构成的集合，这种定义域又称为函数的自然定义域. 如函数 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x-1}$ 的定义域为 $[-2,1)\cup(1,2]$；函数 $f(x)=\lg(1-x)+\sqrt{x+2}$ 的定义域为 $[-2,1)$；函数 $y=\arcsin\dfrac{2x-1}{7}$ 的定义域为 $[-3,4]$.

如果自变量取定义域内的任一数值时，对应的函数值只有一个，这样的函数叫做单值函数，否则叫做多值函数. 今后若无特别声明，所提及的函数都是单值函数.

五、函数的表示法

最常见的函数表示方法有 3 种：表格法、图像法和解析法.

（1）表格法. 将自变量的值域对应的函数值列成表的方法，称为表格法. 如平方表、三角

函数表等都是用表格法表示的函数关系.

例 8　保险丝的熔断电流 I（单位：A）和直径 D（单位：mm）之间有如下表所示的关系：

直径 D/mm	0.508	0.559	0.61	0.71	0.813	0.915	1.22	3.0	3.5	4.0	5.0	6.0	7.0	10.00
熔断电流 I/A	1.63	1.83	2.03	2.34	2.65	2.95	3.26	16.0	19.0	22.0	27.0	32.0	37.0	44.00

从表中由直径 D 可读出对应的 I 值. 表格法的特点是简明方便，缺点是自变量的取值有限.

（2）图像法. 在坐标系中用图形来表示函数关系的方法，称为图像法.

图像法的特点是形象直观，富有启发性，一目了然.

（3）解析法. 将自变量和因变量之间的关系用数学式子来表示的方法，称为解析法，也称为公式法. 微积分中涉及的函数大多用解析法表示，其特点是精确、完整，便于理论上的分析研究.

有时会遇到这样的函数，自变量在定义域的不同的变化范围内，对应法则用不同的解析式表示，这样的函数称为分段函数.

例 9　函数 $y=|x|=\begin{cases} x, & x\geqslant 0 \\ -x, & x<0 \end{cases}$

定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为 $W=[0,+\infty)$，其图形如图 1-4 所示.

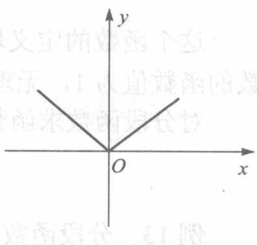

图 1-4

例 10　函数 $y=\operatorname{sgn} x=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 0, & x=0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$ 称为符号函数.

它的定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$，其图形如图 1-5 所示.

利用该函数可以改变某些函数的表达形式，如例 9 中函数可改写为

$$y=|x|=x\cdot\operatorname{sgn} x$$

例 11　设变量 y 为不超过 x 的最大整数部分，记为 $[x]$，则

$$y=[x]=\begin{cases} & \cdots \\ -2, & -2\leqslant x<-1 \\ -1, & -1\leqslant x<0 \\ 0, & 0\leqslant x<1 \\ 1, & 1\leqslant x<2 \\ 2, & 2\leqslant x<3 \\ & \cdots \end{cases}$$

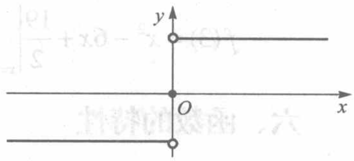

图 1-5

它的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，值域为一切整数，其图形如图 1-6 所示，称为阶梯曲线，此函数称为取整函数.

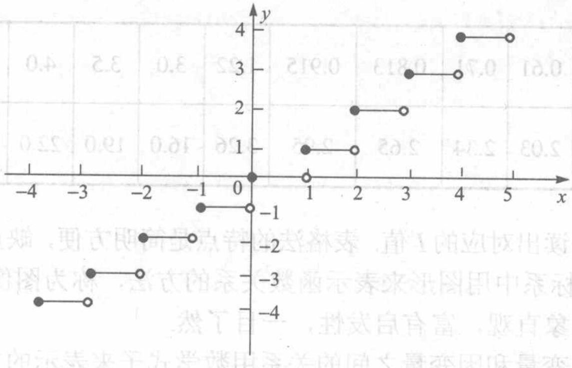
图 1-6

例 12 狄利克雷（Dirichlet）函数

$$y=D(x)=\begin{cases}1, & x\text{是有理数}\\0, & x\text{是无理数}\end{cases}$$

这个函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，在整个数轴上，把定义域全体实数分成两类，有理数的函数值为 1，无理数的函数值为 0，但无法画出它的图像.

对分段函数求函数值时，应把自变量的值代入相应范围的表达式中去计算.

例 13 分段函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x\ , & 0\leqslant x<1\\ x\ , & 1\leqslant x<2\\ x^2-6x+\dfrac{19}{2}\ , & 2\leqslant x<4\end{cases}$，求 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, $f(1)$ 及 $f(3)$.

解 $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}x\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4}$；

$f(1)=x\big|_{x=1}=1$；

$f(3)=x^2-6x+\dfrac{19}{2}\Big|_{x=3}=\dfrac{1}{2}$.

六、函数的特性

1. 有界性

定义 1.4 设函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若存在一个常数 $M>0$，对任意的 $x\in I$，恒有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $y=f(x)$ 是 I 上的有界函数；若这样的常数 M 不存在，则称函数 $y=f(x)$ 在 I 上无界.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为它在定义域 $(-\infty,+\infty)$ 内有 $|\sin x|\leqslant 1$（取 $M=1$）.

注意：有可能出现以下的情况：函数在其定义域上的某一部分是有界的，而在另一部分是无界的，因此，讲一个函数是有界的或无界的，必须指出其相应的范围.

例如，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $[2,+\infty)$ 上有界，因为对任意 $x\in[2,+\infty)$，都有 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}$（取 $M=\dfrac{1}{2}$）；但函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,2)$ 上无界，因为不存在 $M>0$，使得 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant M$ 对 $(0,2)$ 内任意的 x 都成立.

有界函数的几何特征是：它的图像位于两条直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

2. 单调性

定义 1.5 设函数 $y=f(x)$ 在某区间 I 上有定义，若对于区间 I 内的任意两点 x_1 及 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 单调增加，区间 I 称为单调增加区间；当 $x_1<x_2$ 时，总有 $f(x_1)\geqslant f(x_2)$，则称函数 $f(x)$ 在 I 单调减少，区间 I 称为单调减少区间.

单调增加和单调减少的函数统称为单调函数，单调增加区间和单调减少区间统称为单调区间.

例如，函数 $y=2x^2+1$ 在 $(-\infty,0)$ 上是单调减少的，在 $(0,+\infty)$ 上是单调增加的，而在 $(-\infty,+\infty)$ 上，函数 $y=2x^2+1$ 不是单调函数.

由此可见，有些函数在整个定义域上不是单调的，但却存在单调区间.

3. 函数的奇偶性

定义 1.6 设函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对于任何 $x\in D$，有 $f(x)=f(-x)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是偶函数；若有 $f(x)=-f(-x)$，则称函数 $f(x)$ 在 D 上是奇函数.

偶函数的图形关于 y 轴对称，奇函数的图形关于原点对称.

例如，函数 $y=\sin x$ 是奇函数，函数 $y=\cos x$ 是偶函数.

例 14 判断 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$，$x\in(-1,1)$ 的奇偶性.

解 $f(-x)=\lg\dfrac{1+x}{1-x}=\lg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1}=-\lg\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x)$

所以函数 $f(x)=\lg\dfrac{1-x}{1+x}$ 在 $x\in(-1,1)$ 时是奇函数.

例 15 判断函数 $y=\log_a(x+\sqrt{1+x^2})$（$a>0,a\neq1$）的奇偶性.

解 函数的定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$，关于原点对称，由于

$$f(-x)=\log_a(-x+\sqrt{1+(-x)^2})=\log_a(-x+\sqrt{1+x^2})$$

$$=\log_a\left(\frac{1+x^2-x^2}{x+\sqrt{1+x^2}}\right)=-\log_a(x+\sqrt{1+x^2})=-f(x)$$

所以 $f(x)$ 是奇函数.

4. 函数的周期性

定义 1.7　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，若存在常数 $T\neq 0$，对于任何 $x\in D$，有 $x+T\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称函数 $y=f(x)$ 是周期函数，T 称为 $f(x)$ 的周期. 满足等式的最小正数 T 称为基本周期或最小正周期，通常周期函数的周期是指最小正周期，简称周期.

周期函数图像的特点是：周期为 T 的函数，只要描出它在任一区间 $[a,a+T]$ 上的图像，然后将图像一个周期一个周期地左、右平移，就可得到整个周期函数的图像.

例如，函数 $y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的周期函数，$y=\tan x$ 是以 π 为周期的周期函数.

而 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ 的周期是 $T=\dfrac{2\pi}{|\omega|}$，$y=A\tan(\omega x+\varphi)$ 的周期 $T=\dfrac{\pi}{|\omega|}$.

例 16　$f(x)=x-[x], x\in(-\infty,+\infty)$ 的周期为 1，其图形如图 1-7 所示.

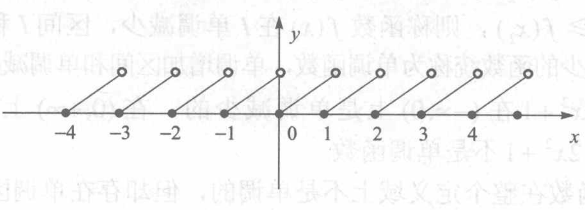

图 1-7

注意：关于函数的性质，除了有界性与无界性之外，单调性、奇偶性、周期性都是函数的特殊性质，而不是每一个函数都一定具备的.

七、反函数

在函数关系中，自变量和因变量的地位往往是相对的，可以把任意一个变量看成是自变量或因变量. 在研究过程中，哪个变量作为自变量，哪个变量作为因变量（函数）是由具体问题来决定的.

定义 1.8　设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 如果对于任意 $y\in W$，D 中都有唯一确定的 x 与 y 对应，且满足关系式 $y=f(x)$，则得到一个以 y 为自变量，x 为因变量的新函数，$x=\varphi(y)$ 或 $x=f^{-1}(y)$, 这个新函数就称为函数 $y=f(x)$ 的反函数，它的定义域为 W，值域为 D. 而 $y=f(x)$ 称为直接函数.

一个函数若有反函数，则有恒等式 $f^{-1}[f(x)]\equiv x$，$x\in D$；相应地有

$$f[f^{-1}(y)]\equiv y,\ y\in W$$

例如，直接函数 $y=f(x)=\dfrac{3}{4}x+3$，$x\in R$ 的反函数为 $x=f^{-1}(y)=\dfrac{4}{3}(y-3)$，$y\in R$；并且

有 $f^{-1}[f(x)]=\frac{4}{3}\left[\left(\frac{3}{4}x+3\right)-3\right]\equiv x$，$f\left[f^{-1}(y)\right]=\frac{3}{4}\left[\frac{4}{3}(y-3)\right]+3\equiv y$.

注：（1）习惯上用 x 表示自变量，y 表示因变量．因此，函数 $y=f(x)$ 的反函数可表示为 $y=f^{-1}(x)$.

（2）反函数 $x=f^{-1}(y)$ 与 $y=f^{-1}(x)$，这两种形式都要用到．应当说明的是函数 $y=f(x)$ 与它的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 具有相同的图形．而直接函数 $y=f(x)$ 与反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

求反函数的一般步骤是：从 $y=f(x)$ 中解出 x，得到 $x=f^{-1}(y)$，再将 x, y 互换，则 $y=f^{-1}(x)$ 就是 $y=f(x)$ 的反函数.

例 17　求 $y=\sqrt{1-x^2}$，$x\in[-1,0]$ 的反函数.

解　由 $y=\sqrt{1-x^2}$，解得 $x^2=1-y^2$，因为 $x\in[-1,0]$，则 $x=-\sqrt{1-y^2}$，$y\in[0,1]$．改变变量的符号，即得到所求的反函数 $y=-\sqrt{1-x^2}$，$x\in[0,1]$.

注意：并不是所有的函数都有反函数．例如，$y=c$（c 为常数）就没有反函数.

八、基本初等函数

常量函数、幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数这六类函数叫做基本初等函数．这些函数在中学的数学课程里已经学过.

1. 常量函数　$y=c$ (c 为常数)

定义域为 $(-\infty,+\infty)$，函数的图形是一条水平的直线，如图 1-8 所示.

2. 幂函数　$y=x^{\alpha}(\alpha\in\mathbf{R})$

它的定义域和值域依 α 的取值不同而不同，但是无论 α 取何值，幂函数在 $x\in(0,+\infty)$ 内总有定义．当 $\alpha\in\mathbf{N}$ 或 $\alpha=\frac{1}{2n-1}$，$n\in\mathbf{N}$ 时，定义域为 $\mathbf{R}$．常见的幂函数 $\alpha=1,2,3,-1$ 时的图形如图 1-9 所示.

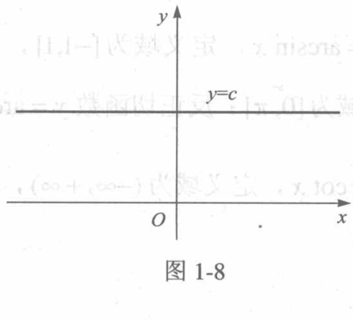

图 1-8

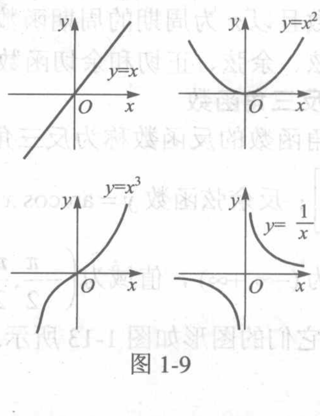

图 1-9

3. 指数函数　$y=a^x(a>0, a\neq 1)$

它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,+\infty)$．当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调减少．$y=a^x$ 和 $y=a^{-x}$ 的图像关于 y 轴对称．指数函数的图形如图 1-10 所示．

4. 对数函数　$y=\log_a x\,(a>0, a\neq 1)$

定义域为 $(0,+\infty)$，值域为 $(-\infty,+\infty)$．对数函数 $y=\log_a x$ 是指数函数 $y=a^x$ 的反函数．当 $a>1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 单调增加；当 $0<a<1$ 时，对数函数 $y=\log_a x$ 单调减少．其图形如图 1-11 所示．

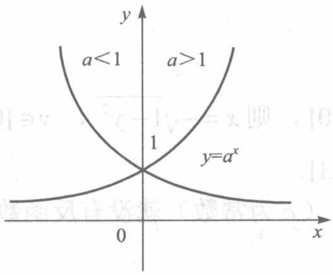

图 1-10

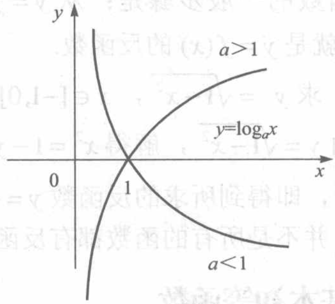

图 1-11

在工程中，常以无理数 e=2.718 281 828…作为指数函数和对数函数的底，并且记 $e^x=\exp x, \log_e x=\ln x$，而后者称为自然对数函数．

5. 三角函数

正弦函数 $y=\sin x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，是奇函数且以 2π 为周期的周期函数；余弦函数 $y=\cos x$，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $[-1,1]$，是偶函数且以 2π 为周期的周期函数；正切函数 $y=\tan x$，其定义域为 $x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，是奇函数且以 π 为周期的周期函数；余切函数 $y=\cot x$，其定义域为 $x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$，值域为 $(-\infty,+\infty)$，是奇函数且以 π 为周期的周期函数．三角函数还包括正割函数 $y=\sec x$ 和余割函数 $y=\csc x$．其中正弦、余弦、正切和余切函数的图形如图 1-12 所示．

6. 反三角函数

三角函数的反函数称为反三角函数．反正弦函数 $y=\arcsin x$，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$；反余弦函数 $y=\arccos x$，定义域为 $[-1,1]$，值域为 $[0,\pi]$；反正切函数 $y=\arctan x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$；反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$，定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $(0,\pi)$．它们的图形如图 1-13 所示．