

随机信号分析

沈允春 罗天放 沈东旭 编著

STOCHASTIC
SIGNAL
ANALYSIS



国防工业出版社

National Defense Industry Press

随机信号分析

沈允春 罗天放 沈东旭 编著



国防工业出版社

· 北京 ·

内 容 简 介

本书共分8章。包括概率论基础、随机过程、随机信号谱分析、随机信号通过线性系统、窄带随机过程、随机过程通过非线性系统,几种重要的随机过程以及马尔可夫过程。

本书避免纯理论纯数学研究,侧重物理概念及实际应用,叙述简洁易懂。

本书特别适用于通信与信息处理、雷达、声纳、控制等电子类专业的本科生和硕士研究生作教材,也可供相关专业科技人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

随机信号分析/沈允春,罗天放,沈东旭编著. —北京:
国防工业出版社,2008.11
ISBN 978-7-118-05919-9

I. 随... II. ①沈... ②罗... ③沈... III. 随机信号 -
信号分析 IV. TN911.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 129224 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 19 字数 434 千字

2008年11月第1版第1次印刷 印数 1—4000册 定价 32.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010)68428422

发行邮购: (010)68414474

发行传真: (010)68411535

发行业务: (010)68472764

前 言

随机现象的科学研究始于 17 世纪中叶,然而直到 1933 年苏联数学家柯尔莫哥洛夫出版了《概率论基础》一书,才奠定了将随机现象的科学研究作为数学的一个分支的基础。随着科学技术的发展,概率论和随机过程的理论在自然科学和社会科学领域得到了广泛的应用,它们也成为了高等学校许多专业本科生和研究生的必修课。

对随机现象的分析研究在通信与信息处理、雷达、声纳、电子对抗、导航、控制等电子类专业十分重要,本书正是针对这类专业的本科生和硕士研究生的需要编写的。书中除了介绍随机过程理论的基本理论外,重点讨论了随机信号的谱分析,随机信号通过线性和非线性系统,窄带随机过程。对几种重要的随机过程如维纳过程、泊松过程等也作了较为详细的介绍。而对于十分重要的马尔可夫过程本书单列一章专门讨论。为了适应计算机技术的飞速发展,本书对离散随机过程给予了特别关注。

本书侧重于物理概念和分析方法的介绍,避免纯理论纯数学的研究,注重实际应用。

学习本课程需有高等数学、概率论、信号与系统、数字信号处理、电子线路等方面的基础知识作先导。

本书既适用于本科生,也可用于硕士研究生作教材,也可供相关专业科技工作者参考。

由于作者水平有限,错误不当之处敬请批评指正。

编 者

目 录

第 1 章 概率论基础	1
1.1 随机试验和样本空间	1
1.1.1 样本空间 S	1
1.1.2 事件域 $\mathcal{F}$	2
1.1.3 概率 P	2
1.2 概率的几种类型	2
1.2.1 古典概率	2
1.2.2 几何概率	3
1.2.3 统计概率	4
1.3 条件概率	5
1.3.1 概述	5
1.3.2 全概率公式	7
1.3.3 贝叶斯公式	7
1.4 独立性	9
1.5 随机变量	10
1.5.1 随机变量的概念	10
1.5.2 一维随机变量的分布函数	11
1.5.3 离散型随机变量及其分布列	12
1.5.4 连续型随机变量	12
1.6 多维随机变量	13
1.6.1 二维随机变量的分布函数	13
1.6.2 二维离散型随机变量	14
1.6.3 连续型二维随机变量	14
1.6.4 边缘分布	15
1.7 条件分布和独立性	18
1.7.1 离散型随机变量的条件分布	18
1.7.2 连续型随机变量的条件分布	19
1.7.3 随机变量的独立性	21
1.8 随机变量函数的分布	23

1.8.1	一维随机变量函数的分布	24
1.8.2	二维随机变量函数的分布	27
1.8.3	二对一问题	29
1.9	随机变量的数字特征	30
1.9.1	数学期望	31
1.9.2	条件数学期望	31
1.9.3	随机变量的各阶矩	33
1.9.4	统计独立、互不相关、正交	36
1.10	随机变量的特征函数	38
1.10.1	特征函数的定义及其性质	38
1.10.2	特征函数与原点矩的关系	40
1.10.3	联合特征函数	41
1.11	正态随机变量	45
1.11.1	一维正态随机变量	45
1.11.2	多维正态随机变量	46
1.11.3	高斯随机变量的线性变换	49
1.12	极限定理	50
1.12.1	契比雪夫不等式	50
1.12.2	随机序列的收敛	51
1.12.3	弱大数定律	53
1.12.4	贝努里大数定律	53
1.12.5	中心极限定理	54
	习题	60
第2章	随机过程	65
2.1	随机过程定义和分类	65
2.1.1	随机过程的定义	65
2.1.2	随机过程的分类	66
2.2	随机过程的概率分布	66
2.2.1	随机过程的一维分布	66
2.2.2	随机过程的二维分布	67
2.2.3	随机过程的 n 维分布	67
2.2.4	条件分布	67
2.3	随机过程的数字特征	68
2.3.1	数学期望	68
2.3.2	均方值和方差	68

2.3.3	自相关函数和协方差函数	68
2.3.4	随机过程计算举例	69
2.4	随机过程的特征函数	75
2.4.1	一维特征函数	75
2.4.2	二维特征函数	75
2.5	随机过程的微分和积分	76
2.5.1	均方连续	76
2.5.2	随机过程的导数	77
2.5.3	随机过程导数的数学期望和自相关函数	78
2.5.4	随机过程的积分	79
2.6	随机过程的平稳性和遍历性	80
2.6.1	严平稳过程及其数字特征	80
2.6.2	宽平稳随机过程	81
2.6.3	随机过程的遍历性	84
2.6.4	平稳随机过程自相关函数的性质	85
2.6.5	平稳随机过程的相关系数和相关时间	88
2.7	随机过程的联合分布和互相关函数	89
2.7.1	两个随机过程的联合分布	89
2.7.2	互相关函数	90
2.8	复随机过程	93
2.8.1	复随机变量	93
2.8.2	复随机过程的性质	94
2.9	正态随机过程	96
2.9.1	正态随机过程的定义	96
2.9.2	平稳正态随机过程	97
2.9.3	正态随机过程的性质	97
2.10	离散时间随机过程	100
2.10.1	相关矩阵	100
2.10.2	时间序列模型	103
	习题	120
第3章	随机信号谱分析	123
3.1	随机过程的功率谱密度	123
3.1.1	随机过程功率谱密度的定义	123
3.1.2	功率谱密度和自相关函数的关系	124
3.2	平稳随机过程功率谱密度的性质	125

3.2.1	功率谱密度的性质	125
3.2.2	谱分解定理	125
3.3	离散时间随机过程的功率谱密度	128
3.3.1	平稳离散随机过程的功率谱密度	128
3.3.2	随机过程的采样定理	130
3.3.3	平稳随机过程功率谱密度的采样定理	132
3.4	随机过程的正交展开	133
3.4.1	确定性信号的正交展开	133
3.4.2	周期性随机过程的傅里叶级数展开	133
3.4.3	非周期性平稳随机过程的傅里叶级数展开式	135
3.4.4	窄带随机过程的傅里叶级数展开式	138
3.4.5	随机过程的卡亨南—勒维(K-L)展开	140
3.5	随机过程的互谱密度	149
3.5.1	互谱密度定义	149
3.5.2	互谱密度和互相关函数的关系	151
3.5.3	联合平稳随机过程互谱密度的性质	151
3.6	白噪声和物理谱密度	152
3.6.1	理想白噪声	152
3.6.2	理想低通白噪声	153
3.6.3	限带带通白噪声	153
3.6.4	物理谱密度	154
	习题	154
第4章	随机信号通过线性系统	157
4.1	随机信号通过线性系统的时域分析法	157
4.1.1	随机微分方程	157
4.1.2	冲激响应法	160
4.2	离散随机信号通过离散线性系统的时域分析	165
4.3	随机过程通过线性系统的频域分析法	166
4.3.1	连续时间随机过程通过线性系统的频域分析法	166
4.3.2	离散时间随机过程通过离散线性系统的频域分析法	168
4.4	白噪声通过线性系统	169
4.4.1	线性系统对白噪声的响应	169
4.4.2	等效噪声带宽	169
4.4.3	白噪声通过理想低通滤波器	170
4.4.4	白噪声通过理想带通滤波器	171

4.4.5	白噪声通过高斯频率特性线性系统	172
4.5	线性系统输出端随机过程的分布密度	173
4.5.1	输入是高斯过程时线性系统输出过程的概率分布	173
4.5.2	系统输入是非高斯过程,系统等效噪声带宽 Δf 远大于输入过程功率谱密度等效带宽 Δf_e	174
4.5.3	输入随机过程是非高斯过程,其功率谱密度等效带宽远大于系统带宽	174
	习题	175
第5章	窄带随机过程	179
5.1	引言	179
5.2	解析信号和解析过程	179
5.2.1	确定性信号的复数表示	179
5.2.2	希尔伯特变换	181
5.2.3	解析过程及其性质	182
5.3	窄带随机过程的表示式	184
5.3.1	窄带随机过程的莱斯(Rice)表示式	184
5.3.2	$a(t)$ 和 $b(t)$ 的性质	185
5.3.3	窄带随机过程的准正弦振荡表示式	188
5.4	窄带高斯随机过程包络和相位的分布密度	190
5.4.1	包络和相位的一维分布密度	190
5.4.2	包络和相位的二维分布密度	191
5.4.3	正弦型随机相位过程和窄带高斯噪声之和的包络及相位的分布密度	194
5.5	窄带高斯过程包络平方的分布密度	197
5.5.1	窄带高斯过程包络平方的分布密度	197
5.5.2	正弦型信号加窄带高斯噪声包络平方的分布密度	197
5.5.3	χ^2 分布和非中心 χ^2 分布	198
	习题	200
第6章	随机过程通过非线性系统	203
6.1	引言	203
6.2	直接法	204
6.2.1	平方律检波器	204
6.2.2	线性检波器	209
6.3	非线性变换的包络法	212
6.3.1	包络法分析方法	212
6.3.2	输出随机过程的数字特征	213
6.4	包络法的近似计算	216

6.4.1	检波器的微分方程	216
6.4.2	线性检波器	217
6.4.3	平方律检波器	219
6.5	非线性系统输出端的信噪比	220
	习题	221
第7章	几种重要的随机过程	223
7.1	独立随机过程	223
7.2	独立增量过程	224
7.2.1	独立增量过程和平稳独立增量过程	224
7.2.2	正交增量过程	226
7.3	维纳过程	227
7.3.1	布朗运动数学模型	227
7.3.2	维纳过程定义及其统计特性	228
7.3.3	维纳过程的性质	229
7.4	泊松过程	231
7.4.1	泊松过程定义及其统计特性	231
7.4.2	泊松增量过程	234
7.4.3	过滤泊松过程定义及其统计特性	235
7.4.4	到达时间间隔与等待时间的分布	237
7.4.5	更新计数过程	240
7.4.6	非齐次泊松过程	241
7.4.7	复合泊松过程	242
	习题	244
第8章	马尔可夫过程	246
8.1	马尔可夫过程定义及其分类	246
8.1.1	马尔可夫过程定义	246
8.1.2	马尔可夫过程分类	246
8.2	马尔可夫序列及其性质	247
8.2.1	马尔可夫序列定义	247
8.2.2	马尔可夫序列的性质	248
8.3	马尔可夫链	249
8.3.1	马尔可夫链的转移概率和转移概率矩阵	250
8.3.2	马尔可夫链的切普曼—柯尔莫哥洛夫方程(C-K)方程	250
8.3.3	马尔可夫链举例	252
8.3.4	马尔可夫链中状态的分类	257

8.3.5 $p_{ij}(n)$ 的渐近性质与平稳分布	272
8.3.6 举例	280
8.4 纯不连续马尔可夫过程	285
8.5 扩散过程	287
习题	288
参考文献	293

第 1 章 概率论基础

1.1 随机试验和样本空间

概率论是从研究赌博和机会游戏问题发展起来的。17 世纪中叶, 法国的贵族盛行赌博游戏, 通过掷骰子押点数决定输赢。赌徒们主要靠反复实践找规律寻求高的胜率。后来他们请教数学家帕斯卡(B.Pascal) 和拉普拉斯(P.S.Laplace), 请他们帮助解释赌博问题。二位数学家首次提出了用概率(Probability) 度量某一事件发生可能性的大小。他们用排列组合方法研究了一些较为复杂的赌博问题, 如“分赌注问题”、“赌徒输光问题”等。到了 18 世纪和 19 世纪, 随着科学技术的发展, 人们发现在生物、物理和社会领域同样有许多同机会游戏类似的现象, 从而推动人们对概率问题深入研究。

将概率论真正变成严谨的数学分支的奠基人是苏联数学家柯尔莫哥洛夫。他在 1933 年出版的《概率论基础》一书中第一次给出了概率的测度论定义和一套严密的公理体系。

概率论是研究随机现象规律性的科学, 人们把对随机现象的观测与考察称为随机试验 E。随机试验是科学试验的一部分。随机试验应当具备下列特性。

- (1) 可重复性: 试验可以在相同条件下重复进行;
- (2) 不可预测性: 每次试验前无法预测试验可能出现哪一个结果;
- (3) 可预见性: 试验前可以预见试验可能出现的全部结果。

抛硬币观察正反面的情况、掷骰子观察出现的点数、记录高速路上汽车流量、测试灯泡的使用寿命等都是随机试验的例子。

随机试验中出现的某种结果称为随机事件, 简称事件。事件可分为基本事件和复合事件。基本事件是指试验中的一个基本结果。基本事件应当具备互斥性和完备性。互斥性是指两个不同的基本事件不能在一次试验中同时出现; 完备性是指随机试验中必定会出现某一基本事件。例如, 掷一颗骰子一次, 出现的点数是 6 个基本事件。复合事件由若干个基本事件组合而成。例如, 掷一颗骰子一次出现偶数点是一个复合事件, 它由 $\{2, 4, 6\}$ 3 个基本事件组成。

伴随随机试验将出现一个概率空间。概率空间由 3 个要素构成, 即样本空间 S , 波雷尔域(Borel field)或事件域 $\mathcal{F}$, 在事件域中发生的概率 P 。

1.1.1 样本空间 S

样本空间 S 是随机试验 E 所有基本事件的集合。每个基本事件称为样本空间的一个样本点。组成样本空间的元素必须是基本事件而不能是复合事件。例如掷两颗相同的骰子, 观察点数之和为 7 这一随机试验的样本空间由 $\{(1,1)(1,2)\cdots(1,6)\cdots(6,1)(6,2)\cdots(6,6)\}$ 共 36 个样本点组成, 而不能认为是由 $\{2,3,\cdots,12\}$ 共 11 个样本点组成, 因为其中有一些是复

合事件，不能认为是样本点。但是对相同的随机试验，试验目的不同，样本空间构成是不一样的。例如，连掷一枚硬币 3 次观察正反面出现的情况，样本空间由 2^3 个样本点构成；如果是考察出现正面的次数，样本空间由 $\{0,1,2,3\}$ 4 个样本点构成。

1.1.2 事件域 $\mathcal{F}$

事件域 $\mathcal{F}$ 是样本空间 S 中某些子集组成的集合， $\mathcal{F}$ 要满足下列 3 个条件。

- (1) $\mathcal{F} \subset S$;
- (2) 若事件 $A \in \mathcal{F}$, 则 $\bar{A} \in \mathcal{F}$, 此处 $\bar{A}$ 是 A 的逆事件;
- (3) 若 $A_i \in \mathcal{F}, i=1,2,\dots$, 则 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.

1.1.3 概率 P

若定义于 $\mathcal{F}$ 上的实值集合函数 P 满足下列条件。

- (1) 若 $A \in \mathcal{F}, P(A) \geq 0$;
- (2) $P(S) = 1$;
- (3) 设 $A_i \in \mathcal{F}, i=1,2,\dots$ 且当 $i \neq j$ 时 $A_i A_j = \emptyset$, 则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

称 P 是概率测度。

若 $A = S$, 由上述条件(2), $P(A) = 1$ 意味着在试验 E 中 A 必然出现, 称它为必然事件。若 $A = \emptyset$ 为空集, $P(\emptyset) = 0$, A 称为不可能事件。显然 $P(S) = 1 - P(\emptyset)$ 。一般来说, 若 $A \cap B = \emptyset, A \cup B = S$, 称 A 与 B 是互斥事件或互逆事件。若 $A_i A_j = \emptyset (i \neq j, j=1,2,\dots,n)$ 则 $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$, $A_1, A_2, \dots, A_n$ 称为互不相容事件。

1.2 概率的几种类型

1.2.1 古典概率

若随机试验 E 只产生有限个基本事件, 即样本空间 S 中样本点数有限, 且每个基本事件的发生是等可能的, 则称此试验 E 属古典模型或等可能模型。属于古典模型的随机事件的概率称为古典概率。

1. 古典概率定义

若试验 E 是只有 n 个基本事件的古典模型, A 是含有 m 个基本事件的随机事件, 则事件 A 发生的概率定义为

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (1.2.1)$$

2. 古典概率的性质

(1) 对任一事件 A 有: $0 \leq P(A) \leq 1$;

(2) $P(S)=1$;

(3) 若 $A_i A_j = \emptyset (i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n)$, 则 $P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$ 。

1.2.2 几何概率

若试验 E 的样本空间为 S , 样本点在 S 中均匀分布, 事件 $A \subset S$, S 的测度为 $L(S)$, 事件 A 的测度为 $L(A)$, 定义

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(S)} \quad (1.2.2)$$

为几何概率。这样的模型称为几何概率模型。

几何概率具有同古典概率类似的性质。

例 1 设有用信号和干扰在时间间隔 T 内进入接收机是等可能的。当它们到达接收机的时间间隔小于 t 时, 接收机将受到干扰, 求接收机受干扰的概率。

解 以 x 和 y 分别表示信号和干扰进入接收机的时刻。由假设

$$0 \leq x \leq T$$

$$0 \leq y \leq T$$

于是样本空间 S 是边长为 T 的正方形, 如图 1.1 所示。

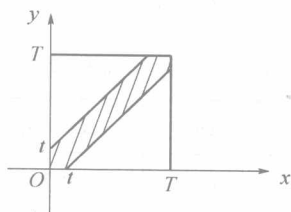


图 1.1 几何概率模型示意图

接收机受干扰的条件是

$$|x - y| \leq t$$

图中阴影区域就是受干扰事件 A 的事件域, 于是

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(S)} = \frac{T^2 - (T-t)^2}{T^2} = 1 - \left(1 - \frac{t}{T}\right)^2 \quad (1.2.3)$$

例 2 在平面上画等距离为 a 的一些平行线, 向该平面投掷长为 $l (l < a)$ 的针, 求针与平行线相交的概率。

解 以两条平行线为代表, 例 2 的示意图如图 1.2 所示。图中 M 代表针的中点, 以 x 表示 M 到最近一条平行线的距离, φ 是针与此线的夹角。此问题称为蒲丰投针问题。

由图可知, 针与平行线之一相交的条件是

$$0 \leq x \leq \frac{a}{2}, 0 \leq \varphi \leq \pi$$

由上面两条件决定了 $xO\varphi$ 平面上的一个矩形域, 如图 1.3 所示。这个矩形就是样本空间 S 。

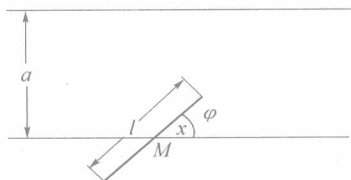


图 1.2 蒲丰投针问题示意图

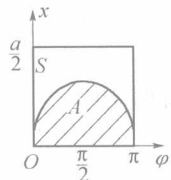


图 1.3 蒲丰投针问题的样本空间和事件域

以 A 表示针与平行线相交这一事件, 于是

$$A = \left\{ (x, \varphi) : x \leq \frac{l}{2} \sin \varphi, (x, \varphi) \in S \right\}$$

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(S)} = \int_0^\pi \frac{l}{2} \sin \varphi d\varphi / \frac{a\pi}{2} = \frac{2l}{\pi a} \quad (1.2.4)$$

上式说明 $P(A)$ 取决于 l/a , 当 l 和 a 成比例变化时, $P(A)$ 保持不变。上式还提供了
一个求 π 近似值的方法。大量重复地做蒲丰投针实验, 以事件 A 发生的频率 $f_A(n) = \frac{n_A}{n}$ 作
为 $P(A)$ 的近似值, 利用式(1.2.4)计算 π 的近似值。此处 n 是重复投针次数, n_A 是针与平
行线之一相交的次数。历史上有几位学者做过蒲丰投针实验, 结果如表 1.1 所列。

表 1.1 蒲丰投针实验

试验者	时间/年	针长 l/cm	投针次数	相交次数	π 的估值
Wolf	1850	0.80	5000	2532	3.15956
Smith	1855	0.60	3204	1218	3.15665
Fox	1884	0.75	1030	489	3.15951
Lazzarini	1925	0.83	3408	1808	3.1415929

1.2.3 统计概率

某些实际的概率问题, 很难归结为古典模型或几何模型。这时通过试验统计用事件
频率近似事件概率就是一种合理的选择, 由此引出了统计概率。

事件 A 的频率定义为

$$f_A(n) = \frac{n_A}{n} \quad (1.2.5)$$

式中: n 是试验 E 独立重复进行的次数; n_A 是事件 A 在 n 次试验中出现的次数。频率具
有下列 3 条性质。

- (1) 对任一事件 $0 \leq f_A(n) \leq 1$;
- (2) 对必然事件 $f_A(S) = 1$;
- (3) 对两两互不相容事件 $A_1, \dots, A_m$, 有 $f\left(\bigcup_{i=1}^m A_i\right) = \sum_{i=1}^m f_{A_i}(n)$ 。

由于试验次数不同, 因此频率是波动的, 不能用频率代替概率。但是随试验次数增加, 频率的随机波动性会减弱而趋于某个稳定值。把 n 趋于无穷时的频率叫做统计概率, 即

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_A(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_A}{n} \quad (1.2.6)$$

历史上曾有数位学者通过投掷硬币观察“国徽向上”的频率, 验证了上述论断的合理性。试验结果如表 1.2 所列。

表 1.2 投掷硬币试验

实 验 者	投掷次数 n	国徽向上次数 n_A	$f_A(n) = n_A / n$
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
K.Pearson	12000	6019	0.5016
K.Pearson	24000	12012	0.5005

1.3 条件概率

1.3.1 概述

在一些实际问题中经常要考虑在某一事件发生的条件下另一事件发生的概率是多少? 这一概率称为条件概率。例如在一个口袋中共有 5 个球, 其中 2 个是白球, 3 个是黑球。从袋中连续不放回取球两次, 问第一次取得白球, 第二次仍取得白球的概率是多少? 以 A 表示“第一次取得白球”, 以 B 表示“第二次取得白球”。以 w_1, w_2 表示 2 个白球, 以 b_1, b_2, b_3 分别表示 3 个黑球。两次取球的样本空间 S 如下:

$$S = \left\{ \begin{array}{l} w_1 w_2, w_1 b_1, w_1 b_2, w_1 b_3, w_2 b_1, w_2 b_2, w_2 b_3, w_2 w_1, b_1 b_2, b_1 b_3, b_1 w_1, b_1 w_2, b_2 b_1, b_2 b_3 \\ b_2 w_1, b_2 w_2, b_3 b_1, b_3 b_2, b_3 w_1, b_3 w_2 \end{array} \right\}$$

共 20 个样本点, 这是古典概率模型。其中

$$A = \{w_1 w_2, w_1 b_1, w_1 b_2, w_1 b_3, w_2 b_1, w_2 b_2, w_2 b_3, w_2 w_1\}$$

共 8 个样本点。

$$B = \{w_1 w_2, w_2 w_1, b_1 w_1, b_1 w_2, b_2 w_1, b_2 w_2, b_3 w_1, b_3 w_2\}$$

共 8 个样本点。

$$P(A) = 2/5, P(B) = 2/5$$

第一次取到白球后, 袋中只剩 1 白 3 黑共 4 个球。显然第二次仍取到白球的概率是 1/4。这一概率就是第一次取到白球后第二次又取到白球的概率, 以 $P(B|A)$ 记之。如果将发生事件 A 作为新的样本空间, 称之为缩减的样本空间, 它有 4 个样本点, 其中只有 1 个样本点满足第一次取到白球, 第二次仍取到白球的条件。于是

$$P(B|A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

如果仍在原样本空间 S 中考虑, 显然

$$P(AB) = \frac{2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$P(A) = \frac{8}{20} = \frac{4}{10}$$

从上两式得

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{4}{10}} = \frac{1}{4}$$

和前面得到的结果一致。由以上讨论可以得到条件概率的一般定义:

设 $(S, \mathcal{F}, P)$ 是一概率空间。 $A \in \mathcal{F}$, $B \in \mathcal{F}$, 且 $P(A) > 0$, 则在事件 A 已发生的条件下事件 B 发生的条件概率定义为

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (1.3.1)$$

条件概率的计算如前述例子所示, 既可以在原样本空间中按照定义式(1.3.1)计算, 也可以在缩减样本空间中按古典概率计算。条件概率具有如下性质。

- (1) 对每个事件 B , $P(B|A) \geq 0$;
- (2) $P(S|A) = 1$;
- (3) 若 $B_1, B_2, \dots$ 是两两互不相容事件, 则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i | A\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i | A)$$

由式(1.3.1)可以得到概率乘法公式, 若 $P(A) > 0$, 则

$$P(AB) = P(A)P(B|A) \quad (1.3.2)$$

同理, 若 $P(B) > 0$, 则

$$P(AB) = P(B)P(A|B) \quad (1.3.3)$$

乘法公式可以推广到多个事件。若 $P(A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) > 0$, 则有

$$P(A_1 A_2 \cdots A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \cdots P(A_n|A_1 A_2 \cdots A_{n-1}) \quad (1.3.4)$$