# 随机信号分析

STOCHASTIC SIGNAL ANALYSIS

沈允春　罗天放　沈东旭　编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

# 随机信号分析

沈允春　罗天放　沈东旭　编著



国防工业出版社
·北京·

## 内 容 简 介

本书共分8章。包括概率论基础、随机过程、随机信号谱分析、随机信号通过线性系统、窄带随机过程、随机过程通过非线性系统，几种重要的随机过程以及马尔可夫过程。

本书避免纯理论纯数学研究，侧重物理概念及实际应用，叙述简洁易懂。

本书特别适用于通信与信息处理、雷达、声纳、控制等电子类专业的本科生和硕士研究生作教材，也可供相关专业科技人员参考。


**图书在版编目(CIP)数据**

随机信号分析/沈允春，罗天放，沈东旭编著. —北京：国防工业出版社，2008.11
ISBN 978-7-118-05919-9

Ⅰ.随… Ⅱ.①沈… ②罗… ③沈… Ⅲ.随机信号-信号分析 Ⅳ.TN911.6

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第129224号

※

国防工业出版社出版发行
(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)
天利华印刷装订有限公司印刷
新华书店经售
*
开本787×1092 1/16 印张19 字数434千字
2008年11月第1版第1次印刷 印数1—4000册 定价32.00元





国防书店：(010)68428422 发行邮购：(010)68414474
发行传真：(010)68411535 发行业务：(010)68472764

# 前　言

随机现象的科学研究始于17世纪中叶，然而直到1933年苏联数学家柯尔莫哥洛夫出版了《概率论基础》一书，才奠定了将随机现象的科学研究作为数学的一个分支的基础。随着科学技术的发展，概率论和随机过程的理论在自然科学和社会科学领域得到了广泛的应用，它们也成为了高等学校许多专业本科生和研究生的必修课。

对随机现象的分析研究在通信与信息处理、雷达、声纳、电子对抗、导航、控制等电子类专业十分重要，本书正是针对这类专业的本科生和硕士研究生的需要编写的。书中除了介绍随机过程理论的基本理论外，重点讨论了随机信号的谱分析，随机信号通过线性和非线性系统，窄带随机过程。对几种重要的随机过程如维纳过程、泊松过程等也作了较为详细的介绍。而对于十分重要的马尔可夫过程本书单列一章专门讨论。为了适应计算机技术的飞速发展，本书对离散随机过程给予了特别关注。

本书侧重于物理概念和分析方法的介绍，避免纯理论纯数学的研究，注重实际应用。

学习本课程需有高等数学、概率论、信号与系统、数字信号处理、电子线路等方面的基础知识作先导。

本书既适用于本科生，也可用于硕士研究生作教材，也可供相关专业科技工作者参考。

由于作者水平有限，错误不当之处敬请批评指正。

编　者

# 目　录

# 第 1 章　概率论基础

## 1.1　随机试验和样本空间

概率论是从研究赌博和机会游戏问题发展起来的。17 世纪中叶，法国的贵族盛行赌博游戏，通过掷骰子押点数决定输赢。赌徒们主要靠反复实践找规律寻求高的胜率。后来他们请教数学家帕斯卡(B.Pascal）和拉普拉斯(P.S.Laplace)，请他们帮助解释赌博问题。二位数学家首次提出了用概率(Probability）度量某一事件发生可能性的大小。他们用排列组合方法研究了一些较为复杂的赌博问题，如“分赌注问题”、“赌徒输光问题”等。到了 18 世纪和 19 世纪，随着科学技术的发展，人们发现在生物、物理和社会领域同样有许多同机会游戏类似的现象，从而推动人们对概率问题深入研究。

将概率论真正变成严谨的数学分支的奠基人是苏联数学家柯尔莫哥洛夫。他在 1933 年出版的《概率论基础》一书中第一次给出了概率的测度论定义和一套严密的公理体系。

概率论是研究随机现象规律性的科学，人们把对随机现象的观测与考察称为随机试验 E。随机试验是科学试验的一部分。随机试验应当具备下列特性。

(1) 可重复性：试验可以在相同条件下重复进行；

(2) 不可预测性：每次试验前无法预测试验可能出现哪一个结果；

(3) 可预见性：试验前可以预见试验可能出现的全部结果。

抛硬币观察正反面的情况、掷骰子观察出现的点数、记录高速路上汽车流量、测试灯泡的使用寿命等都是随机试验的例子。

随机试验中出现的某种结果称为随机事件，简称事件。事件可分为基本事件和复合事件。基本事件是指试验中的一个基本结果。基本事件应当具备互斥性和完备性。互斥性是指两个不同的基本事件不能在一次试验中同时出现；完备性是指随机试验中必定会出现某一基本事件。例如，掷一颗骰子一次，出现的点数是 6 个基本事件。复合事件由若干个基本事件组合而成。例如，掷一颗骰子一次出现偶数点是一个复合事件，它由{2，4，6}3 个基本事件组成。

伴随随机试验将出现一个概率空间。概率空间由 3 个要素构成，即样本空间 $S$，波雷尔域(Borel field)或事件域 $\mathscr{F}$，在事件域中发生的概率 $P$。

### 1.1.1　样本空间 $S$

样本空间 $S$ 是随机试验 E 所有基本事件的集合。每个基本事件称为样本空间的一个样本点。组成样本空间的元素必须是基本事件而不能是复合事件。例如掷两颗相同的骰子，观察点数之和为 7 这一随机试验的样本空间由 $\{(1,1)(1,2)\cdots(1,6)\cdots(6,1)(6,2)\cdots(6,6)\}$ 共 36 个样本点组成，而不能认为是由 $\{2,3,\cdots,12\}$ 共 11 个样本点组成，因为其中有一些是复

合事件，不能认为是样本点。但是对相同的随机试验，试验目的不同，样本空间构成是不一样的。例如，连掷一枚硬币 3 次观察正反面出现的情况，样本空间由 $2^3$ 个样本点构成；如果是考察出现正面的次数，样本空间由$\{0,1,2,3\}$4 个样本点构成。

### 1.1.2 事件域 $\mathscr{F}$

事件域$\mathscr{F}$是样本空间 $S$ 中某些子集组成的集合，$\mathscr{F}$ 要满足下列 3 个条件。

(1) $\mathscr{F} \subset S$；

(2) 若事件 $A \in \mathscr{F}$，则 $\overline{A} \in \mathscr{F}$，此处 $\overline{A}$ 是 $A$ 的逆事件；

(3) 若 $A_i \in \mathscr{F}$ ,$i=1,2,\cdots$,则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathscr{F}$。

### 1.1.3 概率 $P$

若定义于 $\mathscr{F}$上的实值集合函数 $P$ 满足下列条件。

(1) 若 $A \in \mathscr{F}, P(A) \geqslant 0$；

(2) $P(S)=1$；

(3) 设 $A_i \in \mathscr{F}, i=1,2,\cdots$ 且当 $i \neq j$ 时 $A_i A_j = \varnothing$，则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

称 $P$ 是概率测度。

若 $A=S$，由上述条件(2)，$P(A)=1$ 意味着在试验 E 中 $A$ 必然出现，称它为必然事件。若 $A=\varnothing$ 为空集，$P(\varnothing)=0$，$A$ 称为不可能事件。显然 $P(S)=1-P(\varnothing)$。一般来说，若 $A \cap B = \varnothing$，$A \cup B = S$，称 $A$ 与 $B$ 是互斥事件或互逆事件。若 $A_i A_j = \varnothing (i \neq j, i, j = 1,2,\cdots,n)$ 则 $P\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(A_i)$, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 称为互不相容事件。

## 1.2 概率的几种类型

### 1.2.1 古典概率

若随机试验 E 只产生有限个基本事件，即样本空间 $S$ 中样本点数有限，且每个基本事件的发生是等可能的，则称此试验 E 属古典模型或等可能模型。属于古典模型的随机事件的概率称为古典概率。

1. 古典概率定义

若试验 E 是只有 $n$ 个基本事件的古典模型，$A$ 是含有 $m$ 个基本事件的随机事件，则事件 $A$ 发生的概率定义为

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{1.2.1}$$

2. 古典概率的性质

(1) 对任一事件 $A$ 有：$0 \leqslant P(A) \leqslant 1$；

(2) $P(S)=1$；

(3) 若 $A_iA_j=\varnothing(i \neq j, i, j=1,2,\cdots,n)$，则 $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right)=\sum_{i=1}^{n} P(A_i)$。

### 1.2.2 几何概率

若试验 E 的样本空间为 $S$，样本点在 $S$ 中均匀分布，事件 $A \subset S, S$ 的测度为 $L(S)$，事件 $A$ 的测度为 $L(A)$，定义

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)} \tag{1.2.2}$$

为几何概率。这样的模型称为几何概率模型。

几何概率具有同古典概率类似的性质。

**例 1** 设有用信号和干扰在时间间隔 $T$ 内进入接收机是等可能的。当它们到达接收机的时间间隔小于 $t$ 时，接收机将受到干扰，求接收机受干扰的概率。

**解** 以 $x$ 和 $y$ 分别表示信号和干扰进入接收机的时刻。由假设

$$0 \leqslant x \leqslant T$$
$$0 \leqslant y \leqslant T$$

于是样本空间 $S$ 是边长为 $T$ 的正方形，如图 1.1 所示。

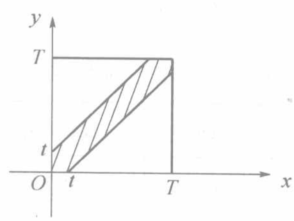


图 1.1 几何概率模型示意图

接收机受干扰的条件是

$$|x-y| \leqslant t$$

图中阴影区域就是受干扰事件 $A$ 的事件域，于是

$$P(A)=\frac{L(A)}{L(S)}=\frac{T^2-(T-t)^2}{T^2}=1-\left(1-\frac{t}{T}\right)^2 \tag{1.2.3}$$

**例 2** 在平面上画等距离为 $a$ 的一些平行线，向该平面投掷长为 $l(l<a)$ 的针，求针与平行线相交的概率。

**解** 以两条平行线为代表，例 2 的示意图如图 1.2 所示。图中 $M$ 代表针的中点，以 $x$ 表示 $M$ 到最近一条平行线的距离，$\varphi$ 是针与此线的夹角。此问题称为蒲丰投针问题。

由图可知，针与平行线之一相交的条件是

$$0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}, 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$$

由上面两条件决定了 $xO\varphi$ 平面上的一个矩形域，如图 1.3 所示。这个矩形就是样本空间 $S$。

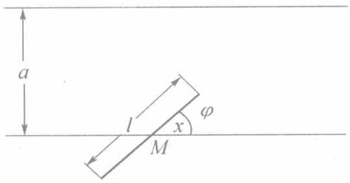


图 1.2　蒲丰投针问题示意图

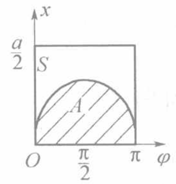


图 1.3　蒲丰投针问题的样本空间和事件域

以 $A$ 表示针与平行线相交这一事件，于是

$$A = \left\{ (x,\varphi): x \leqslant \frac{l}{2}\sin\varphi, (x,\varphi) \in S \right\}$$

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(S)} = \int_0^{\pi} \frac{l}{2}\sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \Big/ \frac{a\pi}{2} = \frac{2l}{\pi a} \tag{1.2.4}$$

上式说明 $P(A)$ 取决于 $l/a$，当 $l$ 和 $a$ 成比例变化时，$P(A)$ 保持不变。上式还提供了一个求 $\pi$ 近似值的方法。大量重复地做蒲丰投针实验，以事件 $A$ 发生的频率 $f_A(n) = \frac{n_A}{n}$ 作为 $P(A)$ 的近似值，利用式(1.2.4)计算 $\pi$ 的近似值。此处 $n$ 是重复投针次数，$n_A$ 是针与平行线之一相交的次数。历史上有几位学者做过蒲丰投针实验，结果如表 1.1 所列。

表 1.1　蒲丰投针实验

| 试验者 | 时间/年 | 针长 $l$/cm | 投针次数 | 相交次数 | $\pi$ 的估值 |
|---|---|---|---|---|---|
| Wolf | 1850 | 0.80 | 5000 | 2532 | 3.15956 |
| Smith | 1855 | 0.60 | 3204 | 1218 | 3.15665 |
| Fox | 1884 | 0.75 | 1030 | 489 | 3.15951 |
| Lazzarini | 1925 | 0.83 | 3408 | 1808 | 3.1415929 |

### 1.2.3　统计概率

某些实际的概率问题，很难归结为古典模型或几何模型。这时通过试验统计用事件频率近似事件概率就是一种合理的选择，由此引出了统计概率。

事件 $A$ 的频率定义为

$$f_A(n) = \frac{n_A}{n} \tag{1.2.5}$$

式中：$n$ 是试验 E 独立重复进行的次数；$n_A$ 是事件 $A$ 在 $n$ 次试验中出现的次数。频率具有下列 3 条性质。

(1) 对任一事件 $0 \leqslant f_A(n) \leqslant 1$；

(2) 对必然事件 $f_A(S)=1$；

(3) 对两两互不相容事件 $A_1,\cdots,A_m$，有 $f\left(\bigcup_{i=1}^{m} A_i\right)=\sum_{i=1}^{m} f_{A_i}(n)$。

由于试验次数不同，因此频率是波动的，不能用频率代替概率。但是随试验次数增加，频率的随机波动性会减弱而趋于某个稳定值。把 $n$ 趋于无穷时的频率叫做统计概率，即

$$P(A)=\lim_{n\to\infty} f_A(n)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_A}{n} \tag{1.2.6}$$

历史上曾有数位学者通过投掷硬币观察“国徽向上”的频率，验证了上述论断的合理性。试验结果如表 1.2 所列。

表 1.2 投掷硬币试验

| 实 验 者 | 投掷次数 $n$ | 国徽向上次数 $n_A$ | $f_A(n)=n_A/n$ |
|---|---|---|---|
| De Morgan | 2048 | 1061 | 0.5181 |
| Buffon | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| K.Pearson | 12000 | 6019 | 0.5016 |
| K.Pearson | 24000 | 12012 | 0.5005 |

## 1.3 条件概率

### 1.3.1 概述

在一些实际问题中经常要考虑在某一事件发生的条件下另一事件发生的概率是多少？这一概率称为条件概率。例如在一个口袋中共有 5 个球，其中 2 个是白球，3 个是黑球。从袋中连续不放回取球两次，问第一次取得白球，第二次仍取得白球的概率是多少？以 $A$ 表示“第一次取得白球”，以 $B$ 表示“第二次取得白球”。以 $w_1,w_2$ 表示 2 个白球，以 $b_1,b_2,b_3$ 分别表示 3 个黑球。两次取球的样本空间 $S$ 如下：

$$S=\left\{\begin{matrix} w_1w_2,w_1b_1,w_1b_2,w_1b_3,w_2b_1,w_2b_2,w_2b_3,w_2w_1,b_1b_2,b_1b_3,b_1w_1,b_1w_2,b_2b_1,b_2b_3 \\ b_2w_1,b_2w_2,b_3b_1,b_3b_2,b_3w_1,b_3w_2 \end{matrix}\right\}$$

共 20 个样本点，这是古典概率模型。其中

$$A=\{w_1w_2,w_1b_1,w_1b_2,w_1b_3,w_2b_1,w_2b_2,w_2b_3,w_2w_1\}$$

共 8 个样本点。

$$B=\{w_1w_2,w_2w_1,b_1w_1,b_1w_2,b_2w_1,b_2w_2,b_3w_1,b_3w_2\}$$

共 8 个样本点。

$$P(A)=2/5, P(B)=2/5$$

第一次取到白球后，袋中还剩 1 白 3 黑共 4 个球。显然第二次仍取到白球的概率是 1/4。这一概率就是第一次取到白球后第二次又取到白球的概率，以 $P(B|A)$ 记之。如果将发生事件 $A$ 作为新的样本空间，称之为缩减的样本空间，它有 8 个样本点，其中只有 2 个样本点满足第一次取到白球，第二次仍取到白球的条件。于是

$$P(B|A)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$$

如果仍在原样本空间 $S$ 中考虑，显然

$$P(AB)=\frac{2}{20}=\frac{1}{10}$$

$$P(A)=\frac{8}{20}=\frac{4}{10}$$

从上两式得

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{10}}{4/10}=\frac{1}{4}$$

和前面得到的结果一致。由以上讨论可以得到条件概率的一般定义：

设$(S，\mathscr{F}，P)$是一概率空间。$A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，且 $P(A)>0$，则在事件 $A$ 已发生的条件下事件 $B$ 发生的条件概率定义为

$$P(B|A)=\frac{P(AB)}{P(A)} \tag{1.3.1}$$

条件概率的计算如前述例子所示，既可以在原样本空间中按照定义式(1.3.1)计算，也可以在缩减样本空间中按古典概率计算。条件概率具有如下性质。

(1) 对每个事件 $B, P(B|A)\geqslant 0$；

(2) $P(S|A)=1$；

(3) 若 $B_1, B_2, \cdots$ 是两两互不相容事件，则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B\middle| A\right)=\sum_{i=1}^{\infty} P(B_i|A)$$

由式(1.3.1)可以得到概率乘法公式，若 $P(A)>0$，则

$$P(AB)=P(A)P(B|A) \tag{1.3.2}$$

同理，若 $P(B)>0$，则

$$P(AB)=P(B)P(A|B) \tag{1.3.3}$$

乘法公式可以推广到多个事件。若 $P(A_1A_2\cdots A_{n-1})>0$，则有

$$P(A_1A_2\cdots A_n)=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}) \tag{1.3.4}$$