

大學叢書 ⑤⑤

管理數學

何忠民譯編

序 言

筆者研究現代管理學術多年，且擔任系統分析（System Analysis）、作業研究（Operations Research）、計量分析（Quantitative Analysis）等課程教學工作，深感學者對於研究現代管理科學之所以感到困難，乃由於缺乏數學基礎，致對許多管理科學的理論與技術，無法徹底瞭解與靈活運用。

近數年來各大專院校雖重視管理數學課程，但由於市面缺乏管理數學中文本，致使學者，同時感到數學與語文的雙重困難，影響研究興趣。

為對大專企管同學及研究現代管理人士提供必需的，也是有效的學習工具起見，乃譯編管理數學一書。本書譯自 Dr. Chris A. Theodore 所著 Applied Mathematics: an Introduction；並譯編為十一章。

第一章係研討集合理論之基本概念，及其運算法則。第二章則介紹其實際應用與推理，用以分析管理問題，研究管理方面的決策及增進對電子計算機設計原理之認識。

第三、四章係以函數的概念分析經濟上需求與供給，決定價格與數量，應用函數作平衡分析，與管理計劃作為等；用以分析投資效益、市場研究、產銷預測等問題，具有獨特的功效。

第五、六、七章討論向量、線型代數與線型規劃之理論及其運算方法與應用，線型代數及線型規劃可提供現代管理最新的理論基礎與技術，對於資源分派，及人力、財力、物力經濟有效的組合均能提供最佳方案，實為現代管理不可缺少的工具。

第八、九章係屬微積分之運算與應用，為市場分析、財務分配等各方面不可缺少的基本工具，其理論對現代管理之貢獻至鉅。

第十、十一章為集合理論之延伸，對統計之發展貢獻至大，因而

管理上各種預測研究均有賴於此項理論。而基本的排列、組合、計數原理、二項係數更是管理分析人員必備的知識。

由於管理數學係以數學之原理與運算，研究解決管理上的問題，理論與應用相結合，不但學習容易，而且對研究現代管理功效宏偉。

譯編者何忠民謹識

中華民國62年10月10日

管 理 數 學

目 錄

序言	1
第一章 集合與集合運算	1
一、集合與符號	1
(一)集合的定義	1
(二)集合的元素	2
(三)集合元素的數量	2
(四)說明集合	2
(五)例題	3
問 題	
二、相等的集合與子集合	7
(一)相等的集合	7
(二)子集合	8
(三)相等的集合	8
(四)子集合的形成	9
(五)摘要	10
問 題	
三、集合基本運算	11
(一)餘集合	11
(二)積集合	12
(三)聯集合	13
(四)集合形成與基本運算	14
問 題	
四、集合運算之抽象法則	20

(一)集合運算法則	20
(二)布林代數與普通代數	21
(三)范恩圖形	22
(四)關係表	24
(五)證明差集法則	26
(六)二元原理與證明	27
(七)集合運算法則與布林代數	28

問 題

第二章 布林代數的應用	31
-------------	----

一、二位數系：二進位算數	31
(一)布林代數 $(0, 1)$	31
(二)模數2	33
(三)二進位數系	34
(四)二進位數算術	36
(五)二進位數分數	41
(六)進位數係摘要	42

問 題

二、布林代數與位數計算機（設計一假想的計算機）	44
(一)布林代數的機械化	44
(二)QUAC——假想位數計算機	47
(三)摘要	52

問 題

三、布林代數與位數計算機（QUAC之運算程序）	53
(一)QUAC的語言與能量	53
(二)算術的機械化	54
(三)QUAC的幾個附加特性	58
(四)計算機程式設計的元素	59
(五)程式設計的另一問題	66

(六)最近之發展.....	68
---------------	----

問 題

第三章 函數與管理計劃作為.....	70
--------------------	----

一、函數的概念與函數符號.....	70
-------------------	----

(一)定義.....	70
------------	----

(二)反函數.....	73
-------------	----

(三)函數與方程式.....	75
----------------	----

(四)函數與關係.....	77
---------------	----

(五)函數之附加特性.....	78
-----------------	----

問 題

二、線型函數：預測與管制.....	83
-------------------	----

(一)尋找函數.....	83
--------------	----

(二)平衡分析.....	87
--------------	----

(三)企業計劃作為之數學模型.....	89
---------------------	----

(四)摘要.....	91
------------	----

問 題

三、二次函數：應用.....	92
----------------	----

(一)二次函數與方程式.....	92
------------------	----

(二)拋物線的頂點與其它特性.....	97
---------------------	----

(三)瞬時與邊際變動率.....	99
------------------	----

(四)企業經營中之二次函數.....	101
--------------------	-----

(五)摘要.....	103
------------	-----

問 題

第四章 函數與函數在經濟及企業上之應用.....	111
--------------------------	-----

一、函數與供需經濟「法則」.....	111
--------------------	-----

(一)假說與限制.....	111
---------------	-----

(一)供給與需求之均衡	115
(二)市場均衡與拋物線	116
(三)拋物線式需求曲線與市場均衡	119
(四)摘要	122

問 題

二、成長與蕭條函數	125
(一)基本超越函數與其圖形	126
(二)銷售衰落常數	130
(三)產品需求之預測	132
(四)學習曲線	135

問 題

三、投資與財政數學	140
(一)單利與現值	141
(二)複利	143
(三)等期間付款之未來值與現值	146
(四)資金預算之特例	150

問 題

第五章 線型規劃	155
----------	-----

一、線型規劃與圖形	155
(一)不等式與其圖形	155
(二)最大利潤之分配問題	158
(三)適合解之集合	162
(四)最小成本之分配問題	165
(五)摘要	167

問 題

第六章 線型規劃的代數	170
-------------	-----

一、向量與線型規劃.....	170
(一)向量.....	170
(二)重要的向量運算.....	173
(三)向量之獨立與結合.....	176
(四)線型方程向量與直線方程系.....	178
(五)向量與線型規劃.....	182

問 題

二、矩陣代數與線型規劃.....	188
(一)矩陣.....	189
(二)矩陣之基本運算.....	190
(三)矩陣代數法則.....	193
(四)二元問題.....	194
(五)反矩陣.....	197
(六)反矩陣與方程系.....	199
(七)矩陣代數與線型規劃.....	201

題 問

第七章 線型規劃計算方法	206
--------------------	-----

一、單純法.....	206
(一)極大問題.....	206
(二)極小問題.....	213

問 題

第八章 微 分	219
---------------	-----

一、函數之極限觀念與連續性.....	219
(一)在計算上瞭解極限概念.....	219
(二)函數之極限.....	222
(三)函數之連續性.....	225

問 題

第十章 集合、樣本空間與事件 274

一、集合與樣本空間 274

(一)樣本空間 274

(二)質言樣本空間 275

問 題

二、事件與分割 279

(一)定義 279

(二)簡單與複合事件 280

(三)連接與互斥事件 281

(四)事件的分割 283

問 題

第十一章 機率與計數 285

一、事件的機率、機率法則 285

(一)分派事件機率的實際問題 285

(二)分派事件機率的基本規則 286

(三)加法規則、均衡事件 288

(四)乘法規則、獨立事件 291

問 題

二、條件機率 294

(一)條件機率 294

(二)乘法規則、相依事件 297

問 題

三、計數技術 300

(一)基本計數原理 300

(二)排列 301

(三)組合.....	303
(四)二項係數.....	306

問 題

管 理 數 學

第一章 集合與集合運算

一、集合與符號

吾人第一步將注意力集中於布林代數 (Boolean algebra) 中的集合。先介紹基本集合與其符號，而後解釋集合等式與集合內含。這兩個題目能輪流幫助吾人說明集合的基本運算。最後為集合運算之抽象定律，亦即布林代數法則之本身。

(-)集合的定義 一個聚積或一個總合的事物，不論書本、人們或數字、等等，皆稱之為一個集合。因此，一個公司的董事會是一個集合，一個公司的存貨是一個集合，一個公司的報告書，一個公司的僱工，一個製造者的供應商，一種產品的消費者，一個銷售狀況的紀錄、等等，均可稱為一個集合。但是一個集合中的事物無需像上述的事物如此具體。他們可以是抽象的觀念，例如，一個正整數的集合，一個可以滿足方程式， $X^2 + 2X - 3 = 0$ 的實數集合，或是滿足其它任何方程式的實數集合。吾人能够看得出，集合的概念是非常普通而且很容易瞭解。然而，一些事物的聚積必需符合下列條件，纔能形成集合：

1. 一個聚積或一個總合的事物必需能被適切的解釋清楚。這就是說吾人必需毫不含混的決定任何一事物是否屬於該已知集合。試看約翰公司董事會的集合。它必需能够以「是」或「否」來回答下列問題——「威廉先生是否為約翰公司董事會的一員？」因此，「是」與「否」的回答中，必需有一個是唯一而正確的答案。
2. 一個集合中的事物必需不得重複。換言之，在集合中，同一事物不能出現兩次。所以，記錄一個集合中的事物時，任一個事物皆不得重複。一個某天普通股票報價的集合，10元、10½元

、10元、12元、 $10\frac{1}{2}$ 元，是一個並非包含上列五個數字的集合而是10元、 $10\frac{1}{2}$ 元12元三個不同的數字的集合。同樣的理由，一個英文字母的集合「Mississippi」一字中僅是由M、i、s、及p幾個不同字母構成的集合。

3. 假如一個集合中的事物能够數，記錄事物的順序並不重要。因此，字母a、b、c的集合與b、c、a或c、b、a集合是一樣的。

這一種條件與集合等式關係密切，吾人將於下一節討論之。

(二) **集合的元素** 一個事物屬於或包含於集合中，則稱此事物為集合的元素。設 o ，是一件事物， P 是一個集合，假設 o ，屬於 P ，那麼他們的關係可以 $o \in P$ 表示之，讀作「事物 o 是集合 P 的元素」。假如 o 不屬於 P ，那麼他們的關係可以 $o \notin P$ 表示之，讀作「 o 不是集合 P 的元素」。我們用大寫的字母表示集合，以小寫的字母表示集合的元素。

例題1.1 以 w 表示威廉先生， J 表示約翰公司董事會。那麼 $w \in J$ ，其意義為威廉先生是該董事會之一員，而 $w \notin J$ 則反是。

(三) **集合元素的數量** 一集合中元素的數量可以為有限值或無限值。像公司的僱工，製造者的供應商或其它屬於商業上的集合都是有限值，因為我們可以一個個地數出其中的元素，直到最後一個元素為止。另一方面，正整數的集合1, 2, 3, ……是無限的，因為數正整數的過程是永無止境的。實際的商業問題可以是無限值的集合。舉個例子說：在品質管制中，統計人員研究機械的過程便會有無限個答案，然而，我們可以解釋海水分子的集合雖然有極多的元素，但仍然是有限的集合。

在有限集合與無限集合之外，吾人另介紹一個沒有元素的集合。這樣的集合稱之為空集合或零集合，以符號 ϕ 表示之，吾人所討論的空集合或零集合，知其為集合中僅有的一個沒有元素的集合。

(四) **說明集合** 基本上言，集合可由兩個方法說明之：名冊法與敘述

法兩種。名冊法包含一個大括弧與集合中元素的名稱。

例題1.2 史密斯、布朗及羅德是集合P的元素，P代表李高金屬公司合夥人的集合。那麼以名冊法表示此集合如下：

$$P = \{\text{史密斯}, \text{布朗}, \text{羅德}\}。$$

若以敘述法表示之，則必需以大括弧內之條件為基礎，決定一個事物是否為集合中的元素。

例題1.3 前例中特定的集合P包含李高金屬公司合夥人史密斯，布朗，羅德，以敘述法說明集合P如下：

$$P = \{x \mid x \text{ 是李高金屬公司中的一個合夥人}\}。$$

上式讀作「P是元素x的集合，x是李高金屬公司的合夥人」。其中「 $\mid$ 」表示「如此」或「因而」。x符號表示集合P中的任一元素。當然任何其它的符號如y、z或星號☆，或任何其它適當的符號均可用以表示集合中的元素。

通常應用敘述法表示集合的時機很多，在分析任何情況時，稱元素的固定聚積為「泛集合」(Universal set)，以U表示之。在說明一個特定集合時，皆指定參考泛集合。

例題1.4 泛集合U表示全體人類的集合。那麼包含史密斯，布朗，羅德的集合P可以表示為：

$$P = \{x \in U \mid x \text{ 是李高金屬公司的合夥人}\}。$$

讀作「P是U中以x為元素的集合，而x是李高金屬公司的一個合夥人。」這種解釋可縮減成更一般化的形式。令 $p(x)$ 是以x為條件；即，「x是李高金屬公司的一個合夥人。」而U中含x元素的集合；可以滿足 $p(x)$ 的條件則可寫為：

$$P = \{x \in U \mid p(x)\}$$

有些數學家稱這種說明集合的方法為集合的「建立法」，因為他們變事物的聚積或條件為集合。

(五)例題 下列幾個例題更進一步說明了集合的構造。

例題1.5 丹尼及希爾擁有的立即服務修車廠第一個月終的會計狀

況顯示下列的交易：

每人投資	\$22,000
應付抵押	15,000
應付帳款（汽車材料公司）	10,000
土地與房屋價值	35,000
煤氣，零件，及其它庫存供應品	10,000
辦公用具	2,000

令 P 表示合夥人的集合，而 A 、 L 及 W 分別表示交易中的資產、負債與淨值。那麼這些集合可用名冊法表示如下：

$$P = \{\text{丹尼, 希爾}\},$$

$$A = \{\$35,000, \$10,000, \$2,000\},$$

$$L = \{\$15,000, \$10,000\},$$

$$W = \{\$22,000\},$$

因為集合中每一元素必須不同，而交易中有不止一次發生相同數值交易的可能性，此時這種方法無法滿足需要。而克服這種困難的途徑是把每一種交易的數值與性質寫下來，但這樣使名冊法顯得累贅，特別是當每一個集合含有大量元素的時候。較有效的方法是應用敘述法表示之如下：

$$P = \{x \mid x \text{ 是立即服務修車廠的合夥人}\},$$

$$A = \{y \mid y \text{ 是立即服務修車廠的資產交易}\},$$

$$L = \{w \mid w \text{ 是立即服務修車廠的負債交易}\},$$

$$W = \{z \mid z \text{ 是立即服務修車廠的淨值交易}\}.$$

例題1.6以 R 代表泛集合表示所有的實數。而 Q 表示一個集合，它可以滿足方程式 $x^2 + 2x - 3 = 0$ 。

那麼以敘述法表示

$$Q = \{x \in R \mid x^2 + 2x - 3 = 0\},$$

以名冊法表示

$$Q = \{1, -3\}.$$

例題1.7 R 表示實數的集合； P 為一個實數的集合，它可以滿足 $x^2 = -25$ ，那麼集合

$$P = \{x \in R \mid x^2 = -25\}$$

沒有元素；因為所有實數的平方是非負的。故集合 P 是空集合或零集合 $\emptyset$ 。

例問1.8 不定集合 P 包含所有的正整數。欲書出全部的元素是不可能的。故需用縮寫方法表示此集合如下：

$$P = \{1, 2, 3, 4, \dots\},$$

上面的點 ($\dots$) 表示省略的元素。

然而這種解釋的應用必須很小心。需列出元素中足夠的數字，以期能夠表示出集合的正確形態。否則使用名冊法會導致錯誤。

以 Q 表示構成 $n^2 + (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)$ 的數值集合， n 是任何正整數。我們可下列數字表示此集合：

$$Q = \{1, 4, 9, \dots\}$$

其中1, 4與9表示當 $n=1, 2, 3$ 時 Q 的前三個元素。觀察所列 Q 的元素是連續數的平方，即 $1=1^2$ ， $4=2^2$ ， $9=3^2$ ，吾人可以下定論，下一個元素是16。實際上， $N=4$ 時，下一個元素是22而非16。

因此，說明一個無限集合時，最好應用敘述法，或說明性質的方法。以敘述說明正整數的集合 P 如下：

$$P = \{x \mid x \text{ 是正整數}\}, \text{ 而 } Q \text{ 是}$$

$$Q = \{x \mid x = n^2 + (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3)\}$$

其中 n 為正整數。

問 題

1. 下列集合中，何者相同，何者不同，並說明理由

a) $P = \{1, 2, 3\}$ $Q = \{3, 4, 1\}$ $R = \{3, 2, 1\}$

b) $P = \{a, e, i, o, u\}$

$$Q = \{x \mid x \text{ 為英文字母的母音}\}$$

$$R = \{e, o, i, a, j, u\}$$

$$S = \{x \in U | x \text{ 是一母音} \}$$

其中U代表英文字母的集合。

$$(C) P = \{x | x^2 - 2x = 0\}$$

$$Q = \{x | x - 2 = 0\}$$

$$R = \{x | x^2 - x - 2 = 0\}$$

2. 設U為100個接收面談抽煙習慣的人。下表為依性別分類之香煙消耗狀況

香煙種類	(1) 先生	(2) 女士	合計
有濾嘴香煙	30	40	70
無濾嘴香煙	20	10	30
合 計	50	50	100

應用敘述法表示八種吸煙者的集合。

3. 例題1.6中滿足, $x^2 + 2x - 3 = 0$ 元素的集合, 可表示如下: $Q = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x - 3 = 0\} = \{1, -3\}$ 。應用此形式解下列方程式。

若 $\{1, -3\}$ 形式無法表示得很適當。請以敘述法表示之。並說明集合為有限的或無限的。

a) $2x + 6 = 0$

b) $x^2 - 9 = 0$

c) $3x - 6 = 0$

d) $x^2 - 5x + 6 = 0$

e) $x + 2 > 0$

f) $x - 1 \leq 0$

g) $2x^2 - 5x + 3 \geq 0$

h) $2x^2 - x < 0$

1. 指出下列集合的敘述正確或不正確, 並解釋理由。

a) $3 = \{3\}$