21世纪高职高专规划教材

公共基础课系列

经济数学简明教程

刘悦安 郑艳霞 编著

清华大学出版社

21世纪高职高专规划教材
公共基础课系列

经济数学简明教程

刘悦安　郑艳霞　编著

清华大学出版社
北京

内容简介

本教材采用全新的编排方式，从离散变量的性质研究入手，逐步引入连续变量函数的基本运算和性质；有些概念是依据数学发展史的顺序引出，这样符合人们的思维习惯；由浅入深地介绍知识的方式使读者比较容易理解和掌握高等数学的一些基本方法和概念，更快地理解高等数学的思想。

本教材将数学建模方法贯穿于整个课程体系之中，这样既可以引起读者的学习兴趣，又可以达到理论联系实际的目的，对培养读者的创新意识很有帮助；在教材的各个章节中穿插介绍 Mathematica 数学软件的用法，使读者在学习高等数学的同时掌握一些实用的解题方法，同时也使读者绕过了一个难关——解题技巧，这对于大幅度减少教学课时是十分有利的；在教材的编写过程中，改变了传统教材中一成不变的例题模式，加入了许多有意思的例题，这对于引发读者的学习兴趣是有一定意义的；教材的讲解中还穿插了针对本部分的知识背景的实际应用及一些有意思的故事等。

本教材特别适用于高职高专教育经济类学生使用，同时也为希望初步了解高等数学的相关人员提供了一本自学教材。

图书在版编目（CIP）数据

经济数学简明教程/刘悦安，郑艳霞编著.—北京：清华大学出版社，2008.10
21 世纪高职高专规划教材. 公共基础课系列
ISBN 978-7-302-17615-2

Ⅰ. 经… Ⅱ. ①刘… ②郑… Ⅲ. 经济数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ. F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 064487 号

责任编辑：田 梅
责任校对：袁 芳
责任印制：孟凡玉

出版发行：清华大学出版社 **地 址：**北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn **邮 编：**100084
社 总 机：010-62770175 **邮 购：**010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者：北京国马印刷厂
装 订 者：三河市新茂装订有限公司
经 销：全国新华书店
开 本：185×260 **印 张：**19 **字 数：**434 千字
版 次：2008 年 10 月第 1 版 **印 次：**2008 年 10 月第 1 次印刷
印 数：1～4000
定 价：29.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：010-62770177 转 3103 产品编号：024304-01

出版说明

高职高专教育是我国高等教育的重要组成部分，担负着为国家培养并输送生产、建设、管理、服务第一线高素质技术应用型人才的重任。

进入 21 世纪后，高职高专教育的改革和发展呈现出前所未有的发展势头，学生规模已占我国高等教育的半壁江山，成为我国高等教育的一支重要的生力军；办学理念上，"以就业为导向"成为高等职业教育改革与发展的主旋律。近两年来，教育部召开了三次产学研交流会，并启动四个专业的"国家技能型紧缺人才培养项目"，同时成立了 35 所示范性软件职业技术学院，进行两年制教学改革试点。这些举措都表明国家正在推动高职高专教育进行深层次的重大改革，向培养生产、服务第一线真正需要的应用型人才的方向发展。

为了顺应当前我国高职高专教育的发展形势，配合高职高专院校的教学改革和教材建设，进一步提高我国高职高专教育教材质量，在教育部的指导下，清华大学出版社组织出版了"21 世纪高职高专规划教材"。

为推动规划教材的建设，清华大学出版社组织并成立了"高职高专教育教材编审委员会"，旨在对清华版的全国性高职高专教材及教材选题进行评审，并向清华大学出版社推荐各院校办学特色鲜明、内容质量优秀的教材选题。教材选题由个人或各院校推荐，经编审委员会认真评审，最后由清华大学出版社出版。编审委员会的成员皆来源于教改成效大、办学特色鲜明、师资实力强的高职高专院校、普通高校以及著名企业，教材的编写者和审定者都是从事高职高专教育第一线的骨干教师和专家。

编审委员会根据教育部最新文件和政策，规划教材体系，比如部分专业的两年制教材；"以就业为导向"，以"专业技能体系"为主，突出人才培养的实践性、应用性的原则，重新组织系列课程的教材结构，整合课程体系；按照教育部制定的"高职高专教育基础课程教学基本要求"，教材的基础理论以"必要、够用"为度，突出基础理论的应用和实践技能的培养。

本套规划教材的编写原则如下：

(1) 根据岗位群设置教材系列，并成立系列教材编审委员会；

(2) 由编审委员会规划教材、评审教材；

(3) 重点课程进行立体化建设，突出案例式教学体系，加强实训教材的出版，完善教学服务体系；

(4) 教材编写者由具有丰富教学经验和多年实践经历的教师共同组成，建立"双师型"编者体系。

本套规划教材涵盖了公共基础课、计算机、电子信息、机械、经济管理以及服务等大类的主要课程，包括专业基础课和专业主干课。目前已经规划的教材系列名称如下：

· 公共基础课

公共基础课系列

· 计算机类

计算机基础教育系列
计算机专业基础系列
计算机应用系列
网络专业系列
软件专业系列
电子商务专业系列

· 电子信息类

电子信息基础系列
微电子技术系列
通信技术系列
电气、自动化、应用电子技术系列

· 机械类

机械基础系列
机械设计与制造专业系列
数控技术系列
模具设计与制造系列

· 经济管理类

经济管理基础系列
市场营销系列
财务会计系列
企业管理系列
物流管理系列
财政金融系列
国际商务系列

· 服务类

艺术设计系列

本套规划教材的系列名称根据学科基础和岗位群方向设置，为各高职高专院校提供“自助餐”形式的教材。各院校在选择课程需要的教材时，专业课程可以根据岗位群选择系列；专业基础课程可以根据学科方向选择各类的基础课系列。例如，数控技术方向的专业课程可以在“数控技术系列”选择；数控技术专业需要的基础课程，属于计算机类课程的可以在“计算机基础教育系列”和“计算机应用系列”选择，属于机械类课程的可以在“机械基础系列”选择，属于电子信息类课程的可以在“电子信息基础系列”选择。依此类推。

为方便教师授课和学生学习，清华大学出版社正在建设本套教材的教学服务体系。本套教材先期选择重点课程和专业主干课程，进行立体化教材建设：加强多媒体教学课件或电子教案、素材库、学习盘、学习指导书等形式的制作和出版，开发网络课程。学校在选用教材时，可通过邮件或电话与我们联系获取相关服务，并通过与各院校的密切交流，使其日臻完善。

高职高专教育正处于新一轮改革时期，从专业设置、课程体系建设到教材编写，依然是新课题。希望各高职高专院校在教学实践中积极提出意见和建议，并向我们推荐优秀选题。反馈意见请发送到 E-mail：gzgz@tup.tsinghua.edu.cn。清华大学出版社将对已出版的教材不断地修订、完善，提高教材质量，完善教材服务体系，为我国的高职高专教育出版优秀的高质量的教材。

高职高专教育教材编审委员会

前言

当知识形成一个完整体系时，它的作用要远比由一些分散的经验构成的知识重要且可靠。例如，掌握大量民间验方的“游医”不能称为医生。而医生一定要掌握一个完整体系的医学知识（至少是某一科的）。

但是，即使是经典的知识体系，也会受到时间的考验。因为新的经验、先进的实验设备得到的更准确的实验结果都会使旧的知识体系得到调整和更新，新理论可能会替代旧理论。例如，物理学中爱因斯坦相对论的出现，使得牛顿的力学体系成为一种更广泛理论中的特例；基因学说的发展和化石证据的积累，使得达尔文进化论中渐变的思想受到挑战，这样的事例充满了整个科学发展的历史。

然而，数学是可以信赖的科学，数学在实践中的重要作用是人所共知的。无论是自然科学还是社会科学的研究，如果引入了数学的论证将会提高一个层次，其结论更加可靠。另外，新的数学理论开拓新的领域，可以包容但不会否定已有的理论。可以说数学是惟一一门新理论不能推翻旧理论的科学，这也是数学值得信赖的证明。

数学同其他科学一样，是来源于生活和生产实践的。数学的发展史表明了数学是怎样由一些零散的经验逐渐形成知识体系的。这些形成体系的数学知识反过来又对实际生产的指导起到巨大作用。但是，数学发展到今天已经远远超过了“来源实践，指导实践”。今天的数学已经能够做到，靠自身推导所取得的研究成果来推动技术的发展。例如，纯数学研究成果“小波变换”，使数字压缩技术得到很大的提高。

但是有一种奇怪的现象，甚至许多在实际工作中取得一定成绩的数学系毕业生都有这样的体会：在工作中真正需要用到的具体的数学定理、公式和结论，其实并不很多，学校里学过的数学知识很多都似乎没有派上用场。这是由于人们疏忽了，或者是没有意识到他们在学校所接受的数学训练，所领会的数学思想和精神无时无刻不在发挥着积极的作用，成为取得成功的最重要的因素。而数学思想的运用又是潜移默化的。因此，如果仅仅将数学作为知识来学习，而忽略了数学思想对学生的熏陶以及学生数学素质的提高，那是对数学教育的极大误解。

实际上，正确对待数学教育的方法是应该把数学教育看成是素质教育。学生通过数学训练，应该获得一些特有的素质，这些素质包括提高学生的逻辑思维能力；培养学生认真细致、一丝不苟的作风；调动学

生的探索精神；提高学生的创造力和想像力；通过数学的训练，使学生知道数学概念、方法和理论的产生及发展的渊源和过程，了解和领会由实际需要出发、到建立数学模型、再到解决实际问题的全过程，提高他们运用数学知识处理现实世界中各种复杂问题的意识、信念和能力。

数学教育的另外一个误区是，很多人都认为数学是理工科的基础课，而对于文科学生来说数学并不重要，甚至是可有可无的。然而事实并非如此。1994 年诺贝尔经济学奖获得者纳什就是一位数学家。纳什获得诺贝尔经济学奖并不是数学在经济学中应用的一个特例，在历年的诺贝尔经济学获奖项目中，绝大多数获奖者的工作都是非常数学化的。就连号称“不喜欢数学”的、1991 年诺贝尔经济学奖获得者 Ronald. H. Coase，在他的企业理论影响下而形成的委托——代理理论也是完全数学化的。

数学教育的重要性，包括它在经济学等社会科学中的重要性都是毋庸置疑的。但是怎样进行数学教育呢，尤其是对于数学基础较差，而又不能安排较多教学课时的高职高专教学来说更是难上加难。

笔者的专业是数学，回想起以前在大学学习数学分析时是多么的羡慕那些中文系的同学，成天泡在阅览室里看小说、杂志就是在学习了。然而，数学系的学生只能整天闷头做题。经过一年多做了几大本习题，才对数学分析的思想有了一点点理解，而真正的理解是在教了几年书之后。那时接受的是所谓“传统教育”，教师带领学生从一些基本的概念或定义出发，以简练的方式合乎逻辑地推演出所要求的结论。再通过大量、繁重的习题训练，打下扎实的功底，使学生从感性到理性逐渐提高解题技巧、掌握数学原理、理解数学思想。不能否认，这样的教育对巩固学生基础有积极的作用。但是，这种方法至少不适合现在的高职高专教育，需要进行数学课程教学的改革。

教育教学改革、课程教学改革是我国高职高专教育所面临的重大课题，这是高职高专教育从原有的“本科压缩饼干”式的专科教育中解脱出来的必经之路。对于高职高专教育的专业课程来说，可以用减少理论教学（当然，不是简单地删掉一些内容），增加实践教学来突出高等职业教育特色。那么，作为基础理论课的高等数学来说，在学生数学基础差，教学计划安排课时少的情况下，如何进行课程改革才能适应高职高专教育的要求呢？

前面所说数学的“传统教育”实际上是沿袭前苏联20 世纪 40、50 年代的教育方式。但是这 50 多年来，人类的科学技术水平飞速发展，数学在现实中的应用日趋广泛深入，现代计算技术突飞猛进。这一切都要求数学教育必须改革，同时这些成果也为数学教育改革创造了条件。高职高专教育的数学教学改革，如果沿着降低标准、减少内容的方向进行，那么，在只有几十个学时的情况下，学生可能既学不到多少数学的基础知识，也不可能理解高等数学的思想。当然，就更不可能了解并把高等数学应用到现代技术之中。学生在几十个学时内学到的一点支离破碎的数学知识，不足以应对现代技术以及经济理论对数学的需要。笔者认为，对于我国当前高职高专教育的数学课程教学改革来说，不是改革，而是重新设计的问题。

在高职数学教育课程改革探讨中，根据以上分析，借鉴国内外的一些先进教学经验，提出在数学教学改革中的一些构想：

（1）注重数学思想的教育而不仅是知识的传授；

（2）注重数学在生产和社会实践中的应用；

（3）注重现代计算技术在数学教学中的作用。

出于以上的构想，本教材的特点主要体现在如下几方面：

（1）为了在有限的课程中使学生能够比较深入地理解高等数学的基本思想，采用从离散变量性质的研究入手，逐步引入与其相对应的连续变量函数的基本运算和性质，这样由浅入深的方式使学生比较容易理解和掌握高等数学中的一些基本方法和概念。

（2）在数学概念的讲解中有时采用返璞归真的形式，即依据数学发展史的顺序引出概念，而不是依据后人归纳出的数学体系引出概念。这样更符合人们的思维习惯，使学生们更容易理解。

（3）数学建模是数学与实践联系的桥梁，将数学建模方法贯穿于整个课程体系之中，将现实生活和常见的社会现象中的建模实例应用于教学，这样既可以引起学生们的学习兴趣，又可以达到理论联系实际的目的，对培养学生的创新意识很有帮助。

（4）现在人们编写出很多优秀的计算机数学软件，都是在实践工作中常常用到的。在此，着重介绍 Mathematica 数学软件的用法，使学生提前掌握工作中会用到的实用方法，同时也使学生们绕过了一个难关——解题技巧的训练，大幅度减少了教学课时。

（5）基于如上 4 点，本教材在编排顺序上与传统教材有较大区别。

本教材的编写构思还很肤浅，虽然在教学中进行过少量实践，也取得了一定的效果。但是，是否能适应更多学校的要求，还需要广大数学教师在实践中检验，并不断提出改进意见，我们将不胜感激。

编　者

2008 年 5 月

目录

第1章 数与数系

1.1 数与集合

1.1.1 自然数的运算

自然数或正整数的数学理论称为算术. 这个理论奠基于下述事实，即整数的加法和乘法受某些定律的支配. 为了用一般的形式表述这些定律，引用字母 $a,b,c,\cdots$ 作为整数的符号，按此约定，可以表述读者已熟知的五个算术定律如下：

(1) $a+b=b+a$，　　(2) $ab=ba$，

(3) $a+(b+c)=(a+b)+c$，　　(4) $a(bc)=(ab)c$，

(5) $a(b+c)=ab+ac$.

上述前两个公式，称为加法和乘法的交换律，表示在加法或乘法运算中可以交换所论元素的次序. 第三个公式，称为加法的结合律，表示三个数的加法，不论将第一个数加上第二个数与第三个数的和，还是将第三个数加上第一个数与第二个数的和，其结果是相同的. 第四个公式是乘法的结合律. 最后一个公式称为分配律，它表明如下事实：用一个数去乘一个和，可以转化为用该数去乘和的每一项，然后再将乘积加起来.

这些算术定律很简单，可以视作是显然的，但是它们未必适用于除整数外的其他方面. 例如，a 和 b 不是整数的符号，而是代表不同的化学物质，且假设"加"是按通常的意义理解的，则交换律显然不一定是对的. 例如，将硫酸加入水中，就得到稀硫酸，而交换过来将水加入浓硫酸中，就势必给实验者带来灾难性的后果. 类似的解释可以阐明在这种化学的"算术"中，加法和乘法的结合律和分配律是不成立的. 我们可以想像出各种类型的"算术"，而定律(1)～(5)中的一个或几个可以不成立.

在两个整数加法定义的基础上，可以定义不等的关系. 两个等价说法，即 $a<b$(念作"a 小于 b")和 $b>a$(念作"b 大于 a")，是指整数 b 可以通过整数 a 加上适当选取的第三个整数 c 而得到，即 $b=a+c$. 在此情况下，记作

$$c=b-a,$$

它定义了减法的运算.

加法和减法称为**互逆运算**,这是因为正整数 a 加上整数 b,接着又减去整数 b,则结果仍是原来的整数 a,即

$$(a+b)-b=a.$$

必须注意整数 $b-a$ 仅当 $b>a$ 时才有意义.当 $b<a$ 时,记号 $b-a$ 作为负整数的说明,将在后面讨论.

为了方便起见,通常采用下述记号之一,$b\geqslant a$(念作"b 大于或等于 a")或 $a\leqslant b$(念作"a 小于或等于 b"),用来表示陈述 $a>b$ 的否定.因此,$2\geqslant 2$,且 $3\geqslant 2$.

这里可以稍稍扩大一下正整数的范围,引入整数零,如果用通常的记号 0 来表示零,则按照上面对加法和乘法的定义,对于每个整数 a,有

$$a+0=a,$$
$$a\cdot 0=0.$$

同样可以自然地扩充减法的定义,即对于每个整数 a,令

$$a-a=0.$$

这是零的特定的算术性质.

1.1.2 数系

为了适应实践与理论的需要,必须大大扩充原始自然数的概念.经过漫长而曲折的发展进程,零、负数和分数逐渐被人们所接受,并获得与正整数同样的地位.但是要想在代数运算中完全自如,还必须进一步扩充,使得在数的概念中包括无理数.虽然自然数概念的这种扩充已运用了几个世纪并且已成为近代数学的基础,但是将它们置于坚实的逻辑基础上却还只有不太长的时间.

1. 出于实际测量需要而扩展出的有理数

整数概念是从计数事物的有限集的基础上抽象出来的.但是,人们在日常生活中,不仅要数个别的事物,也需要测量许多量,诸如长度、面积、质量和时间等.如果要求在测量这些量时能够任意地细分,那么就必须超出整数范围而扩大算术的领域.最初的步骤是将测量的问题转化为计数的问题.首先,可以完全任意地选取一个测量单位——如米、尺、公斤、克或秒等各种可能的情形——并约定为 1.然后数一下合起来形成被测量的这些单位的个数,一块已知质量的铅块可能恰好重 54kg.然而,一般来说,数单元的办法常不能恰好数完,因而只用选定单元的整数倍并不能准确地测量所求之量,至多只能说,它位于单元的两个相继的整数倍之间,譬如说在 53kg 与 54kg 之间.在出现这种情况的时候,必须采取进一步的措施,引入新的子单元,它通过将原单元划分为 n 个相等的部分而得到.在日常用语中,这些新单元可以有许多特定的名称,例如,1m 划分为 100cm,1 尺划分为 10 寸,1kg 划分为 1000g,1h 划分为 60min,1min 划分为 60s 等.然而,在数学的符号体系中,由原始单元 1 划分为 n 个相等部分所得的子单元记作记号 $1/n$;且若给定的量恰好含有 m 个子单元,它的度量就记作记号 m/n.这个记号称为分数或比(有时记作 $m:n$).经过若干世纪的摸索和努力之后,人们才自觉地采取一个决定性步骤:记号 m/n 的测量过

程和被测量的具体内容被扬弃了，只是本质地考虑为纯粹的数，且与自然数具有同样的地位. 当 m 和 n 是自然数时，记号 m/n 称为有理数.

对于这些新的记号，"数"(原来仅指自然数)的用法由下述事实辨明，即这些新符号的加法和乘法服从支配自然数运算的定律. 要想证明，必须首先定义有理数的加法、乘法、相等的概念. 众所周知，这些定义是：

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}, \quad \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \tag{1-1}$$

$$\frac{a}{a}=1, \quad \frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad (\text{如果 } ad=bc),$$

其中 a,b,c,d 是任意整数，例如：

$$\frac{2}{3}+\frac{4}{5}=\frac{2\times5+4\times3}{3\times5}=\frac{10+12}{15}=\frac{22}{15},$$

$$\frac{2}{3}\times\frac{4}{5}=\frac{2\times4}{3\times5}=\frac{8}{15},$$

$$\frac{3}{3}=1, \quad \frac{8}{12}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3},$$

如果想用有理数来测量长度、面积等，那么，这些定义确实必须采用. 但严格来说，这些记号的加法、乘法和相等的规则，是我们自己定义的，且除了一致性和可应用性之外，不是外界所强加给我们的. 在定义式(1-1)的基础上，可以证明自然数的算术基本定律在有理数范围内继续保持：

$$\begin{aligned}
&p+q=q+p && (\text{加法交换律}),\\
&p+(q+r)=(p+q)+r && (\text{加法结合律}),\\
&pq=qp && (\text{乘法交换律}),\\
&p(qr)=(pq)r && (\text{乘法结合律}),\\
&p(q+r)=pq+pr && (\text{乘法分配律}).
\end{aligned} \tag{1-2}$$

例如，分数的加法交换律的证明可展示如下：

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}=\frac{cb+da}{db}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}.$$

其中第一个和最后一个等号相应于加法的定义，即式(1-1)，而中间的等号则是应用自然数的加法和乘法的交换律的结果. 读者可以按相同的方法来验证其余四个定律.

为了真正理解这些事实，必须再次强调：有理数是人们创造的，定义式(1-1)是按人们的意志而确立的.

2. 出于有理数的内在需要而进行的扩展

除了实际测量的需要之外，有理数的引入还有其内在的理由，甚至说更加有力的理由. 在自然数的通常算术中，总可以进行两种基本运算，加法和乘法，但是对作为"逆运算"的减法和除法来说，并不总是可能. 两个整数 a,b 之差 $a-b$ 为整数 c，使得 $a-c=b$，就是说，它是方程 $a+x=b$ 的解. 但是在自然数系中，记号 $b-a$ 仅在限制条件 $b>a$ 下有意义，因为只有在此情形下方程 $a+x=b$ 才具有自然数解 x. 引入记号 0，并约定 $a-a=0$，这是

为了取消此限制所迈出的重要一步.更重要的是,通过引入记号$-1,-2,-3,\cdots$,连同在$b<a$时定义

$$b-a=-(a-b),$$

就能确保减法在正、负整数范围内通行无阻.引入新记号$-1,-2,-3,\cdots$后,在包括正、负整数扩展了的算术中,就必须这样来定义运算,使得原来的算术运算规则保持不变,例如,用以支配负整数乘法的规则

$$(-1)\cdot(-1)=1, \tag{1-3}$$

它是根据我们想保持分配律$a(b+c)=ab+ac$的愿望而推演出来的,若规定$(-1)\cdot(-1)=-1$,则记$a=-1,b=1,c=-1$,将有$-1(1-1)=-1-1=-2$;而另一方面,又有$-1(1-1)=-1\cdot 0=0$.数学家花了很长时间才认识到"符号规则"如公式(1-3)所示,连同支配负整数及分数的所有其他定义,都是不能"证明的".它们是人们的创造,借以达到运算自如,同时又保持算术的基本定律.因此在这些定义的基础上,可能且必须被证明的仅是算术中的交换律、结合律以及分配律依然成立.甚至大数学家欧拉也曾经凭借一个完全不可信服的论据来证明$(-1)\cdot(-1)$"必须"等于$+1$.他是这样说的:因为$(-1)\cdot(-1)$必须是$+1$或者-1,又因$-1=(+1)\cdot(-1)$,所以$(-1)\cdot(-1)$不可能是-1.

诚如负整数和零的引入,为没有限制的减法开拓了道路,同样,分数的引入,为除法清除了类似的算术障碍.两个整数a和b的商$x=b/a$,由方程

$$ax=b \tag{1-4}$$

定义,仅当a是b的因子时,才存在整数解x.如果不是这种情形,譬如说$a=2,b=3$,只要引入一个新的记号b/a,称为分数,它服从规则$a(b/a)=b$,从而b/a"按定义"是式(1-4)的解.作为新的数系来说,分数的创造使除法得以无约束地进行——但用零除例外,且断然不予考虑.

对我们来说,诸如$1/0,3/0,0/0$等表示式是没有意义的记号.如果用0除被允许,就会从正确的等式$0\cdot 1=0\cdot 2$推导出谬误的结论$1=2$.然而这种表示式有时采用符号∞(读作"无穷")记之,不过,人们不能把它当作服从数的通常计算规则那样进行运算,因为∞不是一个数.

所有有理数——正整数和正分数,负整数和负分数以及零——组成的数系,它的纯算术意义现在就自明了.因为在此扩展的数系中,不仅在形式上结合律、交换律和分配律依然成立,而且方程$a+x=b$和$ax=b$无条件地具有解$x=b-a$和$x=b/a$,其中在后一种情况下要求$a\neq 0$.换句话说,在有理数的范围内,有理运算——加、减、乘、除——可以无条件地进行,且其运算结果始终不超出这个范围.数的这种封闭性的范围称为**域**.这样可以将有理数称为有理数域.

引入新的符号以扩充范围,使得在原有范围内适用的定律在较大的范围内依然成立,这是数学中扩充原理的一个显著特征.自然数扩充为有理数同时满足理论上和实践上的要求,在理论上,它取消了减法和除法的限制,在实践上,它可用于表示测量的结果.有理数同时满足这两方面的需要,乃是有理数真正的意义.如上所述,数的概念的扩充基于新数的创造和抽象的符号形式,例如0、-2和$3/4$.在17世纪时,有理数并没有被普遍承认与正整数有同样的合法地位,在必须运用它们时,还抱着若干疑虑和惊异的态度,人类先