同济大学教研室最新版《高等数学》配套辅导参考书

高等数学同步辅导

GAODENG SHUXUE TONGBU FUDAO

刘明华 周晖杰 徐海勇 主编

（上册）

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

高等数学同步辅导

（上册）

刘明华　周晖杰　徐海勇　主编

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学同步辅导．上册 / 刘明华，周晖杰，徐海勇主编．—杭州：浙江大学出版社，2008．5
ISBN 978-7-308-05991-6

Ⅰ．高… Ⅱ．①刘…②周…③徐… Ⅲ．高等数学—高等学校—教学参考资料 Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 073505 号

高等数学同步辅导（上册）
刘明华 周晖杰 徐海勇 主编

责任编辑 徐素君
文字编辑 张 鸽
封面设计 刘依群
出版发行 浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn）
电话：0571—88925592 88273066（传真）
排 版 浙江大学出版社电脑排版中心
印 刷 德清县第二印刷厂
开 本 787mm×1092mm 1/16
印 张 10.25
字 数 237 千
版 印 次 2008 年 5 月第 1 版 2008 年 5 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-308-05991-6
定 价 16.00 元

浙江大学出版社发行部邮购电话 （0571）88925591

前　　言

《高等数学》不仅是大多数大学生后续课程学习所必备的基础课，同时也是许多专业硕士研究生入学考试的必考课程。然而，近年来随着教学改革的实施，《高等数学》授课时间也有所减少，这对该课程中基本概念的理解、知识点的融会贯通、知识面的拓展必有一定的影响。另外，后续课程及研究生入学考试对《高等数学》的要求又有所深化。如何解决这样的问题？如何满足学生对《高等数学》学习的不同需求？为此我们编写了这本《高等数学同步辅导》的书，它是学生进行各个章节阶段性复习的指导书，也是教师讲授习题课时所需的参考书。

本书与同济大学数学教研室编写的《高等数学》教材相配套，分上、下两册，共十二章，包括函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、常微分方程、空间解析几何与向量代数、多元函数微分学及应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数内容。

每一章由内容摘要、典型例题与同步练习、基础题、提高题(题后附有参考答案)四部分组成。内容摘要部分总结了本章中定义、重要定理、重要公式及解题方法。典型例题与同步练习部分精选了各类典型例题，并配有同类型的练习题及解答与提示，其中较难的题型以※号标明。基础题部分以基本概念、基本性质、基本计算方法为主，适当配备了简单的证明题及应用题，可以检查学生在《高等数学》学习中是否达到大纲的要求。提高题部分是把大学期间的《高等数学》学习与研究生入学考试的复习紧密衔接起来，可以达到巩固、理解、提高的目的。

总之，本书主要阐述《高等数学》的基本理论和基本方法，剖析了《高等数学》的重点和难点。目的在于帮助学生顺利学习《高等数学》，克服解题过程中遇到的困难，更好地掌握《高等数学》的基本理论和解题方法，以提高分析问题和解决实际问题的能力，为今后的需要打下坚实的基础。

要写好一本教辅书实非易事，本书难免会有缺点和错误，欢迎同行批评指正。

编　者

2008 年 5 月

目　录

第一章

函数与极限

一、内容摘要

(一)函数

1. 实数、集合、区间、绝对值

(1)实数

数是数学分析中研究的主要对象,所学过的数可以归类为:

- 复数 $a+ib$
  - 实数 $a,(b=0)$
    - 有理数
      - 整数
        - 正整数
        - 零
        - 负整数
      - 分数
        - 正分数
        - 负分数
    - 无理数
      - 正无理数
      - 负无理数
  - 纯虚数 $ib,(a=0)$

(2)集合

①集合:具有某种特定性质的事物的总体,称为集合,记为 M.

②元素:组成这个集合的事物称为该集合的元素.设 M 是由具有某种特性的元素组成的集合,记作 $M=\{x\mid x$ 所具有特性$\}$.记号 $a\in M$ 指 a 是集合 M 的元素;$a\notin M$ 指 a 不是集合 M 的元素.

③常用的数集:**N**——全体自然数的集合;**Z**——全体整数集合;**Q**——全体有理数集合;**R**——全体实数集合.

④子集合:若任意 $x\in A$ 都有 $x\in B$,则称 A 是 B 的子集,记为 $A\subset B$.

数集间的关系:$\mathbf{N}\subset\mathbf{Z}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

⑤相等集合:若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$,则称集合 A 与 B 相等,记为 $A=B$.

⑥空集合:不含任何元素的集合,称为空集,记为 ϕ.

(3)区间

区间是用得较多的数集,设 a,b 是实数,且 $a<b$,则作如下定义:

①开区间 $(a,b)=\{x|a<x<b\}$,a,b 为区间端点,$b-a$ 为区间长度;

②闭区间 $[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$;

③半开区间 $[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$,$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$;

④无穷区间 $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$,$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$,
$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$,$(-\infty,+\infty)=\{x|-\infty<x<+\infty\}$.

注 本书中若不需要辨明所论区间是否包含端点,以及是有限区间还是无限区间时,就简单地称它为"区间",记作 I.

⑤邻域:点 a 的 δ 邻域 $U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}=\{x||x-a|<\delta\}$;点 a 的 δ 去心邻域 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x|0<|x-a|<\delta\}$.

(4)绝对值

任意实数 a 的绝对值定义为 $|a|=\begin{cases} a, & a\geqslant 0 \\ -a, & a<0 \end{cases}$,任何一个实数 a 的绝对值非负.

①绝对值的运算:(i) $|ab|=|a|\cdot|b|$;(ii) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$,$b\neq 0$.

②有关绝对值的不等式:

(i)若 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为任意实数,则 $|a_1\pm a_2\pm\cdots\pm a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$;

(ii)若 a,b 为任意实数,则 $||a|-|b||\leqslant|a-b|\leqslant|a|+|b|$;

(iii)若 $|a|\leqslant b$,$b>0$,则 $-b\leqslant a\leqslant b$,若 $|a|\geqslant b$,$b>0$,则 $a\geqslant b$ 或 $a\leqslant -b$.

③平均值不等式:设有 $n(n\geqslant 2)$ 个正实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,则 $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$(几何平均数小于等于算术平均数).当且仅当 $a_1=a_2=\cdots=a_n$ 时,等号成立.

特别有 $x^2+y^2\geqslant 2xy$,当 $x>0$ 时,有 $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 2$.

(5)常用数学符号

①"$\exists$"表示"存在"或"可以找到";

②"$\forall$"表示"任意一个"或"对每一个";

③"$\in$"表示"属于";

④"$\notin$"表示"不属于";

⑤"$A\Rightarrow B$"表示"如果命题 A 成立,则命题 B 成立",或称"A 是 B 的充分条件";

⑥"$A\Leftarrow B$"表示"如果命题 B 成立,则命题 A 成立",或称"A 是 B 的必要条件";

⑦"$A\Leftrightarrow B$"表示"A 是 B 的充分必要条件",或称"A 与 B 等价";

⑧"max"表示"最大","min"表示"最小";

⑨ $\sum\limits_{i=1}^{n}u_i=u_1+u_2+\cdots+u_n$;

⑩ $\prod\limits_{i=1}^{n}u_i=u_1u_2\cdots u_n$.

2. 函数的概念

(1)映射

构成映射的三要素：集合 X，即定义域 $D_f=X$；集合 Y，即值域的范围 $R_f\subset Y$；对应规则 f.

(2)函数

构成函数的两要素为函数的定义域和对应规则.

注　求函数定义域时，运算对函数的某些限制：

①分式中，分母不能为零；

②根式中，负数不能开偶次方；

③对数中，真数非负，即不能为负数或零；

④反三角函数中，要符合反三角函数的定义域.

(3)函数的表示方法

公式法(解析法)，图示法，列表法(在实际中，上述三种方法常结合起来).

(4)反函数

设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 W，对于 W 中任意的 y，至少可以确定一个 $x\in D$与之对应，且满足关系式 $f(x)=y$，由此构成的函数 $x=\varphi(y)$称为 $y=f(x)$的反函数，变量 x 与 y 交换，即得 $y=f^{-1}(x)$.

注　即使 $y=f(x)$是单值函数，其反函数 $y=f^{-1}(x)$也不一定是单值的. 但是如果函数 $y=f(x)$在 D 上不仅单值，而且单调，则其反函数 $y=f^{-1}(x)$在 W 上也是单值的.

(5)显函数与隐函数

若函数 y 由 x 的解析表达式直接表示，即 $y=f(x)$，则称为显函数；若函数的自变量 x 与因变量 y 的对应关系由方程 $F(x,y)=0$ 来确定，则这种关系式称为隐函数.

(6)复合函数

设函数 $y=f(u)$的定义域为 D_f，函数 $u=\varphi(x)$的值域为 R_φ，若 $D_f\cap R_\varphi\neq\varphi$，则称函数 $y=f[\varphi(x)]$为 x 的复合函数.

注　函数 $\varphi(x)$的值域全部或部分落在函数 $f(u)$的定义域内，这点非常重要，若不满足，则不能进行复合运算.

3. 函数的性质

(1)函数的奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点对称.

若$\forall\ x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称函数$f(x)$为偶函数. 若$\forall\ x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称函数 $f(x)$为奇函数.

奇偶函数的性质：①两个偶函数之和(差)是偶函数，两个奇函数之和(差)是奇函数；②两个偶函数或两个奇函数之积或商(分母不为零)是偶函数；③一个奇函数与一个偶函数之积或商(分母不为零)是奇函数.

(2)函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，区间 $I\subset D$.

若$\forall\ x_1,x_2\in I$，当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称函数 $f(x)$在区间 I 上是单调增

加函数.若$\forall\ x_1,x_2\in I$,当$x_1<x_2$时,恒有$f(x_1)>f(x_2)$,则称函数$f(x)$在区间I上是单调减少函数.

(3)函数的有界性

设函数$f(x)$的定义域为D,数集$X\subset D$,若$\exists M>0$,使得$\forall x\in X$,恒有$|f(x)|\leqslant M$,则称函数$f(x)$在X上有界.

(4)函数的周期性

设函数$f(x)$的定义域为D,若$\exists T>0$,使得$\forall x\in D$,有$\forall(x\pm T)\in D$,且$f(x+T)=f(x)$,则称函数$f(x)$为周期函数.

判断一个函数是否为周期函数和求周期函数的周期的步骤如下:

①列出方程$f(x+T)-f(x)=0$;

②由上述方程解出T;

③若$T>0$且为满足方程的最小值时,则$f(x)$是周期函数,且函数的最小周期等于T;

④若$T\leqslant 0$或T与x有关,则$f(x)$不是周期函数.

4. 初等函数

(1)基本初等函数(熟记:定义域、性质、图形)

①常数函数:$y=c$(c为常数).

②幂函数:$y=x^{\mu}$(μ为常数),如$y=x^2,y=x^{-1}$.

③指数函数:$y=a^x(a\neq1,a>0)$,如$y=\mathrm{e}^x,D=(-\infty,+\infty)$.

④对数函数:$y=\log_a x(a\neq1,a>0)$,如$y=\ln x,D=(0,+\infty)$.

⑤三角函数:$y=\sin x,D=(-\infty,+\infty)$;$y=\cos x,D=(-\infty,+\infty)$;

$$y=\tan x,D=\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbf{R},x\neq\frac{2n+1}{2}\pi,n\in\mathbf{Z}\right\};$$

$$y=\cot x,D=\{x\,|\,x\in\mathbf{R},x\neq n\pi,n\in\mathbf{Z}\};$$

$$y=\sec x=\frac{1}{\cos x},y=\csc x=\frac{1}{\sin x}.$$

⑥反三角函数:$y=\arcsin x,y=\arccos x,D=[-1,1]$;

$$y=\arctan x,y=\mathrm{arccot}\,x,D=(-\infty,+\infty).$$

(2)初等函数

①基本初等函数:幂函数,指数函数,对数函数,三角函数,反三角函数统称为基本初等函数.

②初等函数:由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

5. 常见的几种函数

(1)符号函数$\mathrm{sgn}x$

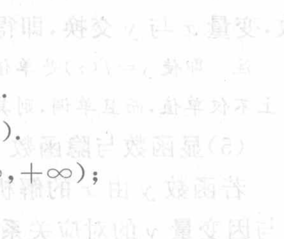

图1.1 符号函数$y=\mathrm{sgn}x$

$$\mathrm{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\0, & x=0\\-1, & x<0\end{cases}$$,如图1.1所示.

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\{-1,0,1\}$.

对任意的 x，有 $x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$，因此称为符号函数.

(2)绝对值函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases},$$

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=[0,+\infty)$.

$$y=|\sin x|=\begin{cases}\sin x, & 2k\pi\leqslant x<(2k+1)\pi\\ -\sin x, & (2k+1)\pi\leqslant x<(2k+2)\pi\end{cases}.$$

(3)取整函数

$y=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，如 $[-3.5]=-4$.

定义域 $D=(-\infty,+\infty)$，值域 $W=\mathbf{Z}$，如图 1.2 所示.

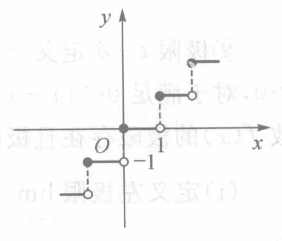

图 1.2 取整函数 $y=[x]$

在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1，所以图形称为阶梯曲线.

(二)极限

1. 数列极限

(1)数列极限的定义

$\varepsilon-N$ 语言 $\Leftrightarrow$ 对于数列 $\{x_n\}$，若存在数 a 满足：$\forall\varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)\in\mathbf{N}$，当 $n>N$ 时，不等式 $|x_n-a|<\varepsilon$ 恒成立，则称数列 $\{x_n\}$ 极限存在或收敛，并把数 a 称为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$；若数列 $\{x_n\}$ 极限不存在，则称数列 $\{x_n\}$ 是发散的.

(2)收敛数列极限的性质

①唯一性：若数列极限存在，则极限唯一.

②有界性：若数列极限存在，则数列一定有界，反之不成立，如 $x_n=(-1)^n$.

③子数列收敛性：若数列收敛于 a，则其任意子数列也收敛于 a.

(3)数列极限的四则运算

设数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n\pm\lim\limits_{n\to\infty}y_n=a\pm b$，

$$\lim_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}y_n=a\cdot b,\ \lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}x_n}{\lim\limits_{n\to\infty}y_n}=\frac{a}{b}\ (b\neq 0).$$

2. 函数的极限

(1)函数极限的定义

①极限 $\varepsilon-X$ 定义 $\Leftrightarrow$ 设函数 $f(x)$ 在 $|x|>X>0$ 内有定义，若存在数 A，满足：$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，对于满足 $|x|>X$ 的任意 x，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称当 $x\to\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在且极限为 A，记作 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$.

(i)定义 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$ 设函数 $f(x)$ 在 $x>X>0$ 内有定义，若存在数 A，满足：$\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，对于满足 $x>X$ 的任意 x，都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立，则称当 $x\to+\infty$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在且极限为 A，记作 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

(ii)定义 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A\Leftrightarrow$ 设函数 $f(x)$ 在 $x<-X$ 内有定义，若存在数 A，满足：$\forall\varepsilon>$

0,$\exists X>0$,对于满足 $x<-X$ 的任意 x,都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立,则称当 $x\to-\infty$ 时,函数 $f(x)$ 的极限存在且极限为 A,记作 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$.

定理 1 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$.

②极限 $\varepsilon-\delta$ 定义$\Leftrightarrow$设函数 $f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有定义,若存在数 A,满足:$\forall\varepsilon>0$,$\exists\delta>0$,对于满足 $0<|x-x_0|<\delta$ 的任意 x,都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立,则称当 $x\to x_0$ 时,函数 $f(x)$ 的极限存在且极限为 A,记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

(i)定义左极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A\Leftrightarrow$设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\delta,x_0)$ 内有定义,若存在数 A,满足:$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,对于满足 $0<x_0-x<\delta$ 的任意 x,都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立,则称当 $x\to x_0^-$ 时,函数 $f(x)$ 的左极限存在且极限为 A,记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

(ii)定义右极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A\Leftrightarrow$设函数 $f(x)$ 在 $(x_0,x_0+\delta)$ 内有定义,若存在数 A,满足:$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,对于满足 $0<x-x_0<\delta$ 的任意 x,都有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒成立,则称当 $x\to x_0^+$ 时,函数 $f(x)$ 的右极限存在且极限为 A,记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$.

定理 2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$.

(2)函数极限性质

①函数极限的唯一性:如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,那么极限唯一.

②函数极限的局部有界性:如果极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,那么存在常数 $M>0$ 和 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $|f(x)|\leqslant M$ 成立.

③函数极限的局部保号性:如果 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,且 $A>0$ 或 $A<0$,那么存在 $\delta>0$,使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有 $f(x)>0$ 或 $f(x)<0$ 成立.

④极限的局部保序性:当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时,函数 $f(x)\geqslant0$ 或 $f(x)\leqslant0$,而且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,则 $A\geqslant0$ 或 $A\leqslant0$.

(3)函数极限的运算法则

在自变量同一变化过程中,若 $\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,则:

①$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

②$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

③$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}\quad(B\neq0)$;

④(复合函数)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=a$,当 $x\in\mathring{U}(x_0)$ 时,$\varphi(x)\neq0$,且 $\lim\limits_{u\to a}\varphi(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(\varphi(x))=\lim\limits_{u\to a}f(u)=A$.

(4)两个重要极限及变形

①$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$;

②$\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$；

③$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=\mathrm{e}$；

④$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

3. 无穷小量与无穷大量

(1)无穷小量与无穷大量的定义

①若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 在这极限过程中为无穷小量$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$(或 $X>0$)，当 $0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)时，有$|f(x)|<\varepsilon$ 成立.

②若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\infty$，则称函数 $f(x)$ 在这极限过程中为无穷大量$\Leftrightarrow\forall\ \varepsilon>0,\exists\ \delta>0$(或 $X>0$)，当 $0<|x-x_0|<\delta$(或$|x|>X$)时，有$|f(x)|>M$ 成立.

(2)无穷小量与无穷大量的关系(在自变量同一变化过程中)

①若 $\lim f(x)=0$，且 $f(x)\neq0$，则 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

②若 $\lim f(x)=\infty$，则 $\lim\dfrac{1}{f(x)}=0$.

(3)无穷小量性质(在自变量同一变化过程中)

①$\lim f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 α 为无穷小量.

②有限个无穷小量的和(差)是无穷小量.

③有限个无穷小量的积是无穷小量.

④无穷小量与有界变量之积是无穷小量.

(4)无穷小量阶的比较

设 $\alpha(x),\beta(x)$ 是自变量同一变化过程中的无穷小量：

①若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$，称 $\alpha(x)$ 是比 $\beta(x)$ 高阶的无穷小量，记 $\alpha=o(\beta)$；

②若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq0$，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是同阶无穷小量；

③若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta^k(x)}=c\neq0$，称 $\alpha(x)$ 是关于 $\beta(x)$ 的 k 阶无穷小量；

④若 $\lim\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$，称 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 是等价无穷小量，记 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

定理 3 (等价无穷小的代换)设 $\alpha(x),\alpha'(x),\beta(x),\beta'(x)$ 均是自变量同一变化过程中的无穷小量，并且 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，又极限 $\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\alpha}{\beta}=\lim\dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

4. 极限的存在性定理(两个准则)

定理 4 (夹逼准则)设在 x_0 的某邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有 $g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$，且$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$.

注 当 $x\to+\infty,x\to-\infty,x\to\infty,x\to x_0^-,x\to x_0^+,n\to\infty$ 有类似结果.

定理 5 (单调有界准则)单调有界数列必有极限.

注 单调增加(减少)且有上(下)界的数列必有极限.

(三)连续函数与间断点

1. 函数连续性概念

(1)函数在点 x_0 连续的定义

①设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某一邻域内有定义,若 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]=0$,则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

② 函数连续的三要素:函数在 x_0 的邻域内有定义;极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在;$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

③$\varepsilon-\delta$ 语言$\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0,\exists\ \delta>0$,对于满足 $|x-x_0|<\delta$ 的任意 x,都有 $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ 成立.

(2)左连续、右连续的概念

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域左侧 $(x_0-\delta,x_0]$ 有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,称函数 $f(x)$ 在点 x_0 左连续.

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域右侧 $[x_0,x_0+\delta)$ 有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,称函数 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

①函数在一点 x_0 处连续的充分必要条件 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

② 函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续的条件:在 (a,b) 内连续;在 $x=a$ 处右连续;在 $x=b$ 处左连续.

2. 函数间断点的分类

(1)间断点的定义

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有下列三种情况之一,则称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处间断,且点 x_0 称为函数 $f(x)$ 的间断点:

①函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 无定义;

②虽在 $x=x_0$ 有定义,但极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在;

③虽然函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,但 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$.

(2)间断点的分类

①若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$,$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 均存在,则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的第一类间断点(包括可去间断点和跳跃间断点).

(i)可去间断点:函数 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义,但是 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$;函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义,且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$,但是 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\neq f(x_0)$,则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点.可以补充(或改变函数)定义,使其连续,即 $F(x)=\begin{cases}f(x) & (x\neq x_0)\\ \lim\limits_{x\to x_0}f(x) & (x=x_0)\end{cases}$.

(ii)跳跃间断点:若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,则称点 x_0 为函数 $f(x)$ 的跳跃间断点.

②若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$至少有一个不存在，则称点$x_0$为函数$f(x)$的第二类间断点.

(i)无穷间断点：$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$或$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$.

(ii)振荡间断点：当$x\to x_0$时，对应的函数值无限次地在两个固定的不同数值之间变化.

3. 连续函数的运算与初等函数的连续性

(1)连续函数的和、差、积、商(分母不为零)是连续函数；

(2)连续函数的复合函数是连续函数；

(3)初等函数在定义区间上是连续函数.

注　若点x_0为函数$f(x)$的连续点，则有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

4. 闭区间上连续函数的性质

(1)有界性：若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则存在$M>0$，当$x\in[a,b]$时，有$|f(x)|\leqslant M$.

(2)最值性：若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，则函数$f(x)$在区间$[a,b]$上一定有最大值与最小值.

(3)介值定理：若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)\neq f(b)$，C是介于$f(a)$与$f(b)$之间的任意数，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使$f(\xi)=C$.

(4)零点定理：若函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，且$f(a)\cdot f(b)<0$，则在(a,b)内至少存在一点ξ，使$f(\xi)=0$.

二、典型例题与同步练习

(一)极限的计算

在计算函数的极限时，常呈现以下几种不定式：$\frac{0}{0},\frac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,\infty-\infty,1^\infty,0^0,\infty^0$.

如何计算极限？下面给出典型的极限的计算方法.

1. 极限呈“$\frac{0}{0}$”型的计算方法

(1)约去零因式(有理分式函数极限)

例1　求极限$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-x}$.

解　$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{0}{2}=0.$$

(2)有理化(带有根式函数的极限)

例2　求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{\sin x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\sin x}=1.$$

(3)重要极限

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$(带有三角函数的极限).

注意公式的特点:$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=1$,其中$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$.

常用的三角公式 $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$,$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$.

例 3 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{\sin 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{2x}\cdot\frac{3x}{\sin 3x}\cdot\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}$.

例 4 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x\sin x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{(\frac{x}{2})^2}\cdot\frac{x}{\sin x}=\frac{1}{2}$.

(4)利用等价无穷小的代换(等价具有自反性、对称性、传递性)

常用的等价无穷小:当 $x\to 0$ 时,$\sin ax\sim\tan ax\sim\arcsin ax\sim\arctan ax\sim ax$,$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2$;$e^x-1\sim x$,$a^x-1\sim x\ln a$;$\ln(1+x)\sim x$,$\log_a(1+x)\sim\frac{x}{\ln a}$;$(1+x)^{\frac{1}{n}}-1\sim\frac{1}{n}x$,$(1+x)^\alpha-1\sim\alpha x$.

例 5 求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2\cos x}=\frac{1}{2}$.

※**例 6** 求极限 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}$.

解 $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x(1-\cos x)}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^3}{\frac{1}{2}(\sqrt{x(1-\cos x)})^2}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{2x^3}{x(1-\cos x)}$

$$=2\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{1-\cos x}=4.$$

◇ **练习题 1-1**

一、计算下列各极限

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x-1}$　　2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1+x}}{x^2-1}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin x-\sin 2x}{x^3}$　　4. $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{x}{n}(x\neq 0)$

二、计算下列各极限

1. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{\sqrt{x}-1}$　　2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{x^2}$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin nx}{\ln\sqrt{1+x}}$　　4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(1-\cos\frac{x}{2})}{x^4}$

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{\cos x-1}$

【练习题 1-1 答案】

一、1. 0　2. $-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$　3. 1　4. x

二、1. 2　2. $\dfrac{1}{4}$　5. -1

2. 极限呈"$\frac{\infty}{\infty}$"型的计算方法

结论 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}=\begin{cases}\dfrac{a_0}{b_0}, & n=m\\ \infty, & n>m\\ 0, & n<m\end{cases}$ ($a_0\neq0, b_0\neq0, m, n$ 为常数).

例 7 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x^2-1)(x+1)}{6x^3+x-5}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x^2-1)(x+1)}{6x^3+x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x^2-x-1}{6x^3+x-5}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}}{6+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}}=\frac{1}{6}.$$

例 8 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+1}{x-1}$.

解 $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=1.$$

例 9 求极限$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x-5)^5(x+2)^{10}}{(x+3)^{15}}$.

解 $$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-5)^5(x+2)^{10}}{(x+3)^{15}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-\frac{5}{x})^5(1+\frac{2}{x})^{10}}{(1+\frac{3}{x})^{15}}=1.$$

◇ **练习题 1-2**

一、计算下列各极限

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[5]{n^5+3n^2}+\sqrt{2n+4}}{2n+3}$　　2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(2x-1)^{30}(3x-2)^{20}}{(2x+1)^{50}}$

二、计算极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$