数量经济学系列丛书

# Copula理论及其在金融分析上的应用

韦艳华　张世英　著

清华大学出版社

数量经济学系列丛书

# Copula理论及其在金融分析上的应用

韦艳华 张世英 著

清华大学出版社
北京

**图书在版编目(CIP)数据**

Copula 理论及其在金融分析上的应用/韦艳华，张世英著. —北京：清华大学出版社，2008.8
(数量经济学系列丛书)
ISBN 978-7-302-17912-2

Ⅰ. C…　Ⅱ. ①韦…　②张…　Ⅲ. 时间序列分析—应用—金融投资—分析—研究
Ⅳ. F830.59

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 091530 号

**责任编辑**：龙海峰
**责任校对**：王凤芝
**责任印制**：杨　艳
**出版发行**：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084
**社　总　机**：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
**投稿与读者服务**：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
**质　量　反　馈**：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
**印 刷 者**：清华大学印刷厂
**装 订 者**：三河市新茂装订有限公司
**经　　销**：全国新华书店
**开　　本**：185×230　**印　张**：10.75　**插　页**：1　**字　数**：229 千字
**版　　次**：2008 年 8 月第 1 版　　**印　　次**：2008 年 8 月第 1 次印刷
**印　　数**：1～3000
**定　　价**：29.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：(010)62770177 转 3103　　产品编号：027607—01

# 作 者 简 介

韦艳华，女，1974 年生，广西柳州人。2001—2004 年就读于天津大学管理学院，师从张世英教授，获管理学博士学位。2004—2007 年在中国人民大学一大公国际资信评估有限公司博士后工作站从事信用与行业风险方面的研究工作。目前是中国社会科学院一中国银行博士后工作站博士后。主要研究方向：金融计量、信用评级、行业研究和风险管理等。主要成果：主持、完成多项金融机构委托的研究项目，一项中国博士后基金资助项目，参与两项自然科学基金项目，在国内核心学术期刊、金融报刊发表论文或专题研究报告十余篇。

张世英，男，1936 年生，北京市人。1960 年毕业于北京大学数学力学系。1960—1970 年在国防部第五研究院和酒泉基地从事研究工作。1978 年到天津大学后长期从事系统工程理论、方法及其应用的研究和教学工作，担任多家学术刊物编委。主要研究方向：系统识别，社会经济系统分析，社会经济系统建模、规划与控制等。主要成果：主持、完成八项国家自然科学基金项目。先后获国家科技进步奖二等奖一项(1987)，原国家教委科技进步奖三等奖一项(1993)，原煤炭部管理科学优秀成果一等奖一项(1997)，天津市科技进步三等奖两项(1994，2002)。已出版学术著作和教材 10 部，在国内外重要学术刊物发表大量论文，其中仅在数量经济方面发表论文计 260 余篇。培养博士 80 余名，硕士约 250 名。

# 前　　言

Copula 理论的提出可以追溯到 1959 年，Sklar 通过定理形式将多元分布与 Copula 函数联系起来，通过 Copula 函数和边缘分布可以构造多元分布函数。Copula 函数实际上是一种将联合分布与它们各自边缘分布连接在一起的函数，因此人们也称它为连接函数。20 世纪 90 年代后期，Copula 理论和方法在国外开始得到迅速发展并应用到金融、保险等领域的相关分析、投资组合分析和风险管理等多个方面。近年来，国内对 Copula 方法及其应用也得到广泛关注，其应用范围不断拓展。

随着 Copula 理论和方法在国内金融、保险等领域应用的广泛展开，很需要一本介绍这一领域内容的书籍，使得大学生、研究生和研究人员很快进入这一领域，本书为此而写作。本书对 Copula 理论和方法进行了系统的介绍，特别是针对中国金融市场的应用做了大量的实证工作，有利于加深读者对 Copula 理论、方法及其应用的理解。全书共分五章。第 1 章介绍 Copula 函数的定义、基本性质和相关理论，讨论基于 Copula 理论的一致性和相关性测度，探讨常用的几类 Copula 函数的基本性质及其在金融分析中的应用。第 2 章详细讨论 Copula 理论在多变量时间序列模型（包括 Copula-GARCH 类模型和 Copula-SV 类模型）的构建、估计和检验等问题，研究中国股市的相关模式和相关结构。第 3 章和第 4 章讨论时变相关 Copula 模型和变结构 Copula 模型的建模方法和应用特点，研究中国股市动态相关性和变结构特点。第 5 章讨论 Copula 理论的仿真技术及其投资组合风险分析问题，包括多元正态 Copula、t-Copula 和多元阿基米德 Copula 函数的仿真技术以及相应的投资组合风险实证分析，Copula 模型在金融波动溢出分析和信用风险分析中的应用。

本项研究工作得到国家自然科学基金项目——“多变量矩序列长期均衡关系及动态金融风险规避策略研究”（No. 70471050）的资助。

本书可作为统计学、数量经济、金融工程等类硕士研究生、博士研究生以及金融、保险领域实际工作者参考书。

在该书写作中，张瑞锋、任仙玲同志给予了帮助。本书在出版过程中，得到了清华大学出版社有关领导和编辑的许多帮助。在此谨向有关同志致以衷心的感谢！

由于作者的水平有限，书中存在错误与不妥之处，恳请读者批评指正。

张世英

2008 年 3 月

# 目　　录

# 第 1 章　Copula 理论与相关性分析

Copula 理论的提出要追溯到 1959 年，Sklar 指出，可以将一个联合分布分解为 $k$ 个边缘分布和一个 Copula 函数，这个 Copula 函数描述了变量间的相关性[1]。由此看出，Copula 函数实际上是一类将联合分布函数与它们各自的边缘分布函数连接在一起的函数，因此也有人将它称为连接函数[2]。

本章在介绍 Copula 函数定义和基本性质的基础上，探讨基于 Copula 函数的相关性测度，重点讨论几类常用 Copula 函数的性质及其在相关性分析上的应用特点，最后介绍 Copula 模型的构建方法和几种常用的参数估计和检验方法。

## 1.1　Copula 函数的定义与基本性质

### 1.1.1　二元 Copula 函数

#### 1.1.1.1　二元 Copula 函数的定义

**定义 1-1**(Nelsen，2006)[3]　二元 Copula 函数是指具有以下性质的函数 $C(\cdot,\cdot)$：

(1) $C(\cdot,\cdot)$的定义域为：$I^2$，即$[0,1]^2$；

(2) $C(\cdot,\cdot)$有零基面(grounded)* 且是二维递增(2-increasing)** 的；

(3) 对任意变量 $u,v\in[0,1]$，满足：$C(u,1)=u$ 和 $C(1,v)=v$。

假定 $F(x)$，$G(y)$是连续的一元分布函数，令 $u=F(x)$，$v=G(y)$，则 $u,v$ 均服从$[0,1]$均匀分布，即 $C(u,v)$是一个边缘分布服从$[0,1]$均匀分布的二元分布函数，且对于定义域内的任意一点$(u,v)$均有：$0\leqslant C(u,v)\leqslant 1$。

#### 1.1.1.2　二元 Copula 函数的基本性质

根据定义 1-1，可以推导出二元 Copula 函数 $C(u,v)$的一些基本性质：

(1) 对 $u,v\in[0,1]$中的任一变量，$C(u,v)$都是非减的；即若保持一个变量不变，Copula 函数值将随着另一个变量的增大而增大(或不变)。图 1-1 以 Copula 函数 $C(u,v;\theta)=(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-1/\theta}$，$\theta=5$ 为例，描述了 Copula 函数的这一性质。

---

* 令 $H(x,y)$是定义在区域 $S_1\times S_2$ 内的二元函数，如果至少存在一个 $a_1\in S_1$ 和一个 $a_2\in S_2$，使得 $H(x,a_2)=0=H(a_1,y)$，那么称函数 $H(x,y)$有零基面(grounded)，其中 $S_1$，$S_2$ 为非空的实数子集。

** $N$ 维空间中的 $N$ 维递增函数类似于单变量情况下的非减函数。例如：对于二元函数 $H(x,y)$，若在任意二维实数空间 $B=[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]$中，均有：$V_H(B)=H(x_2,y_2)-H(x_2,y_1)-H(x_1,y_2)+H(x_1,y_1)\geqslant 0$，那么称函数 $H(x,y)$是二维递增的。

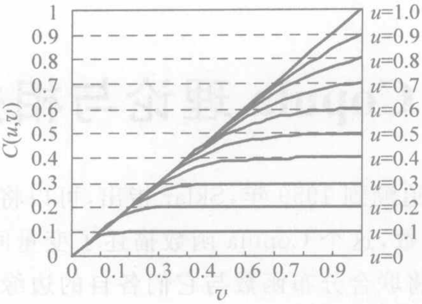



图 1-1　Copula 函数值与变量增长的关系图

(2) $C(0,v)=C(u,0)=0, C(1,v)=v, C(u,1)=u$；即只要有一个变量的取值为 0，相应的 Copula 函数值就为 0；若有一个变量的取值为 1，则 Copula 函数值完全由另一个变量的取值决定。图 1-2 以 Copula 函数 $C(u,v;\ \theta)=(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-1/\theta}$，$\theta=0.9$ 为例，描述了 Copula 函数的这一性质。

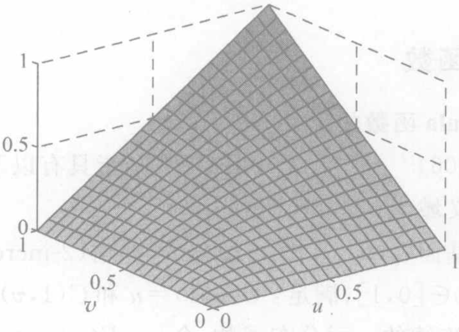



图 1-2　Copula 函数分布图

(3) $\forall u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$，如果 $u_1<u_2, v_1<v_2$，那么

$$C(u_2,v_2)-C(u_2,v_1)-C(u_1,v_2)+C(u_1,v_1)\geqslant 0$$

即若变量 $u,v$ 的取值同时增大，则相应的 Copula 函数值也增大。图 1-3 仍以 Copula 函数 $C(u,v;\ \theta)=(u^{-\theta}+v^{-\theta}-1)^{-1/\theta}$，$\theta=0.9$ 为例，描述 Copula 函数的这一性质。

(4) 对任意变量 $u,v\in[0,1]$，有 $\max(u+v-1,0)\leqslant C(u,v)\leqslant \min(u,v)$。令 $C^{+}(u,v)=\min(u,v)$，$C^{-}(u,v)=\max(u+v-1,0)$，称 $C^{+}(u,v)$ 和 $C^{-}(u,v)$ 分别为 Fréchet 上、下界，事实上它们给出了任意一个二元 Copula 函数 $C(u,v)$ 的边界。图 1-4 和图 1-5 分别给出了 Fréchet 上界 $C^{+}(u,v)$ 和下界 $C^{-}(u,v)$ 的分布和相应的等高线图。

(5) 对任意的 $u_1,u_2,v_1,v_2\in[0,1]$，有 $|C(u_2,v_2)-C(u_1,v_1)|\leqslant|u_2-u_1|+|v_2-v_1|$；

(6) 若 $u,v$ 独立，则 $C(u,v)=uv$。令 $C^{\perp}(u,v)=uv$，图 1-6 给出了函数 $C^{\perp}(u,v)$ 的分布和相应的等高线图。

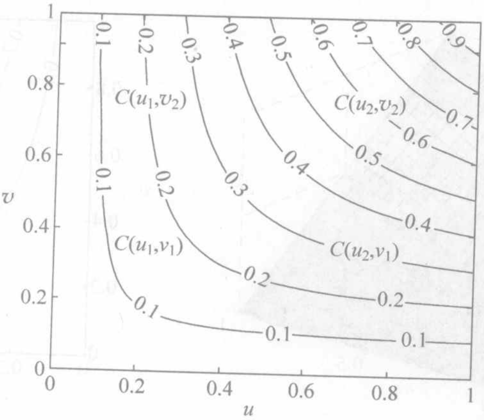
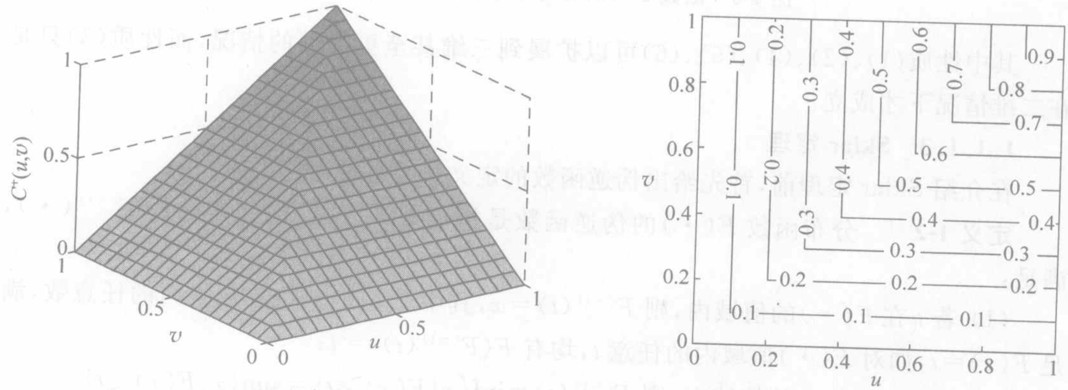


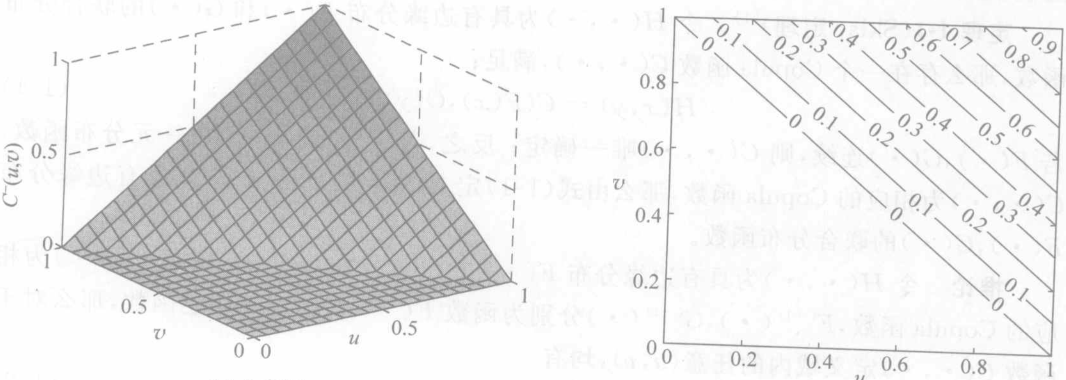

图 1-3　Copula 函数的等高线图




(a) 分布图

(b) 等高线图

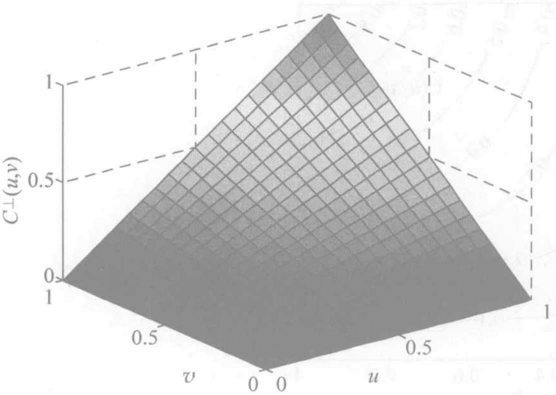
图 1-4　Fréchet 上界 $C^+(u,v)$ 的分布和相应的等高线图



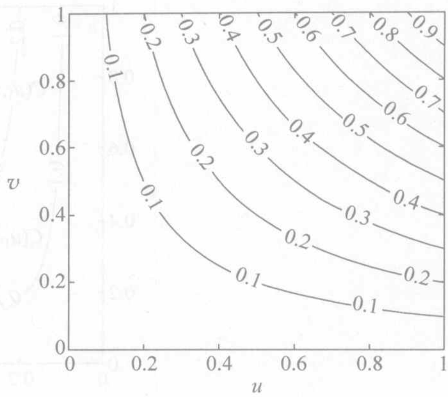

(a) 分布图

(b) 等高线图

图 1-5　Fréchet 下界 $C^-(u,v)$ 的分布和相应的等高线图



(a) 分布图



(b) 等高线图

图 1-6 函数 $C^{\perp}(u,v)$的分布和相应的等高线图

其中性质(1)、(2)、(4)、(5)、(6)可以扩展到三维甚至更高维的情况，而性质(3)只是在二维情况下才成立。

**1.1.1.3 Sklar 定理**

在介绍 Sklar 定理前，首先给出伪逆函数的定义。

**定义 1-2**[4] 分布函数 $F(\cdot)$的伪逆函数是指定义在$[0,1]$区间的函数 $F^{(-1)}(\cdot)$，满足：

(1) 若 $t$ 在 $F(\cdot)$的值域内，则 $F^{(-1)}(t)=x$，其中 $x$ 是定义在实数集内的任意数，满足 $F(x)=t$，如对 $F(\cdot)$值域内的任意 $t$，均有 $F(F^{(-1)}(t))=t$；

(2) 若 $t$ 在 $F(\cdot)$的值域内，则 $F^{(-1)}(t)=\inf\{x \mid F(x)\geqslant t\}=\sup\{x \mid F(x)\leqslant t\}$。

如果函数 $F(\cdot)$是严格单调递增的，那么其伪逆函数是唯一的，即为一般意义上的逆函数，通常记作 $F^{-1}(\cdot)$。

**定理 1-1**(Sklar 定理)[1] 令 $H(\cdot,\cdot)$为具有边缘分布 $F(\cdot)$和 $G(\cdot)$的联合分布函数，那么存在一个 Copula 函数 $C(\cdot,\cdot)$，满足：

$$H(x,y)=C(F(x),G(y)) \tag{1-1}$$

若 $F(\cdot)$，$G(\cdot)$连续，则 $C(\cdot,\cdot)$唯一确定；反之，若 $F(\cdot)$，$G(\cdot)$为一元分布函数，$C(\cdot,\cdot)$为相应的 Copula 函数，那么由式(1-1)定义的函数 $H(\cdot,\cdot)$是具有边缘分布 $F(\cdot)$，$G(\cdot)$的联合分布函数。

**推论** 令 $H(\cdot,\cdot)$为具有边缘分布 $F(\cdot)$，$G(\cdot)$的联合分布函数，$C(\cdot,\cdot)$为相应的 Copula 函数，$F^{(-1)}(\cdot)$，$G^{(-1)}(\cdot)$分别为函数 $F(\cdot)$，$G(\cdot)$的伪逆函数，那么对于函数 $C(\cdot,\cdot)$定义域内的任意$(u,v)$，均有

$$C(u,v)=H(F^{(-1)}(u),G^{(-1)}(v)) \tag{1-2}$$

根据以上定理和推论，不仅可以通过边缘分布函数和一个连接它们的 Copula 函数构造

联合分布函数,还可以利用分布函数的伪逆函数和联合分布函数,求出相应的 Copula 函数。

若 $F(\cdot)$,$G(\cdot)$连续,联合分布函数已知,就可以通过式(1-2)求出相应的 Copula 函数,这个 Copula 函数完全描述了变量间的相关结构。

例如:Gumbel 的 logistic 二元分布函数为[3]:

$$H(x,y) = (1+\mathrm{e}^{-x}+\mathrm{e}^{-y})^{-1}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

它的边缘分布分别为

$$F(x) = (1+\mathrm{e}^{-x})^{-1}, \quad G(y) = (1+\mathrm{e}^{-y})^{-1}$$

令 $u=F(x)$,$v=G(y)$,则

$$x = F^{-1}(u) = -\ln(u^{-1}-1), \quad y = G^{-1}(v) = -\ln(v^{-1}-1)$$

相应的 Copula 函数为

$$\begin{aligned} C(u,v) &= H(x,y) = H(F^{-1}(u),G^{-1}(v)) \\ &= [1+\exp(\ln(u^{-1}-1))+\exp(\ln(v^{-1}-1))]^{-1} \\ &= (u^{-1}+v^{-1}-1)^{-1} \\ &= uv(u+v-uv)^{-1} \end{aligned}$$

**定理 1-2**(Nelsen,2006)[3]　令 $C(u,v)$为一个二元 Copula 函数,那么对于任意的 $v\in[0,1]$,偏微分$\partial C(u,v)/\partial u$ 对几乎所有的 $u$ 都存在,并且满足:

$$0 \leqslant \frac{\partial}{\partial u}C(u,v) \leqslant 1 \tag{1-3}$$

同样的,对于任意的 $u\in[0,1]$,偏微分$\partial C(u,v)/\partial v$ 对几乎所有的 $v$ 都存在,并且满足:

$$0 \leqslant \frac{\partial}{\partial v}C(u,v) \leqslant 1 \tag{1-4}$$

另外,关于 $u$ 的函数 $C_v(u)\equiv\frac{\partial}{\partial v}C(u,v)$和关于 $v$ 的函数 $C_u(v)\equiv\frac{\partial}{\partial u}C(u,v)$在[0,1]内几乎处处非减,且 $C_v(u)$和 $C_u(v)$均服从[0,1]均匀分布。

事实上,通过 Copula 函数 $C(\cdot,\cdot)$的密度函数 $c(\cdot,\cdot)$和边缘分布函数 $F(\cdot)$,$G(\cdot)$,还可以方便地求出分布函数 $H(x,y)$的密度函数:

$$h(x,y) = c(F(x),\quad G(y))\cdot f(x)\cdot g(y) \tag{1-5}$$

其中 $c(u,v)=\dfrac{\partial C(u,v)}{\partial u\partial v}$,$u=F(x)$,$v=G(y)$,$f(\cdot)$,$g(\cdot)$分别为边缘分布函数 $F(\cdot)$,$G(\cdot)$的密度函数。

图 1-7 给出了在 Copula 函数相同,随机变量 $X$,$Y$ 分别服从不同边缘分布的情况下,随机变量 $X$,$Y$ 的联合分布密度函数的等高线图。

图 1-7 表明,在 Copula 函数相同的情况下,通过选取不同的边缘分布就可以构造出不同的联合分布。事实上,通过选取不同的 Copula 函数或同时选取不同的 Copula 函数和边缘分布,都可以构造出不同的联合分布。

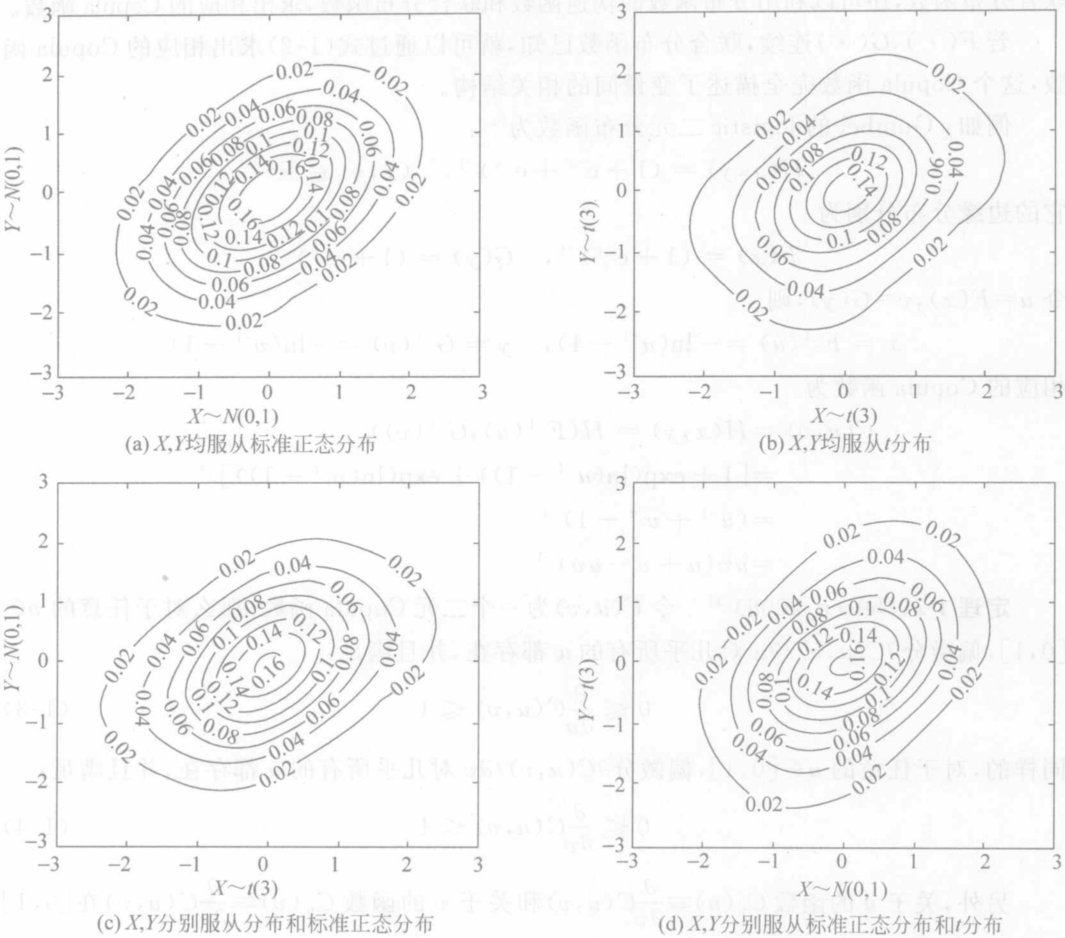



图 1-7　具有不同边缘分布和二元正态 Copula 函数($\rho=0.45$)的二元联合分布密度函数的等高线图

由此可见，Sklar 定理不仅为人们提供了一条在不研究边缘分布的情况下分析变量之间相关结构的途径，同时也为求取联合分布函数提供了一种便捷的新方法。

## 1.1.2　多元 Copula 函数

### 1.1.2.1　多元 Copula 函数的定义

**定义 1-3**(Nelsen，2006)[3]　$N$ 元 Copula 函数是指具有以下性质的函数 $C(\cdot,\cdots,\cdot)$：

(1) 定义域为：$I^N$，即$[0,1]^N$；

(2) $C(\cdot,\cdots,\cdot)$有零基面(grounded)且是 $N$ 维递增($N$-increasing)的；

(3) $C(\cdot,\cdots,\cdot)$的边缘分布 $C_n(\cdot)$，$n=1,2,\cdots,N$，且满足：

$$C_n(u_n) = C(1,\cdots,1,u_n,1,\cdots,1) = u_n$$

其中 $u_n \in [0,1]$，$n=1,2,\cdots,N$。

显然，若 $F_1(\cdot),F_2(\cdot),\cdots,F_N(\cdot)$是连续的一元分布函数，令 $u_n=F_n(x_n)$，$n=1,2,\cdots,N$，则 $C(u_1,u_2,\cdots,u_N)$是一个边缘分布均服从$[0,1]$均匀分布的多元分布函数。

#### 1.1.2.2　多元 Copula 函数的性质

为表述方便，在介绍多元 Copula 函数的性质之前，首先介绍几个相关的定义和概念。

**定义 1-4**(Nelsen,2006)[3]　若

$$\forall (u_1,u_2,\cdots,u_N) \in I^N, \quad C_1(u_1,u_2,\cdots,u_N) \leqslant C_2(u_1,u_2,\cdots,u_N)$$

则称 Copula 函数 $C_1(\cdot,\cdots,\cdot)$小于 Copula 函数 $C_2(\cdot,\cdots,\cdot)$（或 $C_2(\cdot,\cdots,\cdot)$大于 $C_1(\cdot,\cdots,\cdot)$），

记作：$C_1 \prec C_2$（或 $C_2 \succ C_1$）。

二维 Copula 函数的 Fréchet 上界和下界可以扩展到 $N$ 维的情形[3,5]：

$$C^+(u_1,u_2,\cdots,u_N) = \min(u_1,\cdots,u_n,\cdots,u_N) \tag{1-6}$$

$$C^-(u_1,u_2,\cdots,u_N) = \max\left(\sum_{n=1}^{N} u_n - N + 1, 0\right) \tag{1-7}$$

以下将 Fréchet 上界简记为 $C^+$，Fréchet 下界简记为 $C^-$。当 $N \geqslant 2$ 时，$C^+$是一个 $N$ 元 Copula 函数，但当 $N>2$ 时，严格的说 $C^-$并不是一个 Copula 函数。

根据多元 Copula 函数的定义，可以推导得到 $N$ 元 Copula 函数 $C(\cdot,\cdots,\cdot)$（简记为 $C$）的一些基本性质：

(1) 对任意的变量 $u_n \in [0,1]$，$n=1,2,\cdots,N$，$C(u_1,u_2,\cdots,u_N)$都是非减的；

(2) $C(u_1,u_2,\cdots,0,\cdots,u_N)=0$，$C(1,\cdots,1,u_n,1,\cdots,1)=u_n$；

(3) 对任意的变量 $u_n,v_n \in [0,1]$，$n=1,2,\cdots,N$，均有

$$|C(u_1,u_2,\cdots,u_N) - C(v_1,v_2,\cdots,v_N)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} |u_n - v_n|;$$

(4) $C^- \prec C \prec C^+$；

(5) 若变量 $u_n \in [0,1]$，$n=1,2,\cdots,N$ 相互独立，且用 $C^\perp$表示独立变量的 Copula 函数，则

$$C^\perp = C(u_1,u_2,\cdots,u_N) = \prod_{n=1}^{N} u_n 。$$

#### 1.1.2.3　多元分布的 Sklar 定理

**定理 1-3**(多元分布的 Sklar 定理)[1]　令 $F(\cdot,\cdots,\cdot)$为具有边缘分布 $F_1(\cdot)$，$F_2(\cdot),\cdots,F_N(\cdot)$的联合分布函数，那么存在一个 Copula 函数 $C(\cdot,\cdots,\cdot)$，满足：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_N) = C(F_1(x_1),F_2(x_2),\cdots,F_N(x_N)) \tag{1-8}$$

若 $F_1(\cdot),F_2(\cdot),\cdots,F_N(\cdot)$连续，则 $C(\cdot,\cdots,\cdot)$唯一确定；反之，若 $F_1(\cdot)$，

$F_2(\cdot),\cdots,F_N(\cdot)$为一元分布，$C(\cdot,\cdots,\cdot)$为相应的 Copula 函数，那么由式(1-8)定义的函数 $F(\cdot,\cdots,\cdot)$是具有边缘分布 $F_1(\cdot),F_2(\cdot),\cdots,F_N(\cdot)$的联合分布函数。

**推论**　令 $F(\cdot,\cdots,\cdot)$为具有边缘分布 $F_1(\cdot),F_2(\cdot),\cdots,F_N(\cdot)$的联合分布函数，$C(\cdot,\cdots,\cdot)$为相应的 Copula 函数，$F_1^{(-1)}(\cdot),F_2^{(-1)}(\cdot),\cdots,F_N^{(-1)}(\cdot)$分别为 $F_1(\cdot),F_2(\cdot),\cdots,F_N(\cdot)$的伪逆函数，那么对于函数 $C(\cdot,\cdots,\cdot)$定义域内的任意$(u_1,u_2,\cdots,u_N)$，均有

$$C(u_1,u_2,\cdots,u_N)=F(F_1^{(-1)}(u_1),F_2^{(-1)}(u_2),\cdots,F_N^{(-1)}(u_N))\tag{1-9}$$

与二元分布函数类似，通过 Copula 函数 $C(\cdot,\cdots,\cdot)$的密度函数 $c(\cdot,\cdots,\cdot)$和边缘分布 $F_1(\cdot),F_2(\cdot),\cdots,F_N(\cdot)$，可以方便地求出 $N$ 元分布函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_N)$的密度函数：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_N)=c(F_1(x_1),F_2(x_2),\cdots,F_N(x_N))\prod_{n=1}^{N}f_n(x_n)\tag{1-10}$$

其中 $c(u_1,u_2,\cdots,u_N)=\dfrac{\partial C(u_1,u_2,\cdots,u_N)}{\partial u_1\partial u_2\cdots\partial u_N}$，$f_n(\cdot),n=1,2,\cdots,N$ 是边缘分布 $F_n(\cdot)$，$n=1,2,\cdots,N$ 的密度函数。

根据推论，利用分布函数的伪逆函数和联合分布函数，可以求出描述变量之间相关结构的 Copula 函数。而利用 Copula 函数，可以达到将边缘分布和变量间的相关结构分开来研究的目的，同时减小多变量概率模型建模和分析的难度，并使建模和分析过程更加清晰。

### 1.1.3　条件 Copula 函数

大多数金融时间序列都具有条件异方差特性，Copula 理论很容易推广到条件 Copula 的情形，下面以二元条件 Copula 函数为例，简要介绍条件 Copula 函数及其相关定理。

**定义 1-5**　具有以下性质的函数 $C(\cdot,\cdot|\cdot)$称为二元条件 Copula 函数[6]：

(1) $C(u,0|\Theta)=C(0,v|\Theta)=0,C(u,1|\Theta)=u,C(1,v|\Theta)=v$，其中 $u,v\in[0,1]$；

(2) $V_C([u_1,u_2]\times[v_1,v_2]|\Theta)\equiv C(u_2,v_2|\Theta)-C(u_1,v_2|\Theta)-C(u_2,v_1|\Theta)+C(u_1,v_1|\Theta)\geqslant 0$，其中 $u_1,u_2,v_1,v_2\in[0,1],u_1\leqslant u_2,v_1\leqslant v_2$。

其中 $\Theta$ 是条件集。

条件(1)给出了分布函数的下限，并确保边缘分布是均匀分布；而 $V_C([u_1,u_2]\times[v_1,v_2]|\Theta)$事实上可以表示观测点落在区域$[u_1,u_2]\times[v_1,v_2]$中的条件概率，因此条件(2)确保观测点落在区域$[u_1,u_2]\times[v_1,v_2]$中的概率非负。

**定理 1-4**(连续条件分布的 Sklar 定理)[1]　令 $H(\cdot,\cdot|\cdot)$是一个具有条件边缘分布 $F(\cdot|\cdot)$和 $G(\cdot|\cdot)$的条件二元分布函数，$\Theta$ 是条件集，那么，存在一个条件 Copula 函数 $C(\cdot,\cdot|\cdot)$，使得

$$H(x,y|\Theta)=C(F(x|\Theta),G(y|\Theta)|\Theta)\tag{1-11}$$

其中 $x,y\in\bar{R}$，$\bar{R}\equiv R\cup\{\pm\infty\}$。若 $F(\cdot\mid\cdot)$、$G(\cdot\mid\cdot)$连续，则 $C(\cdot,\cdot\mid\cdot)$唯一确定；反之，若 $F(\cdot\mid\cdot)$、$G(\cdot\mid\cdot)$是一元条件分布函数，$C(\cdot,\cdot\mid\cdot)$是相应的条件 Copula 函数，那么由式(1-11)定义的函数 $H(\cdot,\cdot\mid\cdot)$是具有条件边缘分布 $F(\cdot\mid\cdot)$和 $G(\cdot\mid\cdot)$的二元条件分布函数。

Copula 函数的参数估计常采用极大似然估计，而极大似然函数要用到式(1-11)的密度函数，若 $F(\cdot\mid\cdot)$和 $G(\cdot\mid\cdot)$是可微的，$H(\cdot,\cdot\mid\cdot)$和 $C(\cdot,\cdot\mid\cdot)$是二次可微的，那么函数 $H(\cdot,\cdot\mid\cdot)$的密度函数很容易求得

$$\begin{aligned}h(x,y\mid\Theta)&\equiv\frac{\partial^2 H(x,y\mid\Theta)}{\partial x\partial y}\\&=\frac{\partial^2 C(F(x\mid\Theta),G(y\mid\Theta)\mid\Theta)}{\partial(F(x\mid\Theta))\partial(G(y\mid\Theta))}\cdot\frac{\partial F(x\mid\Theta)}{\partial x}\cdot\frac{\partial G(y\mid\Theta)}{\partial y}\\&=c(F(x\mid\Theta),G(y\mid\Theta)\mid\Theta)\cdot f(x\mid\Theta)\cdot g(y\mid\Theta)\end{aligned}$$

令 $u=F(x\mid\Theta)$，$v=G(y\mid\Theta)$，则函数 $H(\cdot,\cdot\mid\cdot)$的密度函数为

$$h(x,y\mid\Theta)=c(u,v\mid\Theta)\cdot f(x\mid\Theta)\cdot g(y\mid\Theta)\tag{1-12}$$

其中 $x,y\in\bar{R}$。

## 1.2　基于 Copula 函数的相关性测度

### 1.2.1　基于 Copula 函数的相关性测度的特点

**定理 1-5**(Nelson，2006)[3]　对随机变量 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 做严格的单调增变换，相应的 Copula 函数不变，即若$\frac{\partial h_n(x_n)}{\partial x_n}>0$，$n=1,\cdots,N$，则

$$C_{x_1,x_2,\cdots,x_N}=C_{h_1(x_1),h_2(x_2),\cdots,h_N(x_N)}$$

其中：$h_n(x_n)$为随机变量 $x_n$ 的函数；

$C_{x_1,x_2,\cdots,x_N}$表示连接 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 的 Copula 函数；

$C_{h_1(x_1),h_2(x_2),\cdots,h_N(x_N)}$表示连接 $h_1(x_1),h_2(x_2),\cdots,h_N(x_N)$的 Copula 函数。

基于 Copula 函数的连续随机变量间的相关性测度的一个重要性质就来源于上述定理，即如果对变量进行严格单调增变换，由 Copula 函数导出的相关性测度的值不会改变。因此，基于 Copula 函数的相关性测度反映的是严格单调增变换下的相关性，比线性相关系数的适用范围宽泛。

### 1.2.2　基于 Copula 函数的相关性测度

#### 1.2.2.1　Kendall 秩相关系数 $\tau$

考察两个变量的相关性时，最简单、直观的方法是考察它们的变化趋势是否一致。若一致，表明变量间存在正相关；若正好相反，表明变量间存在负相关，由此建立了一致性