21世纪高职高专规划教材

高等数学

陈连凤 主编

中国广播电视出版社
CHINA RADIO & TELEVISION PUBLISHING HOUSE

21 世纪高职高专教育规划教材

高等数学

主　编　　陈连凤
副主编　　史贞军　李　峰

中国广播电视出版社
CHINA RADIO & TELEVISION PUBLISHING HOUSE

图书在版编目（CIP）数据

高等数学／陈连风主编. -北京：中国广播电视出版社，
2008.1
ISBN 978-7-5043-5463-1

Ⅰ.高… Ⅱ.陈… Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—
教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第167447号

高等数学

主　　编	陈连风
责任编辑	任逸超
封面设计	曾秋海
责任校对	梁　君
监　　印	赵　宁
出版发行	中国广播电视出版社
电　　话	86093580　86093583
社　　址	北京市西城区真武庙二条9号（邮政编码　100045）
经　　销	全国各地新华书店
印　　刷	北京市朝阳区小红门印刷厂
开　　本	787毫米×1092毫米　1/16
字　　数	239（千）字
印　　张	14.25
版　　次	2008年1月第1版　2008年1月第1次印刷
印　　数	6000册
书　　号	ISBN 978-7-5043-5463-1
定　　价	26.00元

前　言

本书是普通高等教育规划教材，是根据高职高专教育教学要求而编写，为了更好地适应高职高专教育的发展，本书力求贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”，从目前高职高专学生的实际需要出发。它既适合高职高专院校使用，也适用于成人高校的专科及本科院校举办的二级职业技术学院和民办高校使用。

本书具有如下特点：

一、体系的实用性。以实用为宗旨，注意实际运用，在一定程度上体现了理工结合，文理渗透，有利于拓宽学生视野。

二、内容的通俗性。力求原理简洁，推断简明，举例简单实用，章节紧凑，便于读者阅读。易懂，也可作自学选用。

三、使用的广泛性。在部分章节的安排上，考虑到不同专业的教学内容，可以有选择地进行教学。

由于水平所限，难免存在疏漏之处，恳请读者批评指正。

编　者

2008 年 1 月

目录

第一章　函数

本章学习目标

1. 理解函数的概念，并能熟练地求函数的定义域和函数值。

2. 熟练掌握函数的简单性质。

3. 了解反函数和复合函数初等函数的概念。

4. 掌握经济学中的常用函数。

重温中学所学习过的函数的概念及其性质，对于做好初等数学和高等数学的衔接是至关重要的。

第一节　函数的概念

在同一个自然现象或技术过程中，往往有几个变量同时变化．而这几个变量并不是彼此孤立变化的，而是相互有联系，遵从一定规律变化的.

现在考虑两个变量的简单情形.

例 1　圆的面积问题．考虑圆的面积 A 与它的半径 r 之间的依赖关系：$A=\pi r^2$．当圆的半径 r 在区间 $(0,+\infty)$ 内任意取定一个数值时，圆的面积 A 也就随之确定了．当半径 r 变化时，其面积 A 也变化.

例 2　自由落体问题．设物体下落的时间为 t，下落距离为 h，假定从 $t=0$ 时开始下落，那么 h 与 t 之间的依赖关系由公式 $h=\frac{1}{2}gt^2$ 给出，其中 g 为重力加速度．在这个关系中，下落距离 h 随时间 t 的变化而变化．若物体落地的时刻为 $t=T$，则当时间 t 在区间 $[0,T]$ 内任意取定一个数值时，由上式即可确定下落距离 h．例如，当 $t=1$ 秒时，$h=\frac{1}{2}g$；当 $t=2$ 秒时，$h=2g$；等等.

例 3　一块钢坯从温度为 1000℃ 的炉中取出后，放入温度为 0℃ 的冷水中．每隔一分钟测量一次钢坯的温度，得到如下的数据：

时间/min	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
温度/℃	607	367	223	135	82	50	30	18	11	6	4	2.5	1.8	1.3	0.9	0.6

从这个表格可以清楚地看出钢坯的温度随着时间变化的规律，随着时间的推移，钢坯的温度逐渐下降，越来越接近冷水的温度.

上述几个例子描述的问题各不相同，但当抽去所考虑的量的具体含义后，它们都表达了两个变量之间的依赖关系：当其中一个变量在某一范围内取定一个值时，另一个变量就

按一定的法则有一个确定的值与之对应. 两个变量之间的这种对应关系就是函数概念的实质. 下面给出函数的定义.

定义 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的数集. 如果对于每一个 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则(或关系)总有唯一确定的数值与它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$. x 称为**自变量**，y 称为**因变量(或函数)**，数集 D 称为这个函数的定义域，而因变量 y 的变化范围称为函数 $f(x)$ 的值域.

函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可以用 φ、F 等其他字母表示，此时函数记作 $y=\varphi(x)$、$y=F(x)$ 等.

在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义确定的，如在例 1 中，定义域 $D=\{r|r\in(0,+\infty)\}$；在例 2 中，定义域 $D=\{t|t\in[0,T]\}$. 如果不考虑函数的实际意义，而抽象地研究用算式表达的函数，则函数的定义域就是自变量所能取得的使算式有意义的一切实数值. 例如，函数 $y=\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{x-1}$ 的定义域是$[(-2,1)\cup(1,2)]$.

由于函数的对应法则是多种多样的，一般表示一个函数主要采用解析法、表格法和图示法. 这几种方法在中学都比较熟悉了. 以上的例 1 和例 2 采用的就是解析法，例 3 采用的是表格法. 在高等数学中还常常用到**分段函数**，即用几个式子分段来表示一个函数. 下面举几个分段函数的例子.

例 4 函数 $u_a(t)=\begin{cases}0, t<a;\\1, t>a;\end{cases}(a>0)$，这个函数的定义域为$(-\infty,a)\cup(a,+\infty)$，值域为$\{0,1\}$. 此函数在电子技术中经常遇到，称为单位阶跃函数. 这种用两个以上解析式表示的函数称为分段函数. 该函数的图形如图 1.1 所示.

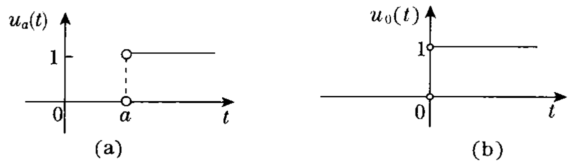

图 1.1

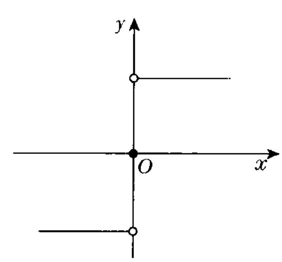

图 1.2

例 5 函数

$$y=\mathrm{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0,\\0, & x=0,\\1, & x>0,\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$-1,0,1$，它的图形如图 1.2 所示. 对于任何实数 x，关系式 $|x|=x\cdot\mathrm{sgn}x$ 恒成立.

例 6 设 x 为任一实数，不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分，记作$[x]$，则函数 $y=[x]$称为取整函数. 其图形如图 1.3 所示，在 x 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1. 它的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为所有整数. 这个函数的特点是，与 x 相对应的函数值 y

为不超过 x 的最大整数,例如,$\left[\frac{4}{9}\right]=0$,$[\pi]=3$,$[-4.2]=-5$.

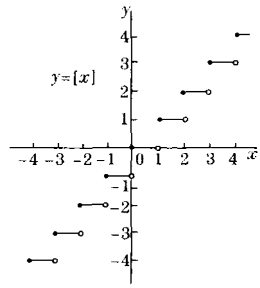

图 1.3

例 7　设分段函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\leqslant x<1,\\ x, & 1\leqslant x<2,\\ x^2-6x+9, & 2\leqslant x\leqslant 4\end{cases}$$

求 $f(0.5)$、$f(1)$、$f(3)$、$f(4)$的值.

解　由于 $x=0.5$、$x=1$、$x=3$、$x=4$ 分别属于不同的区间,因此可分别求出其相应的函数值如下:

$$f(0.5)=\frac{1}{2}x\big|_{x=0.5}=0.25$$

$$f(1)=x\,|\,x=1$$

$$f(3)=x^2-6x+9\big|_{x=3}=0$$

$$f(4)=x^2-6x+9\big|_{x=4}=1$$

第二节　函数的简单性质

1. 单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 D,区间 $I\subset D$. 如果对区间 I 上的任意两点 x_1 和 x_2,当 $x_1<x_2$ 时总有不等式 $f(x_1)<f(x_2)$成立,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调增加**的(见图 1.4);若当 $x_1<x_2$ 时总有不等式 $f(x_1)>f(x_2)$成立,则称函数 $f(x)$在区间 I 上是**单调减少**的(见图 1.5). 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**. 从图形上看,单调增加函数表现为曲线从左到右上升,单调减少函数表现为曲线从左到右下降.

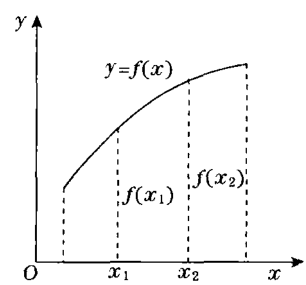

图 1.4

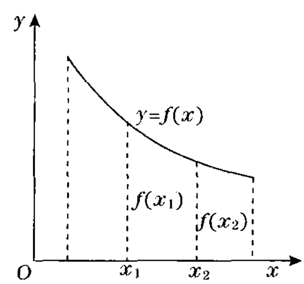

图 1.5

例如，函数 $f(x)=x^2$ 在区间$[0,+\infty)$上是单调增加的，在区间$(-\infty,0]$上是单调减少的；在区间$(-\infty,+\infty)$内函数 $f(x)=x^2$ 不是单调的(见图 1.6).

又如，函数 $y=x^3$ 的在区间$(-\infty,+\infty)$内是单调增加的(见图 1.7).

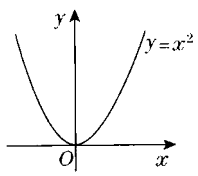

图 1.6

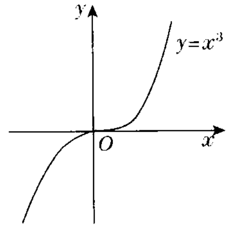

图 1.7

2. 奇偶性

设函数 $f(x)$的定义域 D 关于原点是对称的，且对于任何 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$成立，则称函数 $f(x)$为**偶函数**；如果恒有 $f(-x)=-f(x)$成立，则称函数 $f(x)$为**奇函数**.

从函数图形上看，偶函数的图形是关于 y 轴对称的，奇函数的图形是关于原点对称的(见图 1.8).

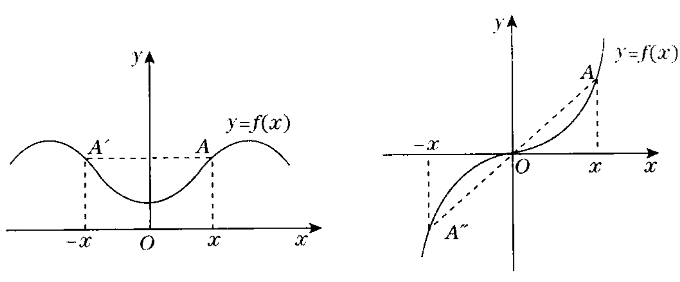

图 1.8

例如，对于函数 $y=x^3$，由于 $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$，所以它是奇函数；而对于函数 $y=x^4$，由于 $f(-x)=(-x)^4=x^4=f(x)$，所以它是偶函数. 一般，x 的奇次幂是奇函数，x 的偶次幂是偶函数.

除了奇函数和偶函数以外，还存在大量的非奇非偶函数. 可以证明，任一个在对称区间$(-a,a)$上有定义的函数一定能写成一个奇函数和一个偶函数之和. 实际上，令

$$f_1(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2},f_2(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

则容易验证，$f(x)=f_1(x)+f_2(x)$，并且 $f_1(x)$是偶函数，$f_2(x)$是奇函数.

读者还可自行证明：两个奇函数的积是偶函数，两个偶函数的积是偶函数，奇函数与偶函数的积是奇函数.

3. 周期性

设函数 $f(x)$的定义域为 D，如果存在非零数 l，使得对于任意的 $x\in D$，有 $x\pm l\in D$，且 $f(x+l)=f(x)$恒成立，则称函数 $f(x)$为周期函数，l 称为 $f(x)$的**周期**. 通常我们所说的周期指的是最小正周期.

例如，正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$ 都是周期函数，其最小正周期均为 2π.

正切函数 $y=\tan x$ 也是周期函数，其最小正周期为 π.

4. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，$I\subset D$，如果存在正数 M，使得对任意 $x\in I$，有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界．如果这样的正数 M 不存在，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上无界．函数无界是指对于无论多么大的正数 M，总存在 $x_1\in I$，使得 $|f(x_1)|>M$.

若存在正数 K_1，使得对任意 $x\in I$，有 $f(x)\leqslant K_1$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有**上界**，而正数 K_1 称为函数 $f(x)$ 的一个上界；如果存在正数 K_2 使得 $f(x)\geqslant K_2$，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有**下界**，而正数 K_2 称为函数 $f(x)$ 的一个下界．

关于函数有界性，有结论：函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界的充分必要条件是它在该区间上既有上界又有下界．读者可自行证明此结论．

第三节　反函数和复合函数

1. 反函数

在自由落体运动过程中，物体下落距离 h 可表示为时间 t 的函数：$h=\frac{1}{2}gt^2$，在其定义域内任意确定一个时刻 t，即可由该函数得到下落的距离 h．如果考虑此问题的逆问题，即已知下落距离 h，求时间 t．此时有 $t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$．在这里，原来的因变量和自变量进行了交换，这样将自变量和因变量交换所得到的新函数称为原来函数的反函数．

一般地，对于函数 $y=f(x)$，若变量 y 在函数的值域内任取一值 y_0 时，变量 x 在函数的定义域内有一值 x_0 与之对应，即 $f(x_0)=y_0$，则变量 x 是变量 y 的函数，把这个函数用 $x=\varphi(y)$ 表示，称为函数 $y=f(x)$ 的反函数．相对于反函数 $x=\varphi(y)$，原来的函数 $y=f(x)$ 称为直接函数．显然，如果 $x=\varphi(y)$ 是 $y=f(x)$ 的反函数，那么 $y=f(x)$ 也是 $x=\varphi(y)$ 的反函数．

习惯上，我们把自变量用 x 表示，因变量用 y 表示，可将 $x=\varphi(y)$，写成 $y=\varphi(x)$．由于函数的实质是自变量和因变量的对应关系，至于 x 和 y 仅仅是记号而已，$x=\varphi(y)$ 和 $y=\varphi(x)$ 中表示对应关系的符号 φ 并没有改变，它们实质上是同一个函数．

下面分析互为反函数的两个函数图形的关系．如图 1.9 所示．$y=f(x)$ 与 $x=\varphi(y)$ 在同一坐标系中的图形是同一曲线．若函数 $y=f(x)$ 的反函数为 $y=\varphi(x)$．则对函数 $y=f(x)$ 图形上的任一点 $P(a,b)$，有 $b=f(a)$，因而 $a=\varphi(b)$，即反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形上必有一点 $Q(b,a)$ 与 $P(a,b)$ 对应．而 P、Q 两点是关于直线 $y=x$ 对称的（即直线 $y=x$ 垂直平分线段 PQ）．同样可以说，反函数 $y=\varphi(x)$ 图形上的任意一点也必有函数 $y=f(x)$ 图形上的一点与之对应，并且这两点同样是关于直线 $y=x$ 对称的．因此，我们可以得到关于

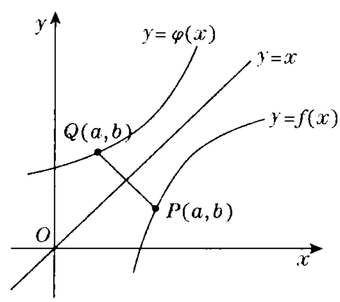

图 1.9

反函数图形的一条性质：在同一个坐标平面内，函数 $y=f(x)$ 的图形与其反函数 $y=\varphi(x)$ 的图形是关于直线 $y=x$ 对称的.

2. 复合函数

在实际问题中，经常会遇到一个函数和另一个函数发生联系. 例如，球的体积 V 是其半径的函数：$V=\frac{4}{3}\pi r^3$，由于热胀冷缩，随着温度的改变，球的半径也会发生变化，根据物理学知道，半径 r 随温度 T 变化的规律是 $r=r_0(1+\alpha T)$，其中，r_0、α 为常数，将这个关系代入球的体积公式，即得到体积 V 与温度 T 的函数关系

$$V=\frac{4}{3}\pi[r_0(1+\alpha T)]^3$$

这种将一个函数代入另一个函数而得到的函数称为上述两个函数的复合函数.

一般地，若 y 是 u 的函数 $y=f(u)$，其定义域为 $D(f)$，同时 u 又是 x 的函数 $u=\varphi(x)$，它的值域为 $R(\varphi)$，则当 $D(f)$ 和 $R(\varphi)$ 的交集非空时，可以确定一个函数 $y=f(u)=f[\varphi(x)]$，这个函数称为由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的**复合函数**.

在复合函数的定义中，为什么要求 $y=f(u)$ 的定义域和 $u=\varphi(x)$ 的值域的交集非空？请读者自行说明.

例如，设 $y=\cos u$，$u=x^2$，则由这两个函数复合而成的函数为 $y=\cos x^2$，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

又如，由三个函数 $y=\cos\mu$，$\mu=\nu^2$，$\nu=x+1$ 复合而成的函数是 $y=\cos(x+1)^2$，它的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

需要注意的是，有些函数是不能复合的，例如，函数 $y=\ln u$，$u=-x^2$ 就不能复合. 这是因为，函数 $y=\ln x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，而函数 $u=-x^2$ 的值域为 $(-\infty,0]$，二者的交集为空集，根据上面的说明，这两个函数无法复合.

第四节　初等函数

幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数称为基本初等函数. 基本初等函数在函数研究中起着基础的作用，因此，对这几种函数的定义、图形、主要性质要十分熟悉，我们在这里将它们的主要性质简单总结一下，以便今后做进一步讨论.

1. 幂函数

形如 $y=x^\mu$（μ 是常数）的函数称为**幂函数**.

幂函数的定义域与 μ 值有关. 当 μ 为正整数时，幂函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，当 μ 为负整数时，幂函数的定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$. 对于所有的实数 μ，幂函数 $y=x^\mu$ 具有公共的定义域 $(0,+\infty)$.

当 μ 为偶数时，幂函数 $y=x^\mu$ 是偶函数；当 μ 为奇数时，幂函数 $y=x^\mu$ 为奇函数. 当 $\mu>0$ 时，幂函数 $y=x^\mu$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调增加；当 $\mu<0$ 时，幂函数 $y=x^\mu$ 在 $(0,+\infty)$ 内单调减少.

当 μ 取不同值时，幂函数 $y=x^{\mu}$ 的图形如图 1.10、图 1.11 和图 1.12 所示.

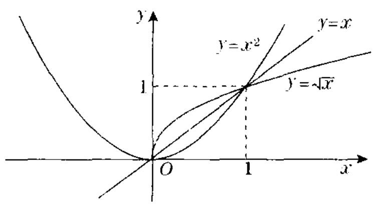

图 1.10

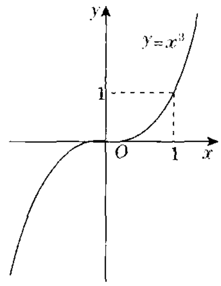

图 1.11

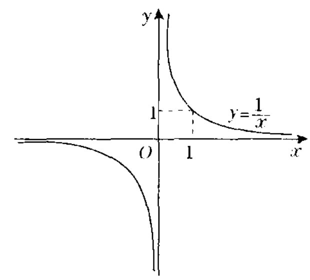

图 1.12

2. 指数函数

形如 $y=a^x$（a 是常数且 $a>0, a\neq 1$）的函数称为**指数函数**.

指数函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，由于对任意实数值 x，总有 $a^x>0$，且 $a^0=1$，因此指数函数的图形总在 x 轴上方，且通过点 $(0,1)$.

当 $a>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调增加，且 a 的值越大，函数增加的速度越快；当 $0<a<1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 单调减少，且 a 的值越小，函数减少的速度越快.

图 1.13 分别描绘了 $a>b>1$ 时，指数函数 $y=a^x$ 和 $y=b^x$ 及 $y=\left(\frac{1}{a}\right)^x$ $\left(0<\frac{1}{a}<1\right)$ 的图形.

在高等数学中，常常用到指数函数的如下性质：$a^{x_1+x_2}=a^{x_1}\cdot a^{x_2}$，$a^{x_1-x_2}=\frac{a^{x_1}}{a^{x_2}}$，$a^{x_1x_2}=(a^{x_1})^{x_2}$，$a^{-x}=\frac{1}{a^x}$. 特别地，$a^{x+c}=a^c\cdot a^x$，这表明指数函数具有一个基本特征，就是当自变量增加一个固定的量 c 时，函数值总是增加现有值的一个固定的倍数 $b=a^c$.

在今后的学习中，我们用得最多的指数函数是 $y=\mathrm{e}^x$，其中 e 为常数，其值为 $\mathrm{e}=2.7182818\cdots$，它的意义将在以后加以说明.

3. 对数函数

指数函数的反函数是**对数函数**，记为 $y=\log_a x$（a 是常数且 $a>0, a\neq 1$）.

对数函数的定义域为 $(0,+\infty)$，根据对数函数的定义域知，$y=\log_a x$ 的图形总在 y 轴的右方，且通过点 $(1,0)$. 因为对数函数 $y=\log_a x$ 与指数函数 $y=a^x$（$a>0, a\neq 1$）互为反函数，故它的图形与指数函数的图形关于直线 $y=x$ 对称.

当 $a>1$ 时，在区间 $(0,1)$ 内，y 的值为负，此时图形位于 x 轴下方，而在区间 $(1,+\infty)$，y 值为正，此时图形位于 x 轴上方. 在其定义域内，对数函数 $y=\log_a x$ 是单调增加的.

当 $0<a<1$ 时，在区间 $(0,1)$，y 的值为正，此时图形位于 x 轴上方，而在区间 $(1,+\infty)$，y 值为负，此时图形位于 x 轴下方. 在其定义域内，对数函数 $y=\log_a x$ 是单调减少的.

图 1.14 描绘了对数函数 $y=\log_a x$ 的图形.

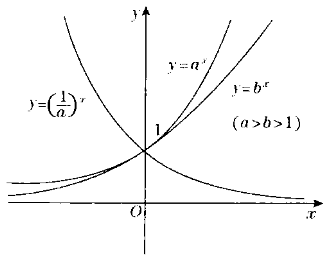

图 1.13

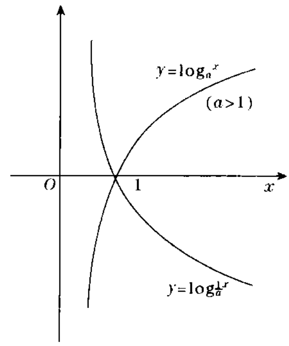

图 1.14

高等数学中常常用到对数函数的如下性质：若 $a^x=y$，则 $x=\log_a y$，$a^{\log_a x}=x$，$\log_a(x_1 x_2)=\log_a x_1+\log_a x_2$，$\log_a \dfrac{x_1}{x_2}=\log_a x_1-\log_a x_2$，$\log_a x^m=m\log_a x$，$x=\log_a a^x$，$\log_b x=\dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

以后会经常遇到以 e 为底的对数函数 $y=\log_e x$，称为**自然对数函数**，简记为 $y=\ln x$.

4. 三角函数

三角函数在数学和其他学科中有着广泛的应用. 自然界中有很多现象都可用三角函数来描述，如简谐振动、交流电等. 三角函数有正弦函数 $\sin x$、余弦函数 $\cos x$、正切函数 $\tan x$、余切函数 $\cot x$、正割函数 $\sec x$、余割函数 $\csc x$，它们都是周期函数.

高等数学中常常用到三角函数的如下性质：

$\sin^2 x+\cos^2 x=1$，$1+\tan^2 x=\sec^2 x$

$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y$，$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\pm\sin x\sin y$，

$\tan(x\pm y)=\dfrac{\tan x\pm\tan y}{1\pm\tan x\cdot\tan y}$，

$\sin 2x=2\sin x\cos x$，$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$，$\tan 2x=\dfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin x\cos y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)+\sin(x-y)]$ $\quad\cos x\sin y=\dfrac{1}{2}[\sin(x+y)-\sin(x-y)]$

$\cos x\cos y=\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)+\cos(x-y)]$ $\quad\sin x\sin y=-\dfrac{1}{2}[\cos(x+y)-\cos(x-y)]$

正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 的定义域均为 $(-\infty,+\infty)$，周期均为 2π，正弦函数是奇函数，余弦函数是偶函数，它们的图形见图 1.15 和图 1.16

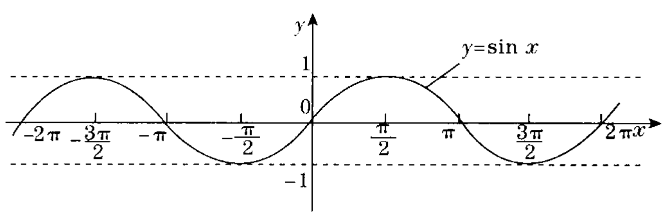

图 1.15

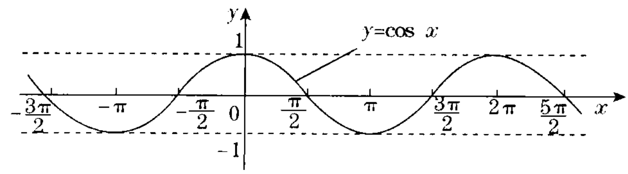

图 1.16

正切函数 $\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq(2n+1)\frac{\pi}{2}, n\in\mathbf{Z}\right\}$，周期为 π，是奇函数；余切函数 $\cot x$ 的定义域为 $\{x \mid x\in\mathbf{R}, x\neq n\pi, n\in\mathbf{Z}\}$ 周期为 π，是奇函数。它们的图形如图 1.17 和图 1.18.

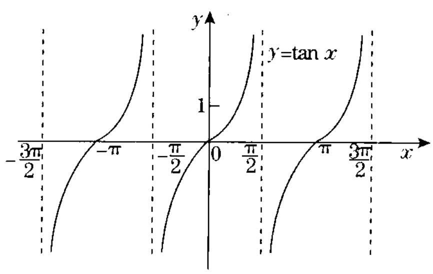

图 1.17

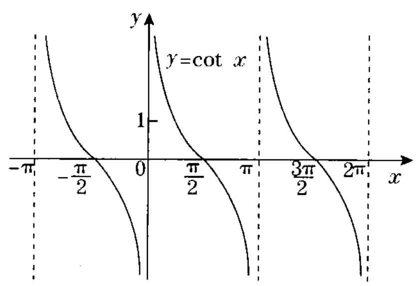

图 1.18

正割函数 $\sec x$ 是余弦函数 $\cos x$ 的倒数，余割函数 $\csc x$ 是正弦函数 $\sin x$ 的倒数，即 $\sec x=\frac{1}{\cos x}, \csc x=\frac{1}{\sin x}$. 它们都是以 2π 为周期的周期函数.

5. 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数. 三角函数 $\sin x$、$\cos x$、$\tan x$、$\cot x$ 的反函数依次为**反正弦函数** $y=\arcsin x$、**反余弦函数** $y=\arccos x$、**反正切函数** $y=\arctan x$、**反余切函数** $y=\operatorname{arccot} x$. 其图形分别如图 1.19、图 1.20、图 1.21 和图 1.22 所示.

为了避免多值性，对它们的值域进行限制，可使其成为单值函数.

对于 $y=\arcsin x$，把其值域限制在区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上，称为反正弦函数的**主值**，记为 $y=\arcsin x$，通常也把它称为反正弦函数. 它是定义在 $[-1,1]$ 上的单值函数，在 $[-1,1]$ 上是单调增加的，其取值范围是 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，其图形为图 1.19 中的实线部分. 将 $y=\arccos x$ 的值域限制在区间 $[0,\pi]$ 上，称为反余弦函数的主值，记为 $y=\arccos x$，也称为反余弦函数. 它是定

义在区间$[-1,1]$上的单值函数，在$[-1,1]$上是单调减少的. 其图形为图 1.20 中的实线部分.

类似地，反正切函数和反余切函数的主值分别简称为反正切函数和反余切函数，它们的简单性质如下：

反正切函数 $y=\arctan x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$，在$(-\infty,+\infty)$内单调增加，其图形为图 1.21 中的实线部分. 反余切函数 $y=\operatorname{arc\,cot} x$ 的定义域为$(-\infty,+\infty)$，值域为$(0,\pi)$，在$(-\infty,+\infty)$内单调减少，其图形为图 1.22 中的实线部分.

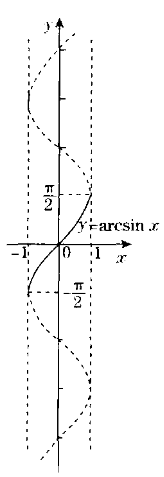

图 1.19

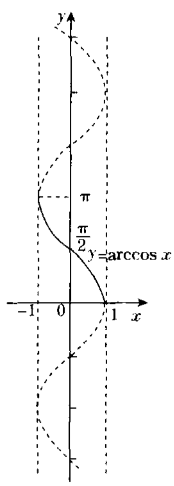

图 1.20

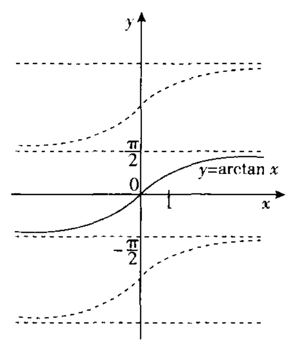

图 1.21

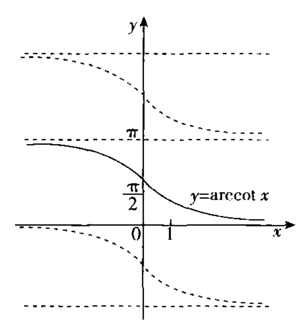

图 1.22

6. 初等函数

由上述五类基本初等函数和常数经过有限次的四则运算和函数复合步骤构成的函数，称为初等函数. 例如函数 $y=\ln \arctan \sqrt{1+x^2}$，$y=\sin^2 x$，$y=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$等都是初等函数.

常用的双曲正弦函数 $y=\operatorname{sh}x$、双曲余弦函数 $y=\operatorname{ch}x$、双曲正切函数 $y=\operatorname{th}x$ 也是初等函数：

$$\operatorname{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x}),\operatorname{ch}x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x}),\operatorname{th}x=\frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x},x\in(-\infty,+\infty)$$

它们具有类似于三角函数的一些性质：$\operatorname{ch}^2x-\operatorname{sh}^2x=1$，$\operatorname{sh}2x=2\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x$，$\operatorname{ch}2x=\operatorname{ch}^2x+\operatorname{sh}^2x$，$\operatorname{sh}(x\pm y)=\operatorname{sh}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{ch}x\operatorname{sh}y$，$\operatorname{ch}(x\pm y)=\operatorname{ch}x\operatorname{ch}y\pm\operatorname{sh}x\operatorname{sh}y$.

可以证明，双曲函数的反函数可分别表示为 $\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1})x\in(-\infty,+\infty)$，$\operatorname{arch} x=\ln(x+\sqrt{x^2-1})$，$x\in[1,+\infty]$，$\operatorname{arth} x=\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}x\in(-1,1)$.

7. 建立函数关系

在实际问题中，经常需要建立变量之间的函数关系，然后，应用有关的数学知识对这些问题进行分析解决. 因此，建立函数关系是解决实际问题的关键步骤. 下面举例说明如

何根据实际问题所给的条件建立所需的函数关系.

例 9　一块边长为 48cm 的正方形铁皮,在其四角分别剪去一块小正方形(如图 1.23 中的阴影部分),以制成一个无盖容器.求该容器的容积和被剪小正方形边长之间的函数关系.

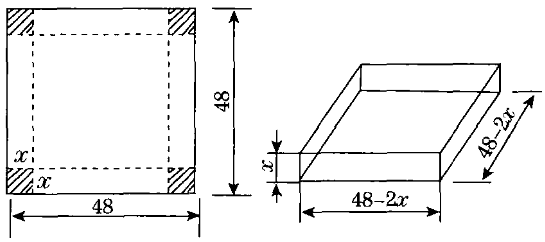

图 1.23

解　根据该问题的要求,设被剪小正方形的边长为 x,容器的容积为 V.则容器的高为 x,其底是边长为 $48-2x$ 的正方形,于是,容器的容积为

$$V(x)=x(48-2x)^2$$

根据该问题的具体情况,容器的高和底边边长都应为正,于是应有 $0<x<24$,此即函数 $V(x)$的定义域.

第五节　经济学中的常用函数

1. 单利与复利

今年的 100 元钱不等于明年的 100 元钱!如果你将今年的 100 元存入银行,年利率为 5.15%,那么到明年同一时期,银行将支付你 $100+100\times5.15\%=105.15$ 元(含税),多出来的 5.15 元称为**利息**,它是货币的拥有者让渡货币的使用权所获得的报酬,也叫**货币的时间价值**.

利息的计算方式有单利和复利之分.所谓**单利**是指在存期不止一个计息周期的情况下,从第二期开始,每期计算利息的本金均按初始本金计算,这种计息方式称为**按单利计息**;所谓**复利**是指在存期不止一个计息周期的情况下,从第二期开始,上一期所得的利息要滚入下一期连同上一期的本金一起作为当期计算利息的本金,即每期计算利息的本金均按上一期的**本利和**作为基数计算利息,这种计息方式称为**按复利计息**.一般地

设有初始本金为 P 元,存期为 n 年,银行的年利率为 r,

(1)按单利计算利息

第一年末本利和为　　$S_1=P+P\cdot r=P(1+r)$,

第二年末本利和为　　$S_2=P(1+r)+P\cdot r=P(1+2r)$,

……

第 n 年末本利和为　　$S_n=P(1+n\cdot r)$.

(2)按复利计算利息

第一年末本利和为　　$S_1=P+P\cdot r=P(1+r)$,

第二年末本利和为　　$S_2=P(1+r)+P(1+r)\cdot r=P(1+r)^2$,