

GAOZHONG WULI AOSAI JIANGYI

高中物理

(第二分册)

奥赛讲义

◆ 曹晓彬 主编



ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中物理奥赛讲义. 第二分册/曹晓彬主编. —杭州:
浙江大学出版社, 2008. 3

ISBN 978-7-308-05825-4

I. 高… II. 曹… III. 物理课—高中—教学参
考资料 IV. G634.73

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 021611 号

高中物理奥赛讲义(第二分册)

曹晓彬 主编

责任编辑 杨晓鸣 李建国(特邀)

封面设计 刘依群

出版发行 浙江大学出版社

(杭州天目山路 148 号 邮政编码 310028)

(E-mail: zupress@mail. hz. zj. cn)

(网址: <http://www.zjupress.com>

<http://www.press.zju.edu.cn>)

电话: 0571-88925592, 88273066(传真)

排 版 杭州大漠照排印刷有限公司

印 刷 杭州长命印刷有限公司

开 本 787mm×1092mm 1/16

印 张 15.5

字 数 370 千

版 印 次 2008 年 3 月第 1 版 2008 年 5 月第 2 次印刷

印 数 8001—14000

书 号 ISBN 978-7-308-05825-4

定 价 23.00 元

版权所有 翻印必究 印装差错 负责调换

浙江大学出版社发行部邮购电话(0571)88072522

编写说明

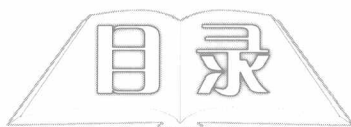
高中物理奥林匹克竞赛已经开展了 20 多年,中国代表队在国际比赛中连年获得了骄人的成绩,极大鼓舞了广大参与物理竞赛的学生的学习兴趣和。当然,要在国际竞赛中取得优异成绩,不仅需要教师有效指导、学生刻苦钻研,还需要一套好的辅导资料。我们本着为中生物理竞赛做一点有益事情的宗旨,特邀请江苏、浙江、上海等地的国家物理奥林匹克竞赛的高级和一级教练,共同编写了一套“高中物理奥赛讲义”丛书,包括力学、光学、电学和原子物理学等内容,共三个分册。

丛书以例题讲解为主,精选了历年来世界各地优秀的竞赛试题。选取的原则是典型性,即试题要有代表性,能举一反三;指导性,即解决问题的方法对学生具有指导价值,能以不变应万变;新颖性,即选取的试题的物理背景或表现形式鲜活,给学生耳目一新的感觉;普适性,即内容要适合不同层次的学生,对参与不同层次的竞赛活动都有指导作用。其次,在选取试题时充分考虑覆盖面,力求做到面面俱到,为学生训练提供丰富的素材。再次,在试题编排上,按照从易到难、循序渐进的原则来安排内容,使学生容易接受,并在学习的过程逐步提高解决和分析问题的能力。

限于我们的水平,书中一定有不少缺陷,请读者提出宝贵的意见,以便今后修订、再版时改正。

编者

2008 年江苏木槎



第一章 静电场	1
第二章 稳恒电流	91
第三章 磁场	133
第四章 电磁感应	169
第五章 交流电与电磁波	223



第一章 静电场

1. 如图 1-1 所示, 半径为 R 的大球 O 被内切地挖去半径为 $\frac{R}{2}$ 的小球 O' , 余下部分均匀地带有电荷量 Q . 今在两球心连线 OO' 的延长线上, 距大球心 O 的距离为 r ($r > R$) 处放置一个点电荷 q , 试求 q 所受的库仑力.

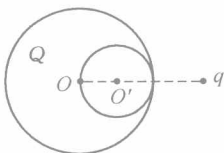


图 1-1

解 如果 q 是正电荷, 它所受的库仑力等效于以下两个力的合力, 其一是半径为 R 、单位体积带电 $+\rho$ 的均匀导体球对它的斥力, 其二是半径为 $\frac{1}{2}R$ 、单位体积带电 $-\rho$ 的均匀导体球对它的引力. 而每个导体球的电荷又与等量电荷集中在球心所得点电荷的结果一样, 故

$$F = k \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 q}{r^2} - k \frac{\rho \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 q}{\left(r - \frac{R}{2}\right)^2},$$

其中

$$Q = \rho \left[\frac{4}{3}\pi R^3 - \frac{4}{3}\pi \left(\frac{R}{2}\right)^3 \right],$$

代入后得

$$F = k \cdot \frac{Qq}{7r^2} \left[8 - \frac{4r^2}{(2r - R)^2} \right].$$

2. 有一块很大的接地导体, 具有两个互相垂直的表面, 在此两表面外较近处有一个点电荷 q , 坐标为 (x_0, y_0) , 如图 1-2 所示, 求 q 受到的感应电荷的库仑力.

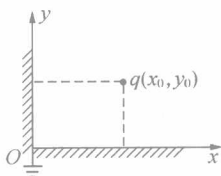


图 1-2

解 若仅使 y 轴上各点电势为零, 可设想在 $(-x_0, y_0)$ 处有一个 $(-q)$ 电荷. 同理, 若仅使 x 轴上各点电势为零, 可设想在 $(x_0, -y_0)$ 处有一个 $(-q)$ 电荷. 现要使 x 轴、 y 轴上各点电势为零, 还需在 $(-x_0, -y_0)$ 处引入一个 $(+q)$ 电荷. 这样等效代替后可得 q 受到的感应电荷的库仑力, 考虑 x 、 y 轴两方向有

$$F_x = -k \frac{q^2}{(2x_0)^2} + k \frac{q^2}{\sqrt{(4x_0^2 + 4y_0^2)^2}} \cos \alpha,$$

其中

$$\cos \alpha = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}}.$$

代入得

$$F_x = -\frac{kq^2}{4} \left[\frac{1}{x_0^2} - \frac{x_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}} \right],$$

同理

$$F_y = -\frac{kq^2}{4} \left[\frac{1}{y_0^2} - \frac{y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^{3/2}} \right].$$

负号表示库仑力与 x 、 y 轴方向相反, 即为引力.

3. 如图 1-3 所示, 在半径 r 为 0.1m 的原来不带电的金属球壳内放两个点电荷, 电量分别为 $q_1 = -3 \times 10^{-9}\text{C}$ 和 $q_2 = 9 \times 10^{-9}\text{C}$, 它们与金属球壳内壁不接触. 在距球壳中心 O 点 100m 处, 放一个点电荷 q_3 , 它的电量是 $6 \times 10^{-14}\text{C}$, 求 q_3 所受的静电力.

解 静电平衡后, 金属球壳内、外表面带的电量分别为 $-(q_1 + q_2)$, $q_1 +$

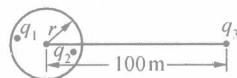


图 1-3

q_2 , 而且两个点电荷 q_1 、 q_2 以及金属球壳内表面所带的电对 q_3 总的作用力为零. 又由于金



属球的球心到 q_3 的距离远远大于金属球的半径,故可以将金属球外表面所带的电荷近似看作点电荷,这样 q_3 所受的静电力为

$$\begin{aligned} F &= k \cdot \frac{(q_1 + q_2)q_3}{l^2} \\ &= 9.0 \times 10^9 \times \frac{(-3 \times 10^{-9} + 9 \times 10^{-9}) \times 6 \times 10^{-14}}{100^2} \text{ N} \\ &= 3.24 \times 10^{-16} \text{ N}. \end{aligned}$$

4. 不带电的金属大球内有两个小球形空腔,其中心分别有点电荷 q_1 以及 q_2 ,大球外 q_1 、球心 O 、 q_2 连线上另有一点电荷 q_3 ,位置如图 1-4 所示.求静

电平衡后大球对 q_1 的作用力(设所有的电量均为正).

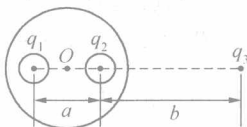


图 1-4

解 由静电平衡及静电屏蔽的性质可知:左腔内表面有均匀分布的 $-q_1$;右腔内表面有均匀分布的 $-q_2$,大球外表面有 $q_1 + q_2$,但不均匀分布.

大球对 q_1 点电荷的作用有三:

(1) 均匀分布的 $-q_1$ 对 q_1 的作用 $F_1 = 0$;

(2) 均匀分布的 $-q_2$ 对 q_1 的作用 $F_2 = k \frac{q_1 q_2}{a^2}$, 方向向右;

(3) 大球外表面 $q_1 + q_2$ 对点电荷 q_1 的作用 F_3 ,由于大球外表面分布的 $q_1 + q_2$ 与大球外表面以内产生的电场相抵消,所以 $F_3 = k \frac{q_3 q_1}{(b+a)^2}$, 方向向右.

大球对点电荷的作用力 $F = F_1 + F_2 + F_3 = k q_1 \left[\frac{q_2}{a^2} + \frac{q_3}{(b+a)^2} \right]$.

5. 如图 1-5 所示,在惯性系的自由空间中有三个带电质点 P_1 、 P 、 P_2 , P 点恰好不动, P_1 、 P_2 围绕 P 作圆周运动,在运动中三点始终共线.已知 P_1 、 P_2 分别与 P 相距 l_1 和 l_2 ,试求



图 1-5

P_1 、 P_2 的荷质比 ν_1 和 ν_2 的比值(荷质比规定为粒子的电荷量 q 和质量 m 之比,即 $\nu = \frac{q}{m}$).

解 由图 1-5,易知质点 P_1 和 P_2 所带电的电性必须相同,否则 P 不可能平衡; P 和 P_2 电性必须相反,否则 P_2 不可能平衡.

不妨假设 P 、 P_1 、 P_2 所带的电量分别为 $-Q$ 、 Q_1 、 Q_2 , P_1 、 P_2 绕 P 做圆周运动的角速度为 ω .

对 P 点有

$$k \cdot \frac{Q_1 Q}{l_1^2} = k \cdot \frac{Q_2 Q}{l_2^2}. \quad (1)$$

对 P_1 点有

$$k \cdot \frac{Q_1 Q}{l_1^2} - k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{(l_1 + l_2)^2} = m_1 l_1 \omega^2. \quad (2)$$

对 P_2 点有

$$k \cdot \frac{Q_2 Q}{l_2^2} - k \cdot \frac{Q_1 Q_2}{(l_1 + l_2)^2} = m_2 l_2 \omega^2. \quad (3)$$

由①式得

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^2.$$

由②、③式结合①式得

$$m_1 l_1 \omega^2 = m_2 l_2 \omega^2.$$

即

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{l_2}{l_1}.$$

故

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{Q_1}{m_1} \cdot \frac{m_2}{Q_2} = \left(\frac{l_1}{l_2} \right)^3.$$

6. 在惯性系 S 中有匀强电场 E ,其方向如图 1-6 所示.在电场中与 E 平行的一条几何直线上,有两个静止的小球 A 和 B .两小球的质量均为 m , A 球所带电量为 Q ($Q > 0$), B 球不带电,开始时两球相距为 l .在电场力的作用下, A 球开始沿直线运动,并与 B 球发生弹性正碰撞,从而使 B 球也参与运动.设在各次碰撞过程中, A 、 B 球之间并无电量的转移,设万有引力

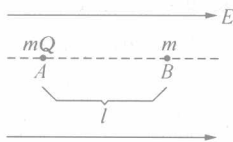


图 1-6



可略去不计, 试证明 A、B 球相邻的两次碰撞之间的时间间隔相同, 并求出该时间间隔 T .

解 A 球带电 $Q > 0$, 在电场力 QE (指向右方) 的作用下, 其加速度的方向指向右方, 即与 E 同向, 加速度大小为 $a = \frac{QE}{m}$.

在 S 系中, A 球从静止开始, 以 a 作匀加速直线运动, 经 t 时间, 走过 l 的路程, 速度达到 v , 与 B 球第一次碰撞 $t = \sqrt{\frac{2l}{a}} = \sqrt{\frac{2ml}{QE}}$, $v = at = \sqrt{\frac{2QE l}{m}}$.

此后 A、B 球交换速度, 即在 S 系中, A 球静止, B 球以 v 向右匀速运动.

变换到随 B 一起运动惯性系 S_1 , 则在 S_1 系中, 第一次碰撞后, B 球静止, A 球以 v 向左运动, 经 t 时间后, A 球速度减为零, 与 B 球相距 l , 然后 A 球从静止加速返回, 又经 t 时间, 速度增为 v (向右), 走过 l , 与 B 球第二次碰撞, 故第一次、第二次碰撞之间的时间间隔为

$$T = 2t = 2\sqrt{\frac{2ml}{QE}}.$$

第二次碰撞后, 再变换到随 B 球一起运动的惯性系 S_2 , 同样的讨论得出, 第二次和第三次碰撞之间的时间间隔也是上述 T . 如此重复, 可知 A、B 球任意两次相邻碰撞之间的时间间隔相同, 均为 T .

注 由此题, 可以体会参照系变换的威力以及如何变换才能使问题简化.

7. 平行板电容器的极板 A 固定, 极板 B 用弹簧连接在侧壁上, 两板间还连接有一带有电键的电源, 如图 1-7 所示. 如将开关 S 闭合, B 板将逐渐平行地向 A 靠拢, 并在新的平衡位置停下来, 这时两极板间距离较原来减少了 $a_1 = 10\%$, 如将开关闭合极短的时间就立即断开, 两板间的距离将减少多少? (设在开关闭合的极短时间内, 极板 B 来不及

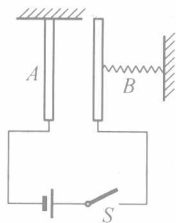


图 1-7

从原位置移动)

解 以 E 表示电源的电动势, k 表示弹簧的劲度系数. 设第一种情况下平衡时, 弹簧的伸长量为 x_1 , 两极板间的静电作用力为 F_1 , 电容器的电容为 C_1 , 带电量为 Q_1 , 则由胡克定律有

$$F_1 = kx_1.$$

又由以上分析所得的结果应有

$$F_1 \propto Q_1^2,$$

即

$$F_1 \propto C_1^2 E^2.$$

同理对于第二种情况下平衡时, 电容器的带电量 Q_2 应等于闭合电键 S 时的带电量, 且以 C 表示刚闭合 S 时电容器的电容, 则有

$$F_2 = kx_2,$$

及

$$F_2 \propto Q_2^2,$$

即

$$F_2 \propto C^2 E^2.$$

联立以上各式可得

$$\begin{aligned} \frac{x_1}{x_2} &= \left(\frac{C_1}{C}\right)^2 = \left[\frac{\frac{ES}{4\pi kd(1-a_1)}}{\frac{ES}{4\pi kd}}\right]^2 \\ &= \frac{1}{(1-a_1)^2}, \\ x_2 &= (1-a_1)^2 x_1 \\ &= (1-a_1)^2 a_1 d \\ &= 0.081d. \end{aligned}$$

即第二种情况下, 两极板间的距离将较原距离减少 $a_2 = 8.1\%$.

8. 如图 1-8 所示, 在 xy 平面内, 沿 y 轴正方向有一匀强电场 E , 在 $(0, d)$, $(0, 0)$ 两点分别有一个质子和一个电子, 它们分别以速度 v_1 、 v_2 同时开始运动. v_1 和 v_2 与 x 轴的夹角分别为 -45° 和 45° , 忽略质子、电子所受重力及它们间的相互作用力.

(1) 证明质子、电子运动的轨迹为抛物线.

(2) 如果要求质子、电子运动的轨迹

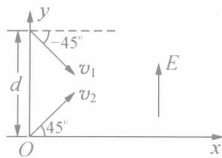


图 1-8



在顶点相切,则 v_1 、 v_2 之值应为多少?

(3) 比较它们到达切点的时间的先后.

解 (1) 质子、电子都在类重力场中作斜抛运动,它们的轨迹必然为抛物线.

(2) 由题意可得

$$v_1 \cos 45^\circ \cdot \frac{v_1 \sin 45^\circ}{qE/m_H} = v_2 \cos 45^\circ \cdot \frac{v_2 \sin 45^\circ}{qE/m_e}$$

$$\text{即得} \quad \frac{v_1^2}{v_2^2} = \frac{m_e}{m_H}.$$

而

$$d = \frac{1}{2} \frac{(v_1 \sin 45^\circ)^2}{qE/m_H} + \frac{m_e (v_2 \sin 45^\circ)^2}{2qE},$$

$$\text{即} \quad m_H v_1^2 + m_e v_2^2 = 4qEd,$$

由此得

$$v_1 = \sqrt{\frac{2eEd}{m_H}}, \quad v_2 = \sqrt{\frac{2eEd}{m_e}}.$$

(3) 因为 $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{\frac{m_e}{m_H}}$, 故 $v_1 < v_2$, 表明电子先到切点.

9. 将一质量为 m 、带电荷量为 q 的小球从 O 点以与水平方向成 α 角的初速度 v_0 抛出,当小球达到最高点 A 时,恰进入一匀强电场中,如图 1-9 所示.经过一段时间后,小球从 A 点运动到与 A 点相距为 s 的 A' 点后又回到 A 点,且沿原斜上抛轨道落回原抛出点,求:

(1) 该匀强电场 E 的大小和方向(即求出 θ 角并在图中标出 E 的方向).

(2) 从 O 点抛出到落回 O 点所需的时间.

解 小球进入电场后,其所受电场力和重力的合力为水平方向(如图 1-9),故在由 $A \rightarrow A' \rightarrow A$ 的过程中,电场力、重力所做的功为零,故小球的水平速度

$$v' = -v_0 \cos \alpha.$$

(1) $A \rightarrow A'$

$$v^2 = 2as, \quad a = \frac{v_0^2 \cos^2 \alpha}{2s}.$$

场强大小

$$E = \frac{\sqrt{F^2 + m^2 g^2}}{q} = m \frac{\sqrt{v_0^2 \cos^2 \alpha + 4g^2 s^2}}{2qs},$$

场强方向

$$\tan \theta = \frac{mg}{F} = \frac{2gs}{v_0^2 \cos^2 \alpha}.$$

(2) $O \rightarrow O$ 的时间

$$t = t_1 + t_2 + t_3 + t_4,$$

因

$$t_1 = t_4 = v_0 \sin \alpha / g,$$

$$t_2 = t_3 = \frac{v_0 \cos \alpha}{a} = \frac{2s}{v_0 \cos \alpha},$$

故

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} + \frac{4s}{v_0 \cos \alpha}.$$

10. 如图 1-10 所示,质量为 m 、电量为 q ($q > 0$) 的一簇带电粒子,从 P_1 点以相同速率 v_0 在 xy 平面向右上方各方向射出,即 φ 角在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 范围内.试在 xy 平面内设计一个电场区域,使这些带电粒子能全部会聚于 P_2 点. P_1 和 P_2 在 x 轴的两侧,与原点 O 的距离均为 R ,设带电粒子间的相互作用以及引力可忽略.

解 不计重力场,外加电场方向竖直向下.为使粒子会聚在 P_2 点,匀强电场应有适当边界,在界外粒子作匀速直线运动,在界内粒子作类斜抛运动.左右对称,只要确定右边界即可.

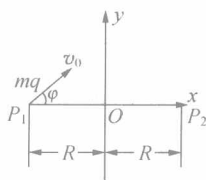


图 1-10

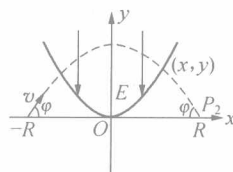


图 1-11

设计的匀强电场如图 1-11 所示,在场区边界任取一点 (x, y) , 则

$$x = v_0 (\cos \varphi) t, \quad v_0 \sin \varphi = \frac{qE}{m} \cdot t.$$



$$\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (R-x)^2}},$$

$$\cos\varphi = \frac{R-x}{\sqrt{y^2 + (R-x)^2}}.$$

由以上式子,得右边界为 $v_0^2 y(R-x) = \frac{qE}{m} x[y^2 + (R-x)^2]$, $x \geq 0$.

左边界为 $v_0^2 y(R+x) = -\frac{qE}{m} \cdot x[y^2 + (R+x)^2]$, $x \leq 0$.

11. 如图 1-12 所示, z 轴竖直向上, xy 平面是一绝缘的、固定的刚性平面. 在 $A(x_0, 0, 0)$ 处放一个带电量为 $-q$ ($q > 0$) 的小物块, 该物块与一根细线相连, 细线的另一端 B 穿过位于坐标原点 O 的光滑小孔, 可通过它牵引小物块. 现对该系统加一个匀强电场, 场强方向垂直于 x 轴, 与 z 轴的夹角为 θ (如图 1-12 所示). 设小物块和绝缘平面间的摩擦系数 $\mu = \tan\theta$, 且静摩擦系数和滑动摩擦系数相同, 不计重力作用. 现通过细线来牵引小物块, 使之移动. 在牵引过程中, 我们约定: 细线的 B 端只准沿 z 轴向下缓慢移动, 不得沿 z 轴向上移动; 小物块的移动非常缓慢, 在任何时刻, 都可近似地认为小物块处在力平衡状态. 若已知小物块的移动轨迹是一条二次曲线, 试求出此轨迹方程.

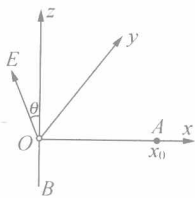


图 1-12

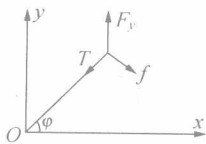


图 1-13

解 设所加匀强电场的场强为 E , 在 y 、 z 方向分量分别是 $E_y = -E\sin\theta$, $E_z = E\cos\theta$, $F_y = qE\sin\theta$ 在 xy 平面内, 方向沿 y 轴正方向, F_z 垂直于 xy 平面, 被绝缘平面的支持力 N 平衡, $N = qE\cos\theta$, 摩擦力 $f = qE\sin\theta = F_y$, f 的方向决定于物体移动的方向.

在 xOy 平面内, 物块受三个力 F_y 、 f 和线

的拉力 T , 任一位置平衡时, 线与 x 轴的夹角为 φ .

$$T_x = -T\cos\varphi, T_y = -T\sin\varphi$$

$$F_y - T\sin\varphi + f_y = 0$$

$$-T\cos\varphi + f_x = 0$$

$$\text{整理得 } T = 2F_y\sin\varphi, f_y = -F_y\cos 2\varphi,$$

$$f_x = F_y\sin 2\varphi. \text{ 摩擦力方向的斜率 } k = \frac{f_y}{f_x} = -\cot 2\varphi.$$

k 是摩擦力方向与 x 轴夹角的正切, 即摩擦力始终沿轨道的切线方向. 当 $\varphi = 0$, $k \rightarrow \infty$, 即在 A 点, 轨道的切线垂直于 x 轴. 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $k \rightarrow 0$, 表示轨道在 O 点的切线与 x 轴垂直. 在二次曲线中, 曲线上两点切线相互平行的只有椭圆或圆. 又因为 A 、 O 两点的切线与它们的连线相垂直, 这连线应为曲线的轴线, 且在 Ox 轴上, 另一轴在它的垂直平分线上且与 y 轴平行. 曲线与此轴线的交点的切线斜率是零, 有 $\varphi = \frac{\pi}{4}$, 其圆方程是

$$\left(x - \frac{x_0}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{x_0^2}{4}.$$

12. 在图 1-14 中, 一质量是 0.10kg 、电量为 $8 \times 10^{-4}\text{C}$ 带正电小球, 从水平地面上 A 点以与 x 轴正方向成 30° 角的初速度 v_0 抛出. 当达到最高点 B , 在全空间立刻产生一匀强电场 $E = 2.50 \times 10^3\text{N/C}$, 方向平行于 xOy 平面, 并与 x 轴负方向成 θ 夹角. 当带电小球再次过 Oy 轴时, 匀强电场立即消失. 试分析讨论当 θ 角变化时 ($0 \leq \theta \leq 180^\circ$), 带电小球自 B 点以后的运动情况, 并画出带电小球在各种情况下的运动轨迹简图, $g = 10\text{m/s}^2$.

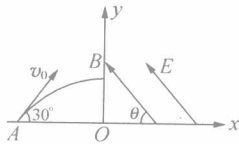


图 1-14

解 电场力在 x 方向和 y 方向的分量大小与 θ 角有关, 分 6 种情况讨论:

(1) 当 $qE\sin\theta = mg$ 时, $\theta = 30^\circ$, x 负方向电场力分量为 $qE\cos\theta$, 沿 x 正向初速度为



$v_0 \cos \alpha$, 轨迹如图 1-15 所示.

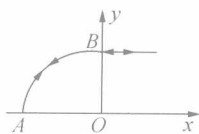


图 1-15

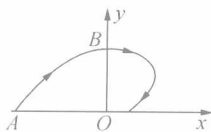


图 1-16

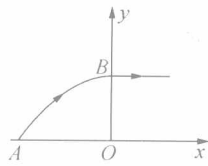


图 1-21

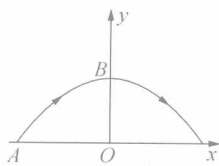


图 1-22

(2) 当 $qE \sin \theta < mg$ 时, 即 $0 \leq \theta < 30^\circ$, $F_x = -qE \cos \theta$, $F_y = mg - qE \sin \theta$, 小球在 B 点 x 方向速度为 $v_0 \cos \alpha$, 又有 3 种情况. 当 $\theta = \theta_0$ 时, 情形如图 1-17 所示. 由 x 、 y 方向分运动时间相等得

$$2 \cdot \frac{v_0 \cos \alpha}{\frac{qE \cos \theta_0}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{2v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}}{\frac{mg - qE \sin \theta_0}{m}}}.$$

代入数据得 $\theta_0 = 20^\circ 45'$.

当 $0 \leq \theta < \theta_0$, 为图 1-16; 当 $\theta_0 < \theta < 30^\circ$, 为图 1-18.

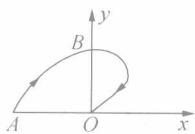


图 1-17

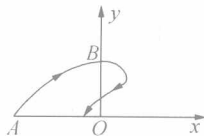


图 1-18

(3) 当 $qE \sin \theta > mg$, $30^\circ < \theta < 90^\circ$ 时, 轨迹如图 1-19 所示.

(4) 当 $qE \sin \theta > mg$, $90^\circ \leq \theta < 150^\circ$ 时, 轨迹如图 1-20 所示.

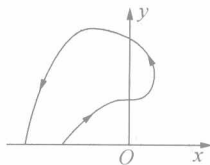


图 1-19

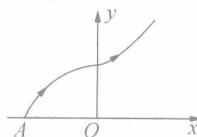


图 1-20

(5) 当 $qE \sin \theta = mg$, $\theta = 150^\circ$ 时, 轨迹如图 1-21 所示.

(6) 当 $qE \sin \theta < mg$, $150^\circ < \theta \leq 180^\circ$ 时, 轨迹如图 1-22 所示.

无论在何种情况下, 带电小球受到的都是恒力. 因此, 都是抛物线型的运动, 特例是直线运动, 只要分析清楚对应于不同的 θ 范围内合力的情况, 就可判断轨迹的图形.

13. 质量为 m 、带正电荷 q 的小粒子从很远处沿垂直于极板方向飞向电容器, 通过板中央的小孔, 穿过电容器, 离电容器很远处粒子速度为 v (见图 1-23), 试求:

(1) 粒子进入电容器内 A 点时的速度.

(2) 粒子即将从电容器 B 点飞出去的速度.

已知电容器充电到电势差为 U , 两板距离比板的尺寸小得多, 而电容器电荷量比 q 大得多.

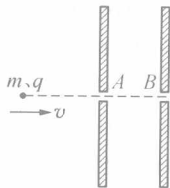


图 1-23

解 平行板电容器中心面电势为零, 又电容器两平板电势差为 U , 则易推得 A、B 点的电势分别为

$$U_A = -\frac{U}{2},$$

$$U_B = +\frac{U}{2}.$$

列能量守恒方程:

$$A \text{ 点: } \frac{1}{2}mv_A^2 + \left(-\frac{U}{2}\right) \cdot q = \frac{1}{2}mv^2;$$

$$B \text{ 点: } \frac{1}{2}mv_B^2 + \left(\frac{U}{2}\right) \cdot q = \frac{1}{2}mv^2.$$

其中 v_A 、 v_B 分别为粒子在 A、B 点的速率.

解得

$$v_A = \sqrt{v^2 + \frac{qU}{m}},$$

$$v_B = \sqrt{v^2 - \frac{qU}{m}}.$$



显然,如果 $v^2 < \frac{qU}{m}$, 那么一般说来粒子不能穿过电容器。

14. 两块竖直放置的平行金属大平板 A、B 相距 d , 两板间的电压为 U . 一带正电的质点从两板间的 M 点开始以初速度 v_0 运动, 当它到达电场中某点 N 时, 速度变为水平方向, 大小仍然为 v_0 , 如图 1-24 所示. 求 M、N 两点间的电势差。

解 带电质点在竖直方向作匀减速运动, 加速度的大小为 g ; 在水平方向因受电场力作用而作匀加速直线运动, 设加速度为 a , 若质点从 M 到 N 经历的时间为 t , 由运动学公

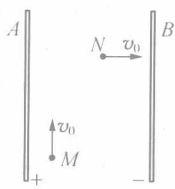


图 1-24

式有: ① 竖直方向: $v_y = v_0 - gt = 0$, 得 $t = \frac{v_0}{g}$; ② 水平方向: $v_x = v_0 = at$, 结合 t 表达式有 $a = g$. M、N 两点间的水平距离 $x = \frac{1}{2}at^2 = \frac{v_0^2}{2g}$. 于是 M、N 两点间的电势差 $U_{MN} = \frac{U}{d}x = \frac{Uv_0^2}{2dg}$.

15. 如图 1-25 所示, 两个竖直放置的同轴导体薄圆筒, 内筒半径为 R , 两筒间距为 d , 筒高为 L ($L \gg R \gg d$), 内筒通过一个未知电容 C_x 的电容器与电动势 U 足够大的直流电源的正极相连, 外筒与该电源的负极相连. 在两筒之间有相距为 h 的 A、B 两点, 其连线 AB 与竖直的筒中央轴平行. 在 A 点有一质量为 m 、电量为 $-Q$ ($Q > 0$) 的带电粒子, 它以 v_0 的初速率运动, 其运动方向垂直于由 A 点和筒中央轴构成的平面. 为了使带电粒子能够经过 B 点, 试求所有可供选择的 v_0 和 C_x 值。

解 (1) 带电粒子在重力作用下, 在竖直方向作自由落体运动, 到 B 点所需的时间为 $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$, 电

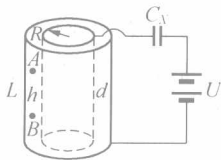


图 1-25

场力在水平面内, 沿径向指向中央轴, 它提供带电粒子作速率为 v_0 的匀速圆周运动的向心力, 周期为 $T = \frac{2\pi R}{v_0}$, 为了使带电粒子经过 B 点, 要求 $t = nT$.

$$\text{由以上三式, 得 } v_0 = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi R}{t/n} = n\pi R \sqrt{\frac{2g}{h}}, \text{ 其中 } n = 1, 2, \dots \quad (1)$$

(2) 因 $R \gg d$, 近似认为内外筒构成平板电容器, 其间是大小相同的径向电场, 故 $E = \frac{U_R}{d}$, 电场力提供向心力, 有 $EQ = m \frac{v_0^2}{R}$, 由以上两式, 得 $U_R = \frac{mv_0^2 d}{QR}$, v_0 由 (1) 式给出。

因 C_R (内、外筒电容器的电容) 与 C_x 串联, 由电量相等及两电容器电压关系有 $C_R U_R = C_x U_x$, $U_R + U_x = U$, 解出 $C_x = \frac{C_R U_R}{U - U_R}$.

将 $C_R = \frac{RL}{2kd}$ 代入得

$$C_x = \frac{n^2 \pi^2 R^2 L m g}{k(hQU - 2n^2 \pi^2 R d m g)}, n = 1, 2, \dots$$

16. 在距离为 $2l$ 的两个平行带电金属板正中央, 有带电导体网 OO' , 电压 $U_{BO} = 2U_{OA}$. 现从 A 板的 M 点飞出一个带正电粒子, 其抛射角为 α , 如图 1-26 所示. 已知轨迹最高点距离 B 板 $\frac{1}{2}l$ 处, 求粒子返回 A 板的落地点到 M 点的水平距离 x .

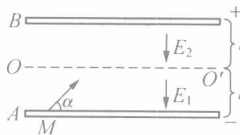


图 1-26

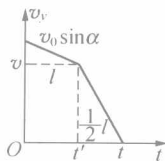


图 1-27

解 在横向(竖直)分运动中, 到轨迹最高点为止, 速度—时间图像如图 1-27 所示, t' 时刻粒子到达导体网, t 时刻粒子到达最高点, 运动是匀减速的, 图线斜率第一段是 qE_1/m , 第二段是 qE_2/m , 后者恰是前者的两倍, 面积代



表竖直向上的位移,前者恰是后者的两倍. t 时刻竖直分速度为零.

$$\text{因为 } (v_0 \sin \alpha)^2 - v^2 = 2 \frac{qE_1}{m} l,$$

$$\text{所以 } v = \sqrt{(v_0 \sin \alpha)^2 - 2 \frac{qE_1}{m} l}.$$

$$\text{又因为 } v = v_0 \sin \alpha - \frac{qE_1}{m} l,$$

$$\text{故 } t' = \frac{m}{qE_1} (v_0 \sin \alpha - v).$$

$$\text{又 } \frac{1}{2} v(t - t') = \frac{1}{2} l,$$

$$\text{则 } t = t' + \frac{l}{v} = \frac{m}{qE_1} (v_0 \sin \alpha - v) + \frac{l}{v}.$$

本题中的 q 、 m 、 v_0 、 E_1 、 E_2 其实都是隐含条件,我们在推理计算过程中引入的,是未知的不变量,真正的已知量只有 l 和 α . 为了在运算中能消去全部隐含条件,我们借助动能定理,最高点动能为末动能.

由

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m (v_0 \cos \alpha)^2 \\ &= qE_1 l + qE_2 \frac{l}{2} \\ &= 2qE_1 l, \end{aligned}$$

$$\text{解出 } \frac{m v_0^2}{qE_1} = \frac{4l}{\sin^2 \alpha}.$$

则

$$\begin{aligned} x &= v_0 \cos \alpha \cdot 2t \\ &= 2v_0 \cos \alpha \left[\frac{m}{qE_1} (v_0 \sin \alpha - v) + \frac{l}{v} \right] \\ &= 2v_0 \cos \alpha \left[\frac{m v_0 \sin \alpha}{qE_1} + \frac{\left(l - \frac{m v^2}{qE_1} \right)}{v} \right] \\ &= 2v_0 \cos \alpha \left[\frac{m v_0 \sin \alpha}{qE_1} + \frac{3l - \frac{m v_0^2 \sin^2 \alpha}{qE_1}}{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - \frac{2qE_1}{m} l}} \right] \\ &= 2 \cos \alpha \left[\frac{4l}{\sin \alpha} - \frac{l v_0}{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha - \frac{2qE_1}{m} l}} \right] \end{aligned}$$

$$= 2 \cos \alpha \left[\frac{4l}{\sin \alpha} - \frac{l}{\sqrt{\sin^2 \alpha - \frac{1}{2} \sin^2 \alpha}} \right]$$

$$= 2 \cos \alpha \left(\frac{4l}{\sin \alpha} - \frac{\sqrt{2} l}{\sin \alpha} \right)$$

$$= 2(4 - \sqrt{2}) l \cot \alpha.$$

17. 在如图 1-28 所示的装置中, U_1 是对带电粒子加速的电压, 紧靠其右侧的是两块彼此平行的水平金属板, 板长为 l , 两板间距离为 d . 一个带负电荷的质点经加速电压加速后沿两金属板中心线以速度 v_0 水平射入两板间. 若在两水平金属板间加一电压 U_2 , 当上板带正电荷时, 带电质点恰能沿两板中心线射出; 当下板带正电荷时, 带电质点射到下板上距板的左端 $\frac{1}{4} l$ 处, 为使带电质点经过 U_1 加速后

沿中心线射入两金属板间, 并能从两金属板间射出, 问两金属板间所加电压应满足

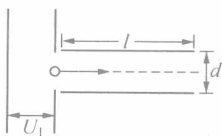


图 1-28

何条件?

解 以题述的板间电压为 U_2 且上板为正时粒子在极板间做直线运动作为第一种情况, 则第二种情况下粒子发生的偏转是由于在原电压 U_2 上再叠加一个电压 U' 所致. 由于这时电压大小仍为 U_2 , 而极性则变为了下板为正, 故所叠加电压 U' 应满足

$$\begin{aligned} -U_2 &= U_2 + U', \\ U' &= -2U_2. \end{aligned}$$

由电压 U' 造成的粒子的运动是向下偏转, 其偏转量应该满足

$$-\frac{d}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{U' q}{dm} \left(\frac{l/4}{v_0} \right)^2,$$

$$\text{即 } \frac{d}{2} = \frac{U_2 q l^2}{16 d m v_0^2}. \quad (1)$$

设在第一种情况下再在两板间叠加上电压 U'' 后粒子偏转刚好落在极板右端边缘, 则应有

$$\frac{d}{2} = \frac{U'' q}{2 d m} \left(\frac{l}{v_0} \right)^2. \quad (2)$$



比较①、②式有

$$U'' = \frac{1}{8}U_2.$$

可见, 当 $U'' = +\frac{1}{8}U_2$ 时, 即上下极板间电压为 $U_2 + \frac{1}{8}U_2 = \frac{9}{8}U_2$ 时, 粒子落在上板右端边缘; 当 $U'' = -\frac{1}{8}U_2$ 时, 即上下极板间电压为 $U_2 - \frac{1}{8}U_2 = \frac{7}{8}U_2$ 时, 粒子落在下板右端边缘. 为使粒子由两板间射出, 则两板间电压应为上板带正电, 其大小 U 满足

$$\frac{9}{8}U_2 > U > \frac{7}{8}U_2.$$

18. 测定电子荷质比(电荷 q 与质量 m 之比 q/m) 的实验装置如图 1-29 所示. 真空玻璃管内, 阴极 K 发出的电子, 经阳极 A 与阴极 K 之间的高电压加速后, 形成一束很细的电子流, 电子流以平行于平板电容器极板的速度进入两极板 C 、 D 间的区域. 若两极板 C 、 D 间无电压, 则离开极板区域的电子将打在荧光屏上的 O 点; 若在两极板间加上电压 U , 则离开极板区域的电子将打在荧光屏上的 P 点; 若再在极板间加一方向垂直于纸面向外、磁感应强度为 B 的匀强磁场, 则打到荧光屏上的电子产生的光点又回到 O 点. 现已知极板的长度 $l = 5.00\text{cm}$, C 、 D 间的距离 $d = 1.50\text{cm}$, 极板区的中点 M 到荧光屏中点 O 的距离为 $L = 12.50\text{cm}$, $U = 200\text{V}$, P 点到 O 点的距离 $y = \overline{OP} = 3.0\text{cm}$, $B = 6.3 \times 10^{-4}\text{T}$. 试求电子的荷质比.(不计重力影响)

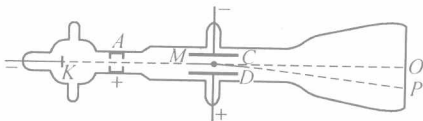


图 1-29

解 设电子刚进入平行板电容器极板间区域时的速度为 v_0 , 因为速度方向平行于电容器的极板, 通过长度为 l 的极板区域所需的

时间

$$t_1 = l/v_0. \quad (1)$$

当两极板之间加上电压时, 设两极板间的场强为 E , 作用于电子的静电力的大小为 qE , 方向垂直于极板由 C 指向 D , 电子的加速度

$$a = \frac{qE}{m}, \quad (2)$$

而

$$E = \frac{U}{d}. \quad (3)$$

因电子在垂直于极板方向的初速度为 0, 因而在时间 t_1 内垂直于极板方向的位移

$$y_1 = \frac{1}{2}at_1^2. \quad (4)$$

电子离开极板区域时, 沿垂直于极板方向的末速度

$$v_y = at_1. \quad (5)$$

设电子离开极板区域后, 电子到达荧光屏上 P 点所需时间为 t_2

$$t_2 = (L - l/2)/v_0. \quad (6)$$

在 t_2 时间内, 电子作匀速直线运动, 在垂直于极板方向的位移

$$y_2 = v_y t_2. \quad (7)$$

P 点离开 O 点的距离等于电子在垂直于极板方向的总位移

$$y = y_1 + y_2. \quad (8)$$

由以上各式得电子的荷质比为

$$\frac{q}{m} = \frac{v_0^2 d}{U l L} y. \quad (9)$$

加上磁场 B 后, 荧光屏上的光点重新回到 O 点, 表示在电子通过平行板电容器的过程中电子所受电场力与磁场力相等, 即

$$qE = qv_0 B, \quad (10)$$

注意到③式, 可得电子射入平行板电容器的速度

$$v_0 = \frac{U}{Bd}, \quad (11)$$



代入⑨式得

$$\frac{q}{m} = \frac{U}{B^2 l d} y, \quad (12)$$

代入有关数据求得

$$\frac{q}{m} = 1.6 \times 10^{11} \text{ C/kg}. \quad (13)$$

19. 图 1-30(a) 中 A 和 B 是真空中两块面积很大的平行金属板, 加上周期为 T 的交流电压, 在两板间产生交变的匀强电场. 已知 B 板的电势为零, A 板电势 U_A 随时间变化的规律如图(b)所示, 其中 U_A 的最大值为 U_0 , 最小值为 $-2U_0$. 在图(a)中, 虚线 MN 表示与 A 、 B 板平行等距的一个较小的面, 此面到 A 和 B 的距离皆为 l , 在此面所在处, 不断地产生电量为 q 、质量为 m 的带负电的微粒, 各个时刻产生带电微粒的机会均等. 这种微粒产生后, 从静止出发在电场力的作用下运动. 设微粒一旦碰到金属板, 它就附着在板上不再运动, 且其电量同时消失, 不影响 A 、 B 板的电压. 已知上述的 T 、 U_0 、 l 、 q 和 m 等各量的值正好满足等式

$$l^2 = \frac{3}{16} \cdot \frac{U_0 q}{2m} \left(\frac{T}{2} \right)^2.$$

若在交流电压变化的每个周期 T 内, 平均产生 320 个上述微粒, 试论证在 $t=0$ 到 $t=\frac{T}{2}$ 这段时间内产生的微粒中, 有多少微粒可到达 A 板(不计重力, 不考虑微粒之间的相互作用).

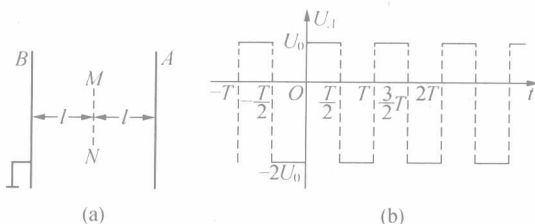


图 1-30

解 在电压为 U_0 时, 微粒所受电场力为 $\frac{U_0 q}{2l}$, 此时微粒的加速度为 $a_0 = \frac{U_0 q}{2lm}$. 将此式

代入题中所给的等式, 可将该等式变为

$$l = \frac{3}{16} a_0 \left(\frac{T}{2} \right)^2. \quad (1)$$

现在分析从 $0 \sim \frac{T}{2}$ 时间内, 何时产生的微粒在电场力的作用下能到达 A 板, 然后计算这些微粒的数目.

在 $t=0$ 时产生的微粒, 将以加速度 a_0 向 A 板运动, 经 $\frac{T}{2}$ 后, 移动的距离 x 与式①相比, 可知

$$x = \frac{1}{2} a_0 \left(\frac{T}{2} \right)^2 > l. \quad (2)$$

即 $t=0$ 时产生的微粒, 在不到 $\frac{T}{2}$ 时就可以到达 A 板. 在 $U_A = U_0$ 的情况下, 设刚能到达 A 板的微粒是产生在 $t=t_1$ 时刻, 则此微粒必然是先被电压 U_0 加速一段时间 Δt_1 , 然后再被电压 $-2U_0$ 减速一段时间, 到 A 板时刚好速度为零. 用 d_1 和 d_2 分别表示此两段时间内的位移, v_1 表示微粒在 Δt_1 内的末速, 也等于后一段时间的初速, 由匀变速运动公式应有

$$d_1 = \frac{1}{2} a_0 (\Delta t_1)^2, \quad (3)$$

$$0 = v_1^2 + 2(-2a_0)d_2. \quad (4)$$

又有

$$v_1 = a_0 \Delta t_1, \quad (5)$$

$$d_1 + d_2 = l, \quad (6)$$

$$t_1 + \Delta t_1 = \frac{T}{2}. \quad (7)$$

由式③到式⑦及式①, 可解得

$$t_1 = \frac{T}{4}. \quad (8)$$

这就是说, 在 $U_A = U_0$ 的情况下, 从 $t=0$ 到 $t=\frac{T}{4}$ 这段时间内产生的微粒都可到达 A 板(确切地说, 应当是 $t < \frac{T}{4}$).

为了讨论在 $\frac{T}{4} < t \leq \frac{T}{2}$ 这段时间内产生的微粒的运动情况, 先设想有一静止粒子在 A



板附近,在 $U_A = -2U_0$ 电场作用下,由 A 板向 B 板运动,若到达 B 板经历的时间为 τ ,则有

$$2l = \frac{1}{2}(2a_0)\tau^2.$$

根据式①可求得

$$\tau = \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{4} T.$$

由此可知,凡位于 MN 到 A 板这一区域中的静止微粒,如果它受 $U = -2U_0$ 的电场作用时间大于 τ ,则这些微粒都到达 B 板.

在 $t = \frac{T}{4}$ 发出的微粒,在 $U_A = U_0$ 的电场作用下,向 A 板加速运动,加速的时间为 $\frac{T}{4}$,接着在 $U_A = -2U_0$ 的电场作用下减速,由于减速时的加速度为加速时的两倍,故经过 $\frac{T}{8}$ 微粒速度减为零.由此可知微粒可继续在 $U_A = -2U_0$ 的电场作用下向 B 板运动的时间为

$$\tau_1 = \frac{1}{2}T - \frac{1}{8}T = \frac{3}{8}T = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{4}T.$$

由于 $\tau_1 > \tau$,故在 $t = \frac{T}{4}$ 时产生的微粒最终将到达 B 板(确切地说,应当是 $t < \frac{T}{4}$),不会再回到 A 板.

在 t 大于 $\frac{T}{4}$ 但小于 $\frac{T}{2}$ 时间内产生的微粒,被 $U_A = U_0$ 的电场加速的时间小于 $\frac{T}{4}$,在 $U_A = -2U_0$ 的电场作用下速度减到零的时间小于 $t = \frac{T}{8}$,故可在 $U_A = -2U_0$ 的电场作用下向 B 板运动时间为

$$\tau' > \frac{1}{2}T - \frac{1}{8}T = \tau_1.$$

所以这些微粒最终都将打到 B 板上,不可能再回到 A 板.

由以上分析可知,在 $t = 0$ 到 $t = \frac{T}{2}$ 时间内产生的微粒中,只有在 $t = 0$ 到 $t = \frac{T}{4}$ 时间

内产生的微粒能到达 A 板,因为各个时刻产生带电微粒的机会均等,所以到达 A 板的微粒数为

$$N = 320 \times \frac{1}{4} = 80. \quad (9)$$

20. 图 1-31 是一个水滴起电机的原理图, A 是底部有小孔的水槽,槽中盛有食盐水,食盐水与极板 M 间的电压为 U_0 ,盘状极板 N 位于 M 的下方,相距高度为 h . M、N 的绝大部分板面均水平,其间的电容为 C_1 . 图 1-32 是图 1-31 中 A、M 相邻部分的放大图. 刚离开小孔的水滴与电极 M 之间也形成电容器,其电容量为 C_2 , $C_2 > C_1$. 该电容器已充电到 U_0 . 带电水滴缓慢离开小孔, M、N 之间经常只有一滴水滴存在,每滴水的质量均为 m . 已知 N 原来没有带电, N 上由积水所引起的 M、N 之间的高度变化可忽略. 求:

(1) 极板 N 可达到的最高电势.

(2) 某一水滴将到达 N 之前的速度与该水滴之前落下的水滴数 n 的关系.

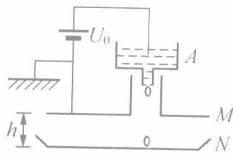


图 1-31

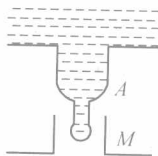


图 1-32

解 (1) 由于每滴水与 M 之间存在电容,故每滴水的带电量 $Q_0 = C_2 U_0$. 每滴水下落时受到重力与电场力作用,当 $F_{\text{电}} \geq G$ 时水滴便不再下落. 设某一时刻 N 板带电 Q ,则 $U_{NM} = \frac{Q}{C_1}$,板间场强 $E = \frac{Q}{C_1 h}$,故水滴不下落满足

$$Q_0 E \geq mg,$$

即得

$$Q \geq \frac{mg C_1 h}{C_2 U_0},$$

即

$$U_{N\text{max}} = \frac{Q}{C_1} = \frac{mgh}{C_2 U_0}.$$

(2) 水滴下落 n 滴后, N 板所带的电量为

$$Q' = nQ_0 = nC_2 U_0.$$

N、M 两板之间的电势差为



$$U' = \frac{Q'}{C_1} = \frac{nC_2 U_0}{C_1}.$$

对新一滴水滴有

$$mgh - Q_0 U' = \frac{1}{2} m v_N^2,$$

解得

$$v_N = \sqrt{2gh - \frac{2nC_2^2 U_0^2}{mC_1}}.$$

21. 半径为 R 、质量为 m 的匀质细圆环上均匀地带有电量 q ($q > 0$), 在过环心且垂直于环面的中央轴上固定两个点电荷, 它们分居环的两侧, 与环心相距都是 L , 各带有电量 Q ($Q > 0$). 设环被局限于在中央轴上平动, 那么现在环显然处于平衡位置. (1) 讨论平衡位置的稳定性; (2) 对于稳定平衡, 求出在其邻域作小振动的周期.

解 (1) 如图 1-33 所示, 由对称性知, 圆环上各小部分电荷对 Q 的斥力在平行于环面方向上的分力互相抵消, 它们在中央轴方向上的分力合成 F' . 这相当于将圆环上所有电荷集中到环上任何一个位置成为一个点电荷 q , 对点电荷 Q 的斥力沿轴方向的分力 F , 很容易算得 $F = k \frac{QqL}{(R^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}}$, 在轴上此力有两个零值位置, 当 $L = 0$ 或 $L \rightarrow \infty$, $F = 0$.

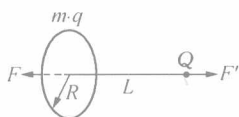


图 1-33

$$3 \sqrt{\frac{\left(\frac{R^2}{2}\right) \left(\frac{R^2}{2}\right) L^2}{(R^2 + L^2)^3}} \leq \frac{\frac{R^2}{2}}{R^2 + L^2} + \frac{\frac{R^2}{2}}{R^2 + L^2} + \frac{L^2}{R^2 + L^2}.$$

当 $L = \frac{R}{\sqrt{2}}$ 时, F 取得极大值.

若环向右或向左作小偏移, 右侧 Q 对环向左库仑力 F_1 与左侧 Q 对环向右库仑力 F_2 之合力不再为零, 令 $F_1 = k \cdot \frac{QqL_1}{(R^2 + L_1^2)^{\frac{3}{2}}}$,

$F_2 = k \cdot \frac{QqL_2}{(R^2 + L_2^2)^{\frac{3}{2}}}$, $L_1 + L_2 = 2L$. 分三种情况讨论:

$L > \frac{R}{\sqrt{2}}$, 环右移时, L_1 减小, F_1 增大, L_2 增大, F_2 减小, 合力朝左; 同理, 环左移时, 合力朝右, 为稳定平衡. 设环朝右偏移小量 x , 合力

$$F_x = F_2 - F_1 = kQq \left[\frac{L+x}{(R^2 + L^2 + 2Lx)^{\frac{3}{2}}} - \frac{L-x}{(R^2 + L^2 - 2Lx)^{\frac{3}{2}}} \right] = - \frac{2kQq(2L^2 - R^2)}{(R^2 + L^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot x,$$

这是线性恢复力, 周期为

$$T = \pi \sqrt{\frac{2(R^2 + L^2)^{\frac{3}{2}} m}{kQq(2L^2 - R^2)}}.$$

$L < \frac{R}{\sqrt{2}}$, 环右移时, L_1 减小, F_1 增大, L_2 增大, F_2 增大, 合力朝右; 同理, 环左移时, 合力朝左, 为不稳定平衡.

$L = \frac{R}{\sqrt{2}}$, L_1 减小, F_1 减小较快, L_2 增大, F_2 减小较慢, 合力朝右; 同理, 环左移时, 合力朝左, 为不稳定平衡.

22. 两个带正电的点电荷, 带电量都是 Q , 固定放置在图 1-34 中 x 轴上 A 、 B 两点处, A 、 B 距原点 O 的距离都为 r . 若在原点处放置另一个点电荷, 其带电量大小为 q , 质量为 m .

(1) 当限制点电荷 q 只能在哪些方向上运动时, 它在 O 处才是稳定的?

(2) 讨论在这些方向上受扰动后, 它的运动情况.



图 1-34

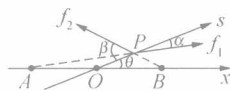


图 1-35

解 (1) 先讨论点电荷 q 带正电的情况. 设限制它在与 x 轴成 θ 角的 s 轴上运动, 当受扰动移动到 P 点 ($OP = s$) 时, 它受到 f_1 和 f_2 两个力 (如图 1-35 所示), 因此 q 在 s 轴上受