线性代数学习指导与习题解答

邓辉文 编

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

清华大学出版社

线性代数 学习指导与习题解答

邓辉文 编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书是作者编写的教材《线性代数》(清华大学出版社 2008 年出版)的辅导用书. 书中除对教材每章的重点内容、基本要求、难点和内容提要进行简述外,对教材中的每个题目都给出了详尽的解答. 本书与教材相同,也分为 5 章,分别介绍线性方程组、矩阵代数、向量空间、特征值与特征向量以及二次型. 另外,在附录中安排了两套自测题并给出参考答案.

本书适合于选用作者编写的《线性代数》教材的广大师生作为辅助用书,也可供考研的读者及相关专业技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导与习题解答/邓辉文编.—北京:清华大学出版社,2008.11

ISBN 978-7-302-18599-4

Ⅰ. 线… Ⅱ. 邓… Ⅲ. 线性代数—高等学校—教学参考资料 Ⅳ. O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 145323 号

责任编辑:刘 颖
责任校对:赵丽敏
责任印制:李红英
出版发行:清华大学出版社　　**地　　址**:北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**:100084
社 总 机:010-62770175　　**邮　　购**:010-62786544
投稿与读者服务:010-62776969,c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈:010-62772015,zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 刷 者:北京四季青印刷厂
装 订 者:三河市兴旺装订有限公司
经　　销:全国新华书店
开　　本:185×230　**印　张**:11.75　**字　数**:255 千字
版　　次:2008 年 11 月第 1 版　　**印　　次**:2008 年 11 月第1 次印刷
印　　数:1~4000
定　　价:18.00 元

本书如存在文字不清、漏印、缺页、倒页、脱页等印装质量问题,请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话:(010)62770177 转 3103　　产品编号:030912-01

前　　言

线性代数是理工、农、医等高等院校的重要基础课，由于线性代数的工具性作用，学好线性代数是至关重要的.

要学好线性代数，一方面要深刻理解其有关概念、掌握重要结论；另一方面要多做练习以加深对线性代数内容的理解和认识，这对于解决实际问题时熟练应用有关线性代数内容是必不可少的.

虽然作者编写的《线性代数》教材附录中有习题参考答案，但由于没有解题过程，使用过程中多有不便，为此编写了这本辅导书. 本书与教材相同，也分为5章，分别介绍线性方程组、矩阵代数、向量空间、特征值与特征向量以及二次型. 书中除对教材中的每个题目都给出了详尽的解答外，还对教材每章的重点内容、基本要求、难点和内容提要进行简述外. 另外，在附录中安排了两套自测题并给出参考答案.

重点内容是每章的重中之重. 一般来说，考试的计算题和证明题等都或多或少地与这些内容密切相关. 基本要求是要求大家全面掌握的内容，考试题目中多以填空、单项选择和判断等题型来考查应考者对全面知识的掌握程度. 难点是指在学习时理解较困难，或者是在解决具体问题时需要灵活运用的一些内容. 所给出的内容提要，是在做题目时需要用到的一些知识，特别是经常使用的一些重要结论，这些结论在《线性代数》教材中都有详细的讲解.

在选配教材中的习题时，既考虑到题目所含知识点的覆盖性，也考虑到题目的难易程度的阶梯分布. 其中一些题目选自历年的研究生入学考试试题. 这些详尽的解答过程，供广大读者做完习题后参考，相信能起到举一反三、加深对课本内容的学习和理解的作用，也为自学者提供了方便.

本书适合于选用作者编写的《线性代数》教材的所有师生，由于教材内容是经典的，因此本书也可供所有学习线性代数的学生作为参考用书.

笔者虽尽心努力，但由于水平有限，难免有疏漏和不足之处，欢迎读者批评指正，特此致谢.

编　者

2008年5月

目　录

第1章 线性方程组

本章主要结合线性方程组给出了矩阵的有关概念，特别是 n 元线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和增广矩阵 $\boldsymbol{B}$. 利用高斯消元法引入了矩阵的初等行变换，进而得出矩阵的行阶梯形矩阵和行最简形矩阵. 根据行阶梯形矩阵得到了矩阵秩的概念，进而得出了 n 元线性方程组有无解及解的个数等有关重要结论.

重点内容

求解线性方程组的高斯消元法.

基本要求

1. 理解矩阵的有关概念，特别是转置矩阵、对称矩阵、n 阶单位矩阵、n 阶对角矩阵以及两个矩阵相等的概念.

2. 理解线性方程组的有关概念，如齐次线性方程组、非齐次线性方程组、方程组的解以及零解和非零解等概念，能正确写出线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和增广矩阵 $\boldsymbol{B}$.

3. 掌握矩阵的换行、倍乘和倍加三种初等行变换，并能根据矩阵的初等行变换得出一个矩阵的行阶梯形矩阵和行最简形矩阵. 了解矩阵的三种初等列变换及矩阵等价的概念.

4. 根据矩阵的行阶梯形矩阵得出矩阵的秩，并根据系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩得出所给线性方程组是否有解的结论；若线性方程组有解，解是否唯一等问题.

5. 理解高斯消元法的概念，掌握高斯消元法求解任意的线性方程组通解的方法.

难点

1. 对于初学者来说，理解并能应用矩阵概念是第一个难点.

2. 为何根据矩阵的初等行变换可以同时得出线性方程组的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的秩，而不能使用矩阵的初等列变换.

3. 含有参数的线性方程组解的讨论是一个难点.

内容提要

1. $m\times n$ 矩阵是 mn 个数按一定顺序构成的有 m 行及 n 列的一个数表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

n 元线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{cases} \tag{Ⅰ}$$

方程(Ⅰ)的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 分别为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

2. 设矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

称矩阵

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵(transpose of a matrix),记为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 或 $\boldsymbol{A}'$.

3. 几种特殊矩阵

(1) 单位矩阵

对角线元素全为 1,其他元素全为 0 的 n 阶方阵称为 n 阶单位阵(identity matrix of order n),记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{E}_n$,有时记为 $\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{I}_n$,即

$$E=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}.$$

未写出的元素全为 0，今后会经常遇到这种处理方式.

(2) 对角矩阵

除对角线元素外全为 0 的 n 阶方阵称为 n 阶对角阵(diagonal matrix of order n). 设 n 阶对角阵中对角线元素依次为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，则该对角阵为

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix},$$

可简记为 $\operatorname{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$.

(3) 零矩阵

元素全为 0 的 $m\times n$ 矩阵称为零矩阵(zero matrix)，记为 $\mathbf{0}$ 或 $\mathbf{0}_{m\times n}$. n 阶零方阵记为 $\mathbf{0}_n$. 注意，加粗的 $\mathbf{0}$ 与实数 0 是不同的. 有各种形式的零矩阵，如

$$\mathbf{0}_{2\times 3}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad \mathbf{0}_3=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

零矩阵的作用类似于数 0.

(4) 上(下)三角阵

一般地，对角线以下元素全为 0 的方阵称为上三角阵(uppertriangular matrix)，其一般形式分别为

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ & & \ddots & \vdots\\ & & & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

对角线以上元素全为 0 的方阵称为下三角阵(lower triangular matrix)，其一般形式为

$$\begin{pmatrix}a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

4. 矩阵相等

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$，若矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和矩阵 $\boldsymbol{B}$ 对应的元素分别相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$，$i=1,2,\cdots,m$，$j=1,2,\cdots,n$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 相等(equal matrices)，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

5. 线性方程组的解

给定 n 元线性方程组（Ⅰ），若存在数 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，使得当

$$\begin{cases} x_1=\eta_1, \\ x_2=\eta_2, \\ \quad\vdots \\ x_n=\eta_n, \end{cases}$$

或采用矩阵的记号，当

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$$

时，线性方程组（Ⅰ）的每个方程均成立，则称它们是线性方程组（Ⅰ）的一个解（solution）. 否则，若线性方程组（Ⅰ）中至少有一个方程不成立，它就不是线性方程组（Ⅰ）的解.

在 n 元线性方程组（Ⅰ）中，若 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 不全为0，则称方程组（Ⅰ）为非齐次线性方程组（non-homogeneous linear equations）. 若 $b_1,b_2,\cdots,b_m$ 全为0，则称方程组（Ⅰ）为齐次线性方程组（homogeneous linear equations），n 元齐次线性方程组的一般形式为

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=0, \end{cases} \tag{Ⅱ}$$

其中 m 是方程的个数.

任意的 n 元齐次线性方程组均有解，如 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$. 此解称为齐次线性方程组的零解（zero solution）. 只有齐次线性方程组才有零解. 若存在不全为0的数 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$，使得 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}$ 是齐次线性方程组（Ⅱ）的解，该解称为非零解（nonzero solution）. 当然，齐次线性方程组可能存在非零解.

6. 矩阵的初等行变换有以下3种：

（1）**换行**　交换第 i 行和第 j 行的位置，记为 $r_i\leftrightarrow r_j$.

(2) **倍乘**　将第 i 行乘以不为 0 的数 k，记为 $kr_i(k\neq 0)$.

(3) **倍加**　将第 i 行乘以一个数 k 加在第 j 行，记为 kr_i+r_j.

利用矩阵的初等行变换，可以将其化为行阶梯形矩阵，即在该矩阵里面画一条阶梯线，满足

(1) 线的下方元素全为 0；

(2) 每个台阶只有一行，台阶数即为非零行的行数；

(3) 阶梯线的竖线后面的第一个元素非零，该元素称为该非零行的首非零元素.

利用矩阵的初等行变换，可以将其化为行最简形矩阵，行最简形矩阵满足

(1) 此矩阵的行阶梯形矩阵；

(2) 行阶梯形矩阵非零行的首非零元素为 1；

(3) 1 所在列的其他元素全为 0.

7. 矩阵的秩

在矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的行阶梯形矩阵中，其非零行的行数称为矩阵 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 的秩(rank of the matrix $\boldsymbol{A}$)，记为 $R(\boldsymbol{A})$ 或 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$.

8. 线性方程组有解的充要条件是 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})$，其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 分别为该线性方程组的系数矩阵和增广矩阵.

9. 矩阵的初等列变换

矩阵的三种初等列变换(column elementary operations of a matrix)为

(1) **换列**　交换第 i 列和第 j 列的位置，记为 $c_i\leftrightarrow c_j$.

(2) **倍乘**　将第 i 列乘以不为 0 的数 k，记为 $kc_i(k\neq 0)$.

(3) **倍加**　将第 i 列乘以一个数 k 加在第 j 列，记为 kc_i+c_j.

矩阵的初等行变换和矩阵的初等列变换统称为矩阵的初等变换(elementary operations).

若一个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经若干次初等变换得到矩阵 $\boldsymbol{B}$，则称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 等价(equivalent matrices)，记为 $\boldsymbol{A}\rightarrow\boldsymbol{B}$.

利用矩阵的初等变换，可以将任意一个矩阵化成如下标准形(standard form)：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix},$$

其左上角是一个单位矩阵.

10. 用高斯消元法求解线性方程组的通解

线性方程组的所有解称为通解(general solution). 求解线性方程组的步骤如下.

第1步　利用高斯"向下"消元法将增广矩阵化为行阶梯形矩阵，分别得出系数矩阵和增广矩阵的秩，就可以判断该线性方程组是否有解.

第2步　在有解的情况下，将增广矩阵的行阶梯形矩阵再化为行最简形矩阵，写出其对应的同解线性方程组. 通过确定自由未知量即可得出线性方程组的通解.

11. 若 n 元线性方程组有解，则

(1) 当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r=n$ 时，该线性方程组只有唯一解.

(2) 当 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=r<n$ 时，该线性方程组存在 $n-r$ 个自由未知量，进而有无限多个解.

习题1详解

1. 已知

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x-1},$$

求待定常数 A,B,C.

解　在等式两边同时乘以 $x(x-1)^2$，得

$$1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1).$$

整理后得

$$1=(A+C)x^2+(-2A+B-C)x+A.$$

比较等式左右两边的同类项系数，有

$$\begin{cases}A+C=0,\\-2A+B-C=0,\\A=1,\end{cases}$$

这是一个关于 A,B 和 C 的线性方程组，很容易得出它的解为

$$\begin{cases}A=1,\\B=1,\\C=-1.\end{cases}\quad \text{或}\quad \begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

说明　这是一个较简单的根据已知条件得线性方程组的应用题目，建立线性方程组是关键. 在高等数学的有理函数积分中多次出现此类问题. 当然，为了得出待定常数 A,B 和 C，更简单的方法是：在等式 $1=A(x-1)^2+Bx+Cx(x-1)$ 中，令 $x=0$，得 $A=1$. 令 $x=1$，得 $B=1$. 令 $x=2$，得 $A+2B+2C=1$. 将 $A=1$ 且 $B=1$ 代入，得 $C=-1$. 所以

$$\frac{1}{x(x-1)^2}=\frac{1}{x}+\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{x-1}.$$

2. 已知

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1&-3\\1&2&0&-3\\3&8&-2&3\\-5&7&-2&-1\end{pmatrix},$$

求 A^{T}，并判断 A 是否是对称矩阵.

解　根据转置矩阵的定义，有

$$A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}2&1&3&-5\\3&2&8&7\\1&0&-2&-2\\-3&-3&3&-1\end{pmatrix}.$$

由于 $A\neq A^{\mathrm{T}}$，所以 A 不是对称矩阵.

说明　由于 $a_{12}=1$，而 $a_{21}=3$，于是 $a_{12}\neq a_{21}$. 根据一个矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 是对称矩阵当且仅当 $a_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 这个结论，知 A 不是对称矩阵.

3. 写出下列线性方程组的系数矩阵和增广矩阵.

(1) $\begin{cases}x_1+x_2-x_3+2x_4=3,\\2x_1+x_2-3x_4=1,\\-2x_1-2x_3+10x_4=4.\end{cases}$　(2) $\begin{cases}x_1+2x_2+x_3-x_4=0,\\3x_1+6x_2-x_3-3x_4=0,\\5x_1+10x_2+x_3-5x_4=0.\end{cases}$

解　(1) 所给线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1&1&-1&2\\2&1&0&-3\\-2&0&-2&10\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&1&-1&2&3\\2&1&0&-3&1\\-2&0&-2&10&4\end{pmatrix}.$$

(2) 所给线性方程组的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&-1\\3&6&-1&-3\\5&10&1&-5\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&2&1&-1&0\\3&6&-1&-3&0\\5&10&1&-5&0\end{pmatrix}.$$

说明　正确写出所给线性方程组的系数矩阵和增广矩阵是以后讨论的基础，除了要注意按每个方程未知量 x_1,x_2,x_3,x_4 出现的顺序分别书写系数和右边的常数，特别是缺项时在矩阵相应位置写 0 外，还要注意教材中的系数矩阵用 A 表示，而增广矩阵用 B 表示.

注意　对于齐次线性方程组，其增广矩阵的最后一列元素全为 0.

4. 分别求出下列矩阵的行阶梯形矩阵和行最简形矩阵.

(1) $\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}$.　(2) $\begin{pmatrix}0&-2&1&1&0&0\\3&0&-2&0&1&0\\-2&3&0&0&0&1\end{pmatrix}$.

解 (1) 先求矩阵的行阶梯形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1&2&2&1\\2&1&-2&-2\\1&-1&-4&-3\end{pmatrix}\xrightarrow[-1r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&-3&-6&-4\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

再求矩阵的行最简形矩阵：

$$A\to\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&-3&-6&-4\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{3}r_2}\begin{pmatrix}1&2&2&1\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}\xrightarrow{-2r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&-2&-\frac{5}{3}\\0&1&2&\frac{4}{3}\\0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

(2) 先求矩阵的行阶梯形矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}0&-2&1&1&0&0\\3&0&-2&0&1&0\\-2&3&0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{pmatrix}-2&3&0&0&0&1\\3&0&-2&0&1&0\\0&-2&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&3&-2&0&1&1\\3&0&-2&0&1&0\\0&-2&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3r_1+r_3}\begin{pmatrix}1&3&-2&0&1&1\\0&-9&4&0&-2&-3\\0&-2&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-4r_3+r_2}\begin{pmatrix}1&3&-2&0&1&1\\0&-1&0&-4&-2&-3\\0&-2&1&1&0&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-2r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&3&-2&0&1&1\\0&-1&0&-4&-2&-3\\0&0&1&9&4&6\end{pmatrix}.$$

再求矩阵的行最简形矩阵：

$$A\to\begin{pmatrix}1&3&-2&0&1&1\\0&-1&0&-4&-2&-3\\0&0&1&9&4&6\end{pmatrix}\xrightarrow{2r_3+r_1}\begin{pmatrix}1&3&0&18&9&13\\0&-1&0&-4&-2&-3\\0&0&1&9&4&6\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1r_2}\begin{pmatrix}1&3&0&18&9&13\\0&1&0&4&2&3\\0&0&1&9&4&6\end{pmatrix}\xrightarrow{-3r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&0&0&6&3&4\\0&1&0&4&2&3\\0&0&1&9&4&6\end{pmatrix}.$$

5. 求下列矩阵的秩.

(1) $\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-1\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}$.　(2) $\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}$,其中 k 为待定常数.

解　(1) 先求出矩阵的行阶梯形矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3&2&-1&-3&-1\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}\xrightarrow{-1r_2+r_1}\begin{pmatrix}1&3&-4&-4&2\\2&-1&3&1&-3\\7&0&5&-1&-8\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-7r_1+r_3]{-2r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&3&-4&-4&2\\0&-7&11&9&-7\\0&-21&33&27&-22\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-3r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&3&-4&-4&2\\0&-7&11&9&-7\\0&0&0&0&-1\end{pmatrix}.$$

由于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵中非零行的行数为 3,因此所给矩阵的秩 $R(\boldsymbol{A})=3$.

(2) 先利用矩阵的初等行变换化简矩阵:

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3k\\-1&2k&-3\\k&-2&3\end{pmatrix}\xrightarrow[-kr_1+r_3]{1r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&2(k-1)&-3(k+1)(k-1)\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1r_2+r_3}\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&0&-3(k+2)(k-1)\end{pmatrix}.$$

① 若 $k=1$,则 $\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&-2&3\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,于是 $R(\boldsymbol{A})=1$.

② 若 $k=-2$,则 $\boldsymbol{A}\to\begin{pmatrix}1&-2&-6\\0&-6&-9\\0&0&0\end{pmatrix}$,于是 $R(\boldsymbol{A})=2$.

③ 若 $k\neq1,-2$,则 $\boldsymbol{A}$ 的行阶梯形矩阵为

$$\begin{pmatrix}1&-2&3k\\0&2(k-1)&3(k-1)\\0&0&-3(k+2)(k-1)\end{pmatrix}.$$

因此，所给矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩 $R(\boldsymbol{A})=3$.

6. 用高斯消元法求下列非齐次线性方程组的通解.

(1) $\begin{cases} x_1+2x_2-x_4=-1, \\ -x_1-4x_2+x_3+2x_4=3, \\ x_1-4x_2+3x_3+x_4=1, \\ 2x_1-10x_2+7x_3+3x_4=4. \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 2x_1-x_2+4x_3-3x_4=-4, \\ -x_1+x_3-x_4=-3, \\ 3x_1+x_2+x_3=1, \\ 7x_1+7x_3-3x_4=3. \end{cases}$

解 (1) 所给非齐次线性方程组的增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行阶梯形矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & -10 & 7 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{-1r_1+r_3 \\ -2r_1+r_4}]{1r_1+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & -14 & 7 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[-7r_2+r_4]{-3r_2+r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -8 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2r_3+r_4} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

根据增广矩阵的行阶梯形矩阵，有 $R(\boldsymbol{A})=R(\boldsymbol{B})=3<4$，于是所给线性方程组有无限多个解.

下面再将行阶梯形矩阵化成行最简形矩阵：

$$\boldsymbol{B}\to\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1r_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[1r_3+r_1]{-1r_3+r_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r_2+r_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-\frac{1}{2}r_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其对应的线性方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad + x_3 \qquad = 1, \\ \quad x_2 - \dfrac{1}{2}x_3 \qquad = 1, \\ \qquad\qquad\qquad x_4 = 4. \end{cases}$$

这时取 x_3 为自由未知量，令 $x_3 = k$，得原线性方程组的通解为

$$\begin{cases} x_1 = -k + 1, \\ x_2 = \dfrac{1}{2}k + 1, \\ x_3 = k, \\ x_4 = 4, \end{cases} \quad \text{其中 } k \text{ 为任意常数.}$$

(2) 所给非齐次线性方程组的增广矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行阶梯形矩阵为

$$\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -3 & -4 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r_2 + r_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -4 & -7 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 7 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[\substack{-3r_1 + r_3 \\ -7r_1 + r_4}]{1r_1 + r_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 6 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & -14 & 12 & 22 \\ 0 & 7 & -28 & 25 & 52 \end{pmatrix} \xrightarrow[7r_2 + r_4]{4r_2 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 6 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 10 & -8 & -18 \\ 0 & 0 & 14 & -10 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-1r_4 + r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 6 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -10 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{2}r_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 6 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 14 & -10 & -18 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-7r_3 + r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 6 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -18 \end{pmatrix}.$$

根据增广矩阵的行阶梯形矩阵，有 $R(\boldsymbol{A}) = R(\boldsymbol{B}) = 4$，于是所给线性方程组有唯一解.

下面再将行阶梯形矩阵进一步化成行最简形矩阵：

$$\boldsymbol{B} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 6 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{3}r_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 & -4 & -7 \\ 0 & -1 & 6 & -5 & -10 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$