# 广义相对论基础

赵之弦 编

中南工业大学出版社

# 前　言

几年以前我为物理系开广义相对论的选修课。深深感到缺少一本供高年级理工科学生学习的读物。广义相对论方面的书籍虽然不少，但内容上或则过深，或则过简，难于读懂。我因之着手编几章讲义作教材，希望既包含有基本的理论基础，又不使用很深的数学，较易读懂。初稿于1983年写成，几次使用，几经修改，于是就成了现在这本小册子《广义相对论基础》。

本书内容包括，必须的数学工具张量分析，广义相对论的基本原理，爱因斯坦场方程及几种解，广义相对论的经典检验，黑洞，引力波，宇宙学的弗里德曼模型。自我感觉取材比较适宜。

本书吸取了一些优秀著作的精华，很多地方取材自书末所附参考书目有关著作。由于笔者学识所限，缺点和错误在所不免。恳请读者指正。

本书出版得到李劲松教授大力帮助，得到信阳师院领导的大力支持。谨此志谢。

赵之弦

1989年10月

于信阳师院谭山包

# 目　录

# 第一章　张量分析

## §1　矢量和张量

### 1.1　一般变量变换

$n$ 维空间中的点用 $n$ 个数构成的数组来描述。这组数叫点的坐标

$$x^k=(x^1,\ x^2,\ \cdots,\ x^n)。$$

同一空间中坐标的选取方式是多样的。两组坐标 $x^k$ 与 $x'^k$ 的联系叫坐标变换

$$x'^k=x'^k(x) \tag{1.1.1}$$

式中 $x$ 代表数组 $x^k$（下同），$k$ 取 1 至 $n$，这就是函数的变量变换。

若满足数学上连续，可微要求，且雅可比行列式

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial x'^1}{\partial x^n} \\ \dfrac{\partial x'^2}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x'^2}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial x'^2}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x'^n}{\partial x^1} & \dfrac{\partial x'^n}{\partial x^2} & \cdots & \dfrac{\partial x'^n}{\partial x^n} \end{vmatrix} = \left|\frac{\partial x'^k}{\partial x^k}\right| \neq 0 或 \infty$$

则存在逆变换，即

$$x^k=x^k(x') \tag{1.1.2}$$

## 1.2 标量 矢量 张量

(1) 标量 在坐标$x^k$下，设有一函数$S(x)$，当坐标从$x^k$变为$x'^k$时，$S$相应地变为$S'$，但不改变其函数值，有

$$S'(x')=S(x) \tag{1.1.3}$$

称$S$为一标量。式中$x$和$x'$是同一点的两组不同的坐标。

(2) 逆变矢量 由(1.1.1)两边求微分得

$$dx'^k=\frac{\partial x'^k}{\partial x^\sigma}dx^\sigma \tag{1.1.4}$$

按爱因斯坦求和惯例，式中对重复指标$\sigma$自动求和。以下均如此。

由(1.1.2)两边求微分得

$$dx^k=\frac{\partial x^k}{\partial x'^\tau}dx'^\tau \tag{1.1.5}$$

(1.1.4)和(1.1.5)说明，即使变量作任意变换，但此变量的微分作齐线性变换。变换矩阵$\dfrac{\partial x'^\sigma}{\partial x^\sigma}$和$\dfrac{\partial x^k}{\partial x'^\sigma}$随空间不同点而不同，易证它们满足

$$\frac{\partial x'^k}{\partial x^\sigma}\frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}=\delta^k_\nu \tag{1.1.6}$$

以及

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\tau}\frac{\partial x'^\tau}{\partial x^\lambda}=\delta^\mu_\lambda \tag{1.1.7}$$

设有$n$个函数，在坐标$x^k$下，记为$v^k$($k$取1至$n$)，当坐标从$x^k$变为$x'^k$时，它的值相应地由$v^k(x)$变为$v'^k(x')$，它的变换规律和坐标的微分变换规律一样，

$$v'^k(x')=\frac{\partial x'^k}{\partial x^\sigma}v^\sigma(x) \tag{1.1.8}$$

就叫$v^k$为一逆变矢量，$k$每取一个值对应一个分量。

(3) 协变矢量

将标量(1.1.3)对变量$x'^\lambda$求偏导，得

$$\frac{\partial S'}{\partial x'^\lambda}=\frac{\partial s}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}=\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial s}{\partial x^\mu} \tag{1.1.9}$$

若$n$个函数在坐标$x^k$下记为$v_\lambda(x)$，当坐标从$x^k$变换为$x'^\lambda$时，它的值相应地由$v_\lambda(x)$变为$v'_\lambda(x')$，其变换规律与标量的微分变换规律(1.1.9)一样

$$v'_\lambda(x')=\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\lambda}v_\mu(x) \tag{1.1.10}$$

就称$v_\lambda(x)$为一协变矢量。$\lambda$每取一个值对应一个分量。

(4) 张量 类似于前面的情况，设有三个指标的$n^3$个函数在$x^k$坐标下记为$T^k_{\mu\lambda}(x)$，当坐标由$x^k$变为$x'^k$时，它的值相应地由$T^k_{\mu\lambda}(x)$变为$T'^k_{\mu\lambda}(x')$，其变换规律，上面的指标称逆变指标，与逆变矢量变换规律(1.1.8)相同，下面的指标称协变指标，和协变矢量变换规律(1.1.10)相同，即

$$T'^k_{\mu\lambda}(x')=\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\frac{\partial x'^k}{\partial x^\rho}T^\rho_{\alpha\beta}(x) \tag{1.1.11}$$

就称$T^k_{\mu\lambda}(x)$为张量。现在它有一个逆变指标，2个协变指标，叫做一阶逆变2阶协变混合张量，或(1，2)阶混合张量。一般讲，一个张量可以有$p$个逆变指标，$q$个协变指标，即有形式

$$T^{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_p}_{\beta_1\beta_2\cdots\beta_q}$$

我们将它称为($p$，$q$)阶张量。$q=0$，为逆变张量，$p=0$为协变张量。每一指标取每一值，对应一个分量。

**例：** 二阶逆变张量，设在坐标$x^k$下，其值为$T^{\mu\nu}$。当坐标

从$x^k$变为$x'^k$时，它变为$T'^{\mu\nu}$。变换规律为

$$T'^{\mu\nu}(x')=\frac{\partial x'^{\mu}}{\partial x^{\alpha}}\frac{\partial x'^{\nu}}{\partial x^{\beta}}T^{\alpha\beta}(x)$$

共有$n^2$个分量。

再例，二阶协变张量。设在坐标$x^k$下其值为$T_{\mu\nu}(x)$，当坐标从$x^k$变为$x'^k$时，它变为$T'_{\mu\nu}(x')$。变换规律为

$$T'_{\mu\nu}(x')=\frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}}\frac{\partial x^{\beta}}{\partial x'^{\nu}}T_{\alpha\beta}(x)$$

共有$n^2$个分量。

其他阶的张量，变换规律可以类推。

标量也叫0阶张量，逆变矢量也叫一阶逆变张量，协变矢量也叫一阶协变张量，决定一个量是不是张量，看它在坐标变换下的行为如何。满足所要求的变换规律者，方为张量，否则，不是。

## 1.3 张量代数

由于决定张量变换行为的矩阵是随不同点而不同的，所以必须在同一点上的两个张量间进行运算，才能使运算后的量保持张量的性质。

(1) 加减法　定义为两个同类张量相应分量的相加或相减。运算后仍得同一点上的同阶张量。如

$$R^{k}_{\mu\lambda}\pm S^{k}_{\mu\lambda}=T^{k}_{\mu\lambda} \tag{1.1.12}$$

(2)外乘　例如(0，2)阶张量$R_{\nu\mu}$与(1，1)阶张量$S^k_\lambda$的外乘定义为

$$R_{\nu\mu}S^{k}_{\lambda}=T^{k}_{\nu\mu\lambda} \tag{1.1.13}$$

一般由($p_1$，$q_1$)阶张量与($p_2$，$q_2$)阶张量相乘(外乘后)得到($p_1+p_2$，$q_1+q_2$)阶新张量。

(3) 缩并 一个混合张量，让它的一个上指标与某一下指标相等并求和，例如 $T^{k}_{\mu\lambda}$，让 $k=\mu$，

$$T^{\mu}_{\mu\lambda}=T_{\lambda} \tag{1.1.14}$$

叫缩并。一般讲，缩并后得到少两个指标的张量。

(4) 内乘和数乘 内乘实际上是外乘后再缩并，必须在逆变矢量 $A^{\mu}$ 和协变矢量 $B_{\mu}$ 间进行运算，结果得

$$C=A^{\mu}B_{\mu}\ 。$$

数乘，等于乘每个分量，

$$\alpha(A^{\mu\nu}\pm B^{\sigma\tau})=\alpha A^{\mu\nu}\pm\alpha B^{\sigma\tau}。$$

(5) 张量指标的升降 设有两个张量 $g_{\mu\lambda}$ 和 $g^{\lambda k}$，后面我们将知道这是度规张量。设 $v^{\mu}$ 和 $u_{\lambda}$ 为已知的逆变和协变矢量，则根据张量乘法和缩并的规则，有

$$v^{k}=v_{\lambda}g^{\lambda k}$$

$$v_{\lambda}=v^{\mu}g_{\mu\lambda}\ 。$$

显然可看出，在这里 $g^{\lambda k}$ 起着提升指标 $\lambda$ 的作用，$g_{\mu\lambda}$ 在这里起着降低指标 $\mu$ 的作用。类似，

$$T^{k}_{\mu\lambda}=T_{\mu\lambda\alpha}g^{\alpha k}$$

$$T_{\mu\lambda k}=T^{\alpha}_{\mu\lambda}g_{\alpha k}$$

这样，我们便可以用度规张量把任一张量表示成逆变的、协变的或混和的形式。

### 1.4 商定理

引进记号 $\dfrac{\partial}{\partial x^{\alpha}}=\partial_{\alpha}$，即 $\dfrac{\partial Q}{\partial x^{\alpha}}=\partial_{\alpha}Q$。或更简单表示为

$$\frac{\partial Q}{\partial x^{\alpha}}=Q_{,\alpha}\ 。$$

$\partial_\alpha$

对协变指标，$\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}=\partial^\alpha$，$\dfrac{\partial Q}{\partial x_\alpha}=\partial^\alpha Q$，或 $\dfrac{\partial Q}{\partial x_\alpha}=Q'^{\alpha}$。

有一些量具有和张量一样的外观形式，也有指标，可以缩并，也可以用度规张量升降，但它不是张量。

在同一方程中张量和非张量一起出现时如何辨明呢？有一条商定理：设 $P_{\lambda\mu\nu}$ 满足下列条件：对于任一矢量 $A^\lambda$，若 $A^\lambda P_{\lambda\mu\nu}$为张量，则$P_{\lambda\mu\nu}$为一张量。

证明：

因为 $A^\lambda P_{\lambda\mu\nu}=Q_{\mu\nu}$ 为一张量

所以 $Q_{\mu\nu}=Q'_{\beta\gamma}x'^{\beta}_{,\mu}x'^{\gamma}_{,\nu}$

于是 $A^\lambda P_{\lambda\mu\nu}=A'^{\alpha}P'_{\alpha\beta\gamma}x'^{\beta}_{,\mu}x'^{\gamma}_{,\nu}$

$$=A^\lambda x'^{\alpha}_{,\lambda}P'_{\alpha\beta\gamma}x'^{\beta}_{,\mu}x'^{\gamma}_{,\nu}$$

$$=A^\lambda P'_{\alpha\beta\gamma}x'^{\alpha}_{,\lambda}x'^{\beta}_{,\mu}x'^{\gamma}_{,\nu}$$

此方程必须对 $A^\lambda$ 的一切值成立，故

$$P_{\lambda\mu\nu}=P'_{\alpha\beta\gamma}x'^{\alpha}_{,\lambda}x'^{\beta}_{,\mu}x'^{\gamma}_{,\nu}$$

满足张量变换规律，故$P_{\lambda\mu\nu}$为一张量。

一个有任意指标的量代替 $P_{\lambda\mu\nu}$，本定理也成立。

## §2 仿射联络

前面谈到张量运算是在空间一给定点上进行的，而张量分析（例如微分）则需在不同点上运算（两个点上相减）。$A$ 点的张量对于$B$点不见得再是张量，这就带来了困难。为使不同点的张量的比较和运算成为可能，需要引进仿射联络概念。

首先要引进张量平移操作。把$P$点（坐标为 $x^\mu$）的张量平移至邻点 $Q$（坐标为$x^\mu+\mathrm{d}x^\mu$）变成 $Q$ 点的张量，保持张量性

质。

因为实际上用到的，只需要矢量平移就够了，我们从协变矢量的平移来引入仿射联络。设有$P$点的协变矢量$A_\mu(P)$。它平移至$Q$点后相应的矢量记作$A_\mu(P\to Q)$，作为线性的理论，平移引起的改变$\delta A_\mu(P)$应正比于$A_\mu(P)$，并正比于位移$\mathrm{d}x^\mu$。这样

$$\delta A_\mu(P)=A_\mu(P\to Q)-A_\mu(P)=\Gamma^\lambda_{\mu\nu}A_\lambda(P)\mathrm{d}x^\nu \tag{1.2.1}$$

这里的比例系数$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}(P)$就叫做$P$点的仿射联络。我们要求$A_\mu(P\to Q)$在$Q$点具有协变矢量的性质，这就是

$$A'_\mu(P\to Q)=\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)_Q A_\alpha(P\to Q) \tag{1.2.2}$$

变换矩阵有如下微分关系

$$\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)_Q=\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)_P+\left[\frac{\partial}{\partial x'^\nu}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)\right]_P\mathrm{d}x'^\nu$$

$$=\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\right)_P+\left(\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\right)_P\mathrm{d}x^\sigma \tag{1.2.3}$$

（1.2.2）可写作

$$A'_\mu+\Gamma'^\lambda_{\mu\nu}A'_\lambda\mathrm{d}x'^\nu=\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}+\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x'^\mu\partial x'^\nu}\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\mathrm{d}x^\sigma\right)\cdot(A_\alpha+\Gamma^\beta_{\alpha\sigma}A_\beta\mathrm{d}x^\sigma) \tag{1.2.4}$$

这里一切量的自变量都是$P$点的坐标，所以全部省略了。考虑到$A_\mu$和$\mathrm{d}x^\mu$都是$P$点的矢量，即有关系

$$A'_\mu=\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\mu}A_\beta,\qquad \mathrm{d}x'^\nu=\frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}\mathrm{d}x^\sigma$$

代回（1.2.4）式，略去坐标微分的二级小量，并注意所得的式子对任意的$A_\mu$和$dx^\mu$都适用，我们得出

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\lambda}\ \frac{\partial x'^\nu}{\partial x^\sigma}=\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu\partial x'^\rho}\ \frac{\partial x'^\rho}{\partial x^\sigma}+\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \tag{1.2.5}$$

利用变换矩阵的性质（1.1.6）和（1.1.7）可从（1.2.5）式解出

$$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}=\frac{\partial^2 x^\beta}{\partial x'^\mu\partial x'^\nu}\ \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta}+\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu}\ \frac{\partial x^\sigma}{\partial x'^\nu}\ \frac{\partial x'^\lambda}{\partial x^\beta} \tag{1.2.6}$$

这就是为了使$A_\mu(P\to Q)$是$Q$点的矢量，仿射联络所必须满足的公式。从这里看出，仿射联络不是张量，多了第一项。

至此，我们可以在某一组坐标下任意地给定一个仿射联络场$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}(x)$，然后用(1.2.6)式来定义其他坐标下的$\Gamma'^{\lambda}_{\mu\nu}(x')$，这样就在仿射空间中确立了一种联络。

用联络建立的平移操作也可以对其他阶张量进行。对逆变矢量，$P$点的逆变矢量$A^\mu(P)$，可以证明，

$$A^\mu(P\to Q)=A^\mu+\delta A^\mu=A^\mu-\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}A^\lambda dx^\nu \tag{1.2.7}$$

是$Q$点的逆变矢量。这是用联络对逆变矢量作平移的公式。

（1.2.7）证明如下：

由于　$d(A_\nu B^\nu)=0$，

$$\therefore\quad A_\nu dB^\nu=-B^\nu dA_\nu\overset{(1.2.1)}{=}-B^\nu\Gamma^{\mu}_{\nu\sigma}A_\mu dx^\sigma$$
$$=-B^\mu\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma}A_\nu dx^\sigma$$

此式必须对任何$A_\nu$成立，所以

$$\mathrm{d}B^{\nu}=-\Gamma^{\nu}_{\mu\sigma}B^{\mu}\mathrm{d}x^{\sigma} \tag{1.2.8}$$

即增量　$\delta A^{\mu}=-\Gamma^{\mu}_{\lambda\nu}A^{\lambda}\mathrm{d}x^{\nu}$，因此

$$A^{\mu}(P\rightarrow Q)=A^{\mu}-\Gamma^{\mu}_{\lambda\lambda}A^{\lambda}\mathrm{d}x^{\nu}。$$

联络$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$的对称组合

$$\Gamma^{\lambda}_{(\mu\nu)}=\frac{1}{2}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}+\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) \tag{1.2.9}$$

也是一种联络，叫对称联络，对其下标是对称的。

联络$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$反称组合

$$\Gamma^{\lambda}_{[\mu\nu]}=\frac{1}{2}(\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}-\Gamma^{\lambda}_{\nu\mu}) \tag{1.2.10}$$

是一个下标反称的张量。它叫仿射空间的挠率张量。若挠率张量为零，则联络是对称的。

（这里取常用的符号，圆括号表示对称组合，方括号表示反称组合。）

## §3　协变微商

物理定律必须表成张量方程，使它在一切坐标系中都有相同形式。当张量方程包含导数时，如按普通导数对待，会出现非张量，就不能满足协变要求。因此要定义一种协变微商，来实现这种需要。

**1.标量的协变微商**

标量的普通微商就是协变微商。

$$S_{,\mu}=\frac{\partial S}{\partial x^{\mu}}$$

其协变性，就是指这个微商是个张量，在坐标变换时，其

相应的张量方程形式不变，具体写出就是

$$S'_{,\lambda'} = \frac{\partial s'}{\partial x'^{\lambda}} = \frac{\partial s}{\partial x^{\mu}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\lambda}} = x^{\mu}_{,\lambda'} S_{,\mu} \qquad (1.3.1)$$

（变换前为$S(x)$是在不带撇的坐标系，变换后为$S'(x')$在带撇坐标系。今后为方便起见，指标上打撇，表示带撇系坐标。）

此式表明$S_{,\mu}$是协变矢量。

协变微商用“;”表示，所以

$$S_{;\mu} = S_{,\mu} \qquad (1.3.2)$$

**2.协变矢量的协变微商**

设有协变矢量场$U_{\lambda}(x)$，它对$x^{\nu}$的普通微商

$$U_{\lambda,\nu} = \frac{\partial U_{\lambda}(x)}{\partial x^{\nu}} = \lim_{Q\to P} \frac{U_{\lambda}(Q) - U_{\lambda}(P)}{\Delta x^{\mu}},$$

由于两点上矢量相减，不能保证再是张量。为了保证协变微商$U_{\lambda;\mu}$是张量，利用平移操作，把它定义为

$$U_{\lambda;\mu} = \lim_{Q\to P} \frac{U_{\lambda}(Q) - U_{\lambda}(P\to Q)}{\Delta x^{\mu}} \qquad (1.3.3)$$

将协变矢量的平移公式（1.2.1）代入，（1.3.3）化为

$$U_{\lambda;\mu} = U_{\lambda,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} U_{\alpha} \qquad (1.3.4)$$

这就是协变矢量的协变微商公式。

我们来核对一下协变性。

首先，$U_{\lambda}$的普通导数$U_{\lambda,\mu}$是不协变的，

$$\because \quad U'_{\lambda'} = x^{\lambda}_{,\lambda'} U_{\lambda} \qquad (1.3.5)$$

$$\downarrow$$

$$U'_{\lambda',\mu'} = (x^{\lambda}_{,\lambda'} U_{\lambda})_{,\mu'}$$

$$= x^{\lambda}_{,\lambda'} (U_{\lambda,\mu} x^{\mu}_{,\mu'}) + U_{\alpha} x^{\alpha}_{,\lambda'\mu'}$$

$$= x^{\lambda}_{,\lambda'} x^{\mu}_{,\mu'} U_{\lambda,\mu} + U_{\alpha} x^{\alpha}_{,\lambda'\mu'} \qquad (1.3.6)$$

第二项出现，表示$U_{\lambda,\mu}$为非张量。

再来看，$U_{\lambda;\mu}$是协变的。

从（1.2.6），有

$$x^{\alpha}_{,\lambda'\mu'} = x^{\alpha}_{,\alpha'} \Gamma'^{\alpha'}_{\lambda'\mu'} - x^{\mu}_{,\mu'} x^{\lambda}_{,\lambda'} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}$$

代入（1.3.6）得

$$U'_{\lambda',\mu'} = x^{\mu}_{,\mu'} x^{\lambda}_{,\lambda'} U_{\lambda,\mu} + x^{\alpha}_{,\alpha'} U_{\alpha} \Gamma'^{\alpha'}_{\lambda'\mu'}$$
$$- x^{\mu}_{,\mu'} x^{\lambda}_{,\lambda'} U_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu}$$

即 $U'_{\lambda',\mu'} - \Gamma'^{\alpha'}_{\lambda'\mu'} U_{\alpha'} = x^{\mu}_{,\mu'} x^{\lambda}_{,\lambda'} (U_{\lambda,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} U_{\alpha})$

可见 $(U_{\lambda,\mu} - \Gamma^{\alpha}_{\lambda\mu} U_{\alpha})$为张量。$U_{\lambda;\mu}$是协变的。

**3.逆变矢量的协变微商**

设有逆变矢量场$U^k(x)$，它对$x^{\mu}$的普通微商是

$$U^k_{,\mu} = \frac{\partial U^k(x)}{\partial x^{\mu}} = \lim_{Q \to P} \frac{U^k(Q) - U^k(P)}{\Delta x^{\mu}}$$

其协变微商定义为

$$U^k_{;\mu} = \lim_{Q \to P} \frac{U^k(Q) - U^k(P \to Q)}{\Delta x^{\mu}} \qquad (1.3.7)$$

将逆变矢量的平移公式（1.2.7）代入，（1.3.7）化为

$$U^k_{;\mu} = U^k_{,\mu} + \Gamma^k_{\lambda\mu} U^{\lambda} \qquad (1.3.8)$$

这就是逆变矢量的协变微商公式。

**4.一般张量的微商**

为了唯一地确定其他阶张量的协变微商，我们要求协变微商满足与普通微商一样的规则：

和的协变微商等于协变微商的和；

积的协变微商遵守莱布尼兹法则，即

$$(A^{\cdots}_{\cdots} B^{\cdots}_{\cdots})_{;\lambda} = (A^{\cdots}_{\cdots;\lambda})(B^{\cdots}_{\cdots}) + (A^{\cdots}_{\cdots})(B^{\cdots}_{\cdots;\lambda}). \qquad (1.3.9)$$

例　$(A^\mu B_\nu)_{;\lambda} = A^\mu{}_{;\lambda} B_\nu + A^\mu B_{\nu;\lambda}$

$$= (A^\mu{}_{,\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} A^\rho) B_\nu + A^\mu (B_{\nu,\lambda} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} B_\rho)$$

$$= (A^\mu B_\nu)_{;\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda}(A^\rho B_\nu) - \Gamma^\rho_{\nu\lambda}(A^\mu B_\rho)$$

根据张量外乘规则，此式可写成

$$T^\mu_{\nu;\lambda} = T^\mu_{\nu,\lambda} + \Gamma^\mu_{\rho\lambda} T^\rho_\nu - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} T^\mu_\rho$$

更复杂一点的乘积的协变微商可以类似办理。这样，从这里我们看到，借助逆变矢量和协变矢量的协变微商计算，对于一般张量，其协变微商等于它的普通微商加上附加项。附加项规律是，对每一上标按逆变矢量的协变微商那样操作一次，而对每一下标按协变矢量的协变微商那样操作一次。

例如

$$\varphi^{\mu\sigma}_{\lambda;\rho} = \varphi^{\mu\sigma}_{\lambda,\rho} + \Gamma^\mu_{\nu\rho} \varphi^{\nu\sigma}_\lambda + \Gamma^\sigma_{\nu\rho} \varphi^{\mu\nu}_\lambda - \Gamma^\nu_{\lambda\rho} \varphi^{\mu\sigma}_\nu。$$

更具体一点，附加项这样写：

$$A^{\cdots\sigma\cdots}_{\cdots\cdots;\tau} = \cdots + \Gamma^\sigma_{\nu\tau} A^{\cdots\nu\cdots}_{\cdots\cdots} + \cdots \qquad (1.3.10)$$

$$A^{\cdots\cdots}_{\cdots k\cdots;\tau} = \cdots - \Gamma^\nu_{k\tau} A^{\cdots\cdots}_{\cdots\nu\cdots} + \cdots。 \qquad (1.3.11)$$

作为应用，我们来计算$\delta^k_\mu$的协变微商。

首先它是一个张量，因为

$$\delta^k_\mu = \frac{\partial x^k}{\partial x^\mu} = x^k_{,\mu'} x^{\mu'}_{,\mu} = x^k_{,k'} x^{\mu'}_{,\mu} \delta^{k'}_{\mu'}$$

满足张量变换规律。因此

$$\delta^k_{\mu;\nu} = \delta^k_{\mu,\nu} + \Gamma^k_{\alpha\nu} \delta^\alpha_\mu - \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \delta^k_\alpha$$

$$= 0 + \Gamma^k_{\mu\nu} - \Gamma^k_{\mu\nu} = 0\ 。 \qquad (1.3.12)$$

最后，缩并张量的协变微商，等于协变微商的缩并。例如

$$A^{\mu\sigma}{}_{\sigma;\lambda} = A^{\mu\sigma}{}_{\sigma,\lambda} + \Gamma^\mu_{\tau\lambda} A^{\tau\sigma}{}_\sigma \qquad (1.3.13)$$

无论是缩并后求导或者是先求导后缩并，结果一样。

## §4 黎曼空间和度规张量

在三维欧氏空间里，相邻两点（坐标差为d$x$)的距离d$s$，在直角坐标里是

$$ds^2=dx^2+dy^2+dz^2 \qquad (1.4.1)$$

在球坐标下

$$ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2 \qquad (1.4.2)$$

在狭义相对论中四维闵柯夫斯空间，两邻点间距离为

$$ds^2=-c^2dt^2+dx^2+dy^2+dz^2 \qquad (1.4.3)$$

不管哪个例子，非常接近的两邻点间的距离平方，都是坐标微分的二次形式。

推广这个形式，定义$n$维空间中坐标为$(x^{\mu})$与$(x^{\mu}+dx^{\mu})$两相邻点间的距离为二次型

$$ds^2=g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}. \qquad (1.4.4)$$

规定d$s$为标量，与坐标无关，于是系数$g_{\mu\nu}$叫做度规张量。在仿射空间中确立了度规场后，空间任意两相邻点的距离有了意义，这样的空间就叫黎曼空间。

$g_{\mu\nu}$是张量，并令$g_{\nu\mu}=g_{\mu\nu}$，为对称张量。由d$s^2$是不变量，有

$$g_{\mu'\nu'}dx'^{\mu}d'^{\nu}=g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}$$

因为 $dx^{\mu}=\dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu}}dx'^{\mu}$，$dx^{\nu}=\dfrac{dx^{\nu}}{\partial x'^{\nu}}dx'^{\nu}$

所以 $g_{\mu'\nu'}dx'^{\mu}dx'^{\nu}=g_{\mu\nu}\dfrac{\partial x^{\mu}}{\partial x'^{\mu}}\dfrac{\partial x^{\nu}}{\partial x'^{\nu}}dx'^{\mu}dx'^{\nu}$

$dx'^{\mu}$、$dx'^{\nu}$是任意的，得