高中数学一题多解

刘忠智 编著

西安地图出版社

责任编辑　马　鹏
封面设计　徐　明

ISBN 7-80545-313-6

9 787805 453132 >

ISBN 7－80545－313－6/K·302
定价：6.80 元

$ 25.00

高中数学一题多解

刘忠智　编著

西 安 地 图 出 版 社

(陕)新登字013号

封面设计: 徐 明
责任编辑: 马 鹏

高中数学一题多解
刘忠智 编著
西安地图出版社出版发行
(西安友谊东路124号·邮政编码710054)
新华书店经销 陕西地矿局测绘印刷厂
787×1092毫米 开本1/32 10印张 216千字
1994年8月第1版 1994年8月第1次印刷
印数 1—10000
ISBN7—80545—313—6/K·302
定价: 6.80元

编 者 的 话

解题是数学工作者数学活动的基本形式，解题是数学工作者数学活动的主要内容，解题是数学工作者的一个存在目的，解题是数学工作者的一个兴奋中心。因之解题能力的高低就是掌握数学知识多少，分析问题和解决问题能力强弱的最直观表现。而一题多解的训练对巩固所学知识，活跃思维，扩大知识面，加深知识纵横联系，从而达到提高解题能力起着极重要的作用。解出一个数学题目固然是很重要的，但能提出异于别人的新解法更能激发数学工作者的情趣和创造力。因此一题多解是数学的永恒题目。为拓宽读者的视野，本书收集、整理近几年来高考、竞赛、课本上的数学题近 *100* 例，通过这近 *100* 个一题多解题目的示范，希望对读者解题能力的提高有所裨益。

刘忠智

1993 年 10 月

目　录

第一章　数学一题多解的价值及成因

数学一题多解是指对某一问题，运用不同的方法，根据不同的数学概念从不同的角度进行分析，随之得到各不相同的多种解法。是什么原因使我们对一题多解的研究产生了浓厚的兴趣呢?为什么会产生一题多解呢?下面我们首先将对这两个问题予以探讨。

第一节　为什么要研究一题多解

一、研究一题多解有利于激发创新精神，推动数学发展

数学教学的一个重要任务是培养学生的逻辑推理能力、空间想象能力、运算能力及数学知识的综合运用能力。而解题方法的研究则是实现上述目标的重要手段。一个题目得到解决固然是相当重要的，但探求异于别人的新解法长期以来就是不少数学家梦寐以求的乐事。最著名的例子就是勾股定理的证明。早在公元前 1100 年左右，我国最早的数学家商高就提出了勾三股四弦五的著名论断，比商高晚了 600 多年的古希腊数学家毕达哥拉斯才用纯逻辑的方法给予了严格的证明。此后大数学家欧几里德出色的证明成了 2000 年来国内外几何课本通用的证法。我国古代数学家项名达、梅文鼎、李锐等人也用悬图法提出了十多种不同的证法。随着数学的发展，人们不断寻求新证法。有资料记载，到目前为

止，勾股定理的证明已达200种以上。此外象斯坦纳定理，蝴蝶定理等也都是一题多解的典型例子。原苏联《数学教师》1980年12期把斯坦纳定理作为"问题征解"，在全球范围内征求新的证法，他们先后收到来自美国、加拿大、丹麦、罗马尼亚、埃塞俄比亚、以色列、香港等国家和地区2000多封来信，从中归纳不同的证法达80余种。很多数学名题的新证明成了一大批数学爱好者的追求目标。

一种新证法的提出是要付出辛勤劳动的，而胜利后的喜悦则是数学家最为开心的时刻。相传毕达哥拉斯在完成勾股定理的证明后，曾杀了100只牛设宴表示庆贺。美国第20届总统加菲尔德在当议员时，也对勾股定理的证明产生了极大兴趣，当他的新证法公布于众时，议员们报以热烈的掌声。学习的兴趣总是和创造的欢乐紧密相连的。在中学数学教学中，引导学生研究一些一题多解的题目是为了增强学生的求知欲望，激发学生的创新精神，进而推动数学学科理论的深化和发展。

二、研究一题多解有利于增强综合运用知识的能力，优化知识结构

一个题目的多种解法，是在人们的认识不断深化，对原有的解法不断优化的基础上逐步提出来的。中学生的学习也有这样一个不断深化的过程。例如初中学了几何，只有在高中学了三角之后才能提出几何问题的三角解法；只有在学习了解析几何之后才能提出几何问题的解析解法；只有学了复数之后才能提出几何问题的复数解法。反之复数问题、解析几何问题、三角问题也可以在几何中找到简洁、直观的解释，这种反复，使数学概念得到了不断的深化。也还是由于

研究一题多解时，必须具有较广阔的数学知识，熟练的技能技巧，灵活多变的智力，多向思维的头脑，从而促进学生把几何、代数、三角、解析几何等数学分支看成互相密切关联的整体。只学好一个章节、一个分支是不够的，而应扎扎实实学好数学的每一个章节，每一个分支。只有掌握较多的知识，才能提出不同的解法；只有提出多种不同的解法才能深化所学的知识，才能深刻理解一些数学定理、公式的实质。提出的解法越多，说明学生综合运用数学知识能力越强。

三、研究一题多解是减轻学生负担、提高教学质量的重要手段

我国是一个拥有 12 亿人口的大国，就业竞争是十分激烈的，升学是就业的重要途径。所以学生负担过重成了社会关心的热点问题。时间紧，任务重，又要保证质量，又要减轻学生负担，这就是一个矛盾。解决这一矛盾的有效方法是精选习题，特别是精选一些一题多解的题目。通过这些一题多解的题目，加强综合训练，加强各分支的知识互融，培养学生良好的逻辑推理能力，多向思维能力。例如在解析几何中，直线方程有 7 种表示形式，一个与直线有关的题目，我们不妨用 7 种方程都试一试，这样一个题目可以复习 7 个直线方程的应用。又如复数有 3 种表示形式(代数表示，几何表示，三角表示)。给定一个题目，要求用复数 3 种不同表示形式去求解，可加深复数概念的理解。有些题目，可用代数法，几何法，三角法，解析法或分析法，反证法，设元法等多种方法求解。通过一个题目，复习了很多证法，加强了知识互相贯通。通过较少的题目，达到把数学知识转化为数学能力的目的。这方面有大量的范例可给我们作榜样。

四、用一题多解的方法可以检查数学命题的严密性

选编数学题目是一项严肃、谨慎的工作，稍有疏忽，就会出现差错，从而使学生做了无效的艰苦劳动。因为判断一个假命题往往比证明一个真命题更难。条件不足的假命题是容易发觉的，因为少了一个条件便推导不出结论；但是，条件过剩就不容易察觉了。因为它毕竟还能成立。怎样鉴别一个题目是错题或题设有了过剩条件呢?一题多解就是一个有效的办法。例如：

例 1　$\alpha\in(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$，$x=sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha$，$y=sec\alpha+\mathrm{tg}\alpha$，若已知 $x=-2$，则 $y=$ ________（第三届“希望杯”全国数学邀请赛高一第一试填空题第 6 小题）。

解法1：两式乘，得

$$x\cdot y=sec^2\alpha-\mathrm{tg}^2\alpha=1$$

$$\therefore\quad y=-\frac{1}{2}$$

解法2：

$$x=sec\alpha-\mathrm{tg}\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\because\quad \alpha\in(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2})$$

$$\therefore\quad \cos\alpha>0$$

又　$1-\sin\alpha>0$

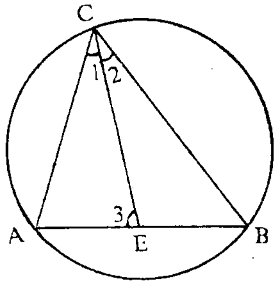
$\therefore$　$x>0$，即x根本不可能为-2.

可见原题目是一个错题。

例 2　如图 $\triangle ABC$ 中，$\angle C$ 的平分线交 AB 于 E，如

果$\angle C=60^{\circ}$，且$CE^2=AE\cdot EB$。求证$\frac{AE}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$(1978年某市中学生数学竞赛选拔试题)。

证明：由$CE^2=AE\cdot EB$



$$\Rightarrow\frac{CE}{AE}=\frac{EB}{CE}$$

$$\Rightarrow\frac{\sin A}{\sin\angle 1}=\frac{\sin\angle 2}{\sin B}$$

$$\Rightarrow\sin A\cdot\sin B$$

$$=\sin\angle 1\cdot\sin\angle 2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow\cos(A-B)-\cos(A+B)=\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow\cos(A-B)=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow|A-B|=0\\ \angle C=60^{\circ}\Rightarrow A+B=120^{\circ}\end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}A=105^{\circ}\\ B=15^{\circ}\end{cases}$$

或 $\begin{cases}A=15^{\circ}\\ B=105^{\circ}\end{cases}$

故 $$\frac{AE}{AC}=\frac{\sin\angle 1}{\sin\angle 3}=\frac{\sin\angle 1}{\sin(\angle 2+B)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

从这一解法看，题设的每一个条件都利用了。现在换用另一种证法：

证明：CE是$\triangle ABC$的内角平分线

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow CE^2=AC\cdot BC-AE\cdot EB\\ CE^2=AE\cdot EB\end{array}\right\}\Rightarrow 2AE\cdot EB=AC\cdot BC$$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AE}{AC}=\dfrac{BC}{2EB}\\ \dfrac{AE}{AC}=\dfrac{EB}{BC}\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{BC}{2EB}=\frac{EB}{BC}\Rightarrow BC=\sqrt{2}EB$$

$$\Rightarrow\frac{BC}{EB}=\sqrt{2}\Rightarrow\frac{AE}{AC}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

在第二种证法中，条件$\angle C=60°$没有用到，可见是多余的条件，甚至△ABC 的外接圆也是多余的。也许编题者的意图在于检查用三角法证几何题的综合解题能力，但几何证法又说明这个题中有了过剩条件，这就暴露出编拟的片面性。所以，运用一题多解是防止编题过程中出现差错的重要手段。

第二节　数学一题多解的成因

恩格斯在谈到数学时，曾经指出“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料”(《反杜林论》)。尽管数学的内容是那样的繁多，但是把这些内容仔细分析一下，就可以看出数学大致分为两类：一类是研究数量关系的，一类是研究空间形式的，“数量关系”和“空间形式”本是两个不同的概念，但在数学中却又密切地结合在一起，例如数轴上的点集和实数集；二元一次方程组的解集和二直线的公共点集；复数与复平面上的点；函数关系式和它的图象等等，都反映了“数”和“形”又是统一的。这种统一，必然把研究“数”和“形”的各个分支，如几何、代数、三角、解析几何等学科有机地联系在一起。这种统一，也就产生了解题方法的多样性。如几何问题可用代数、三角、解析几何知识求得解决；代数、三角、解析几何也可能相互之间互化求得解决，这是其一。

其二，人们熟知，原命题与它的逆否命题是等价的。若证原命题，一般是用直接证法；若证它的逆否命题就是反证法。直接证法与反证法好比通向同一目的地的两条道路，殊途同归。正是由于这种原命题与它的逆否命题的等价原理，所以每个命题至少应该有两种不同的证法：直接证法和反证法。在数学历史发展的长河中，人们又不断的丰富、发展了数学理论，总结归纳出不少新的证法，如分析法、综合法、逆证法、归纳法、同一法、设元法、类比法、坐标法等等，

这些方法给数学问题的解决提供了更有效的工具，更为广阔的途径．正是由于数学论证方法的多样性，也就产生了一个数学命题解决方法的多样性．

产生解题方法的多样性的第三个原因是解题技巧的灵活多变，如几何证明中的辅助线作的位置不同，代数中设元不同，三角中所用的三角函数关系式的不同，解析几何中坐标系位置不同，复数中所用的复数表示方法不同等等，这因人而异，因题设而异的解题技巧，也就使数学解题方法变得更加丰富多彩．

第四，数学知识是现实世界客观存在的空间形式和数量关系的反映，同样的空间形式，同样的数量关系，可以用不同的数学命题，数学结构，数学体系来反映．例如欧氏几何与非欧几何立论基础不同，同一空间形式的命题的解法就会不同；又如球面三角学与平面三角学讨论问题范围不同解题方法也就会不同；再如十进位制与二进位制下的代数命题的解法也就大不一样……．这是宏观方面的原因．从微观方面来说，一个人的知识范围，智力的差别，某一时刻的精神状态……等诸因素也是产生一题多解的重要原因．从历年的高考或数学竞赛试题看，越是难度大的题目，往往解法越多．有的人的解法特别简洁，让人啧啧称赞，有的解法独辟蹊径，可能过程繁一些，但最终还是使问题获得圆满的解决．如果我们善于集思广益，把这些解法总结起来，看人家是怎样想的，怎样解的，久而久之，我们的解题方法也会多起来．

第二章　各科一题多解典型例题

第一节　立体几何范例

例 1　如下图，四棱锥 S—ABCD 的底面是边长为 1 的正方形，侧棱 SB 垂直于底面，并且 $SB=\sqrt{3}$，用 α 表示 $\angle ASD$，求 $\sin\alpha$ 的值。

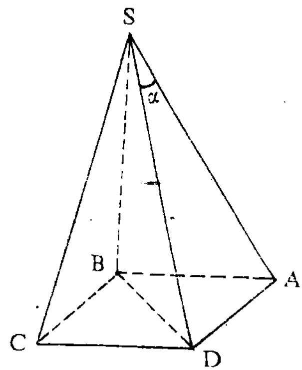


图1—1—1

解法 1：因为 SB 垂直于底面 ABCD，所以斜线 SA 在底面上的射影为 AB .

$\because$　$DA \perp AB$

$\therefore$　$DA \perp SA$

$\therefore$　$\sin\alpha = \dfrac{AD}{SD} = \dfrac{1}{SD}$

连结BD，易知　$BD=\sqrt{2}$

$\because$　$SB \perp BD$

$$\therefore\quad SD=\sqrt{SB^2+BD^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}$$

故　$\sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

解法 2：连结 BD，因为 SB 垂直底面 $ABCD$，所以 $SB\perp BD$，$SB\perp BA$，且 $BD=\sqrt{2}$.

$$\therefore\quad SD=\sqrt{SB^2+BD^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\sqrt{2})^2}=\sqrt{5}$$

$$SA=\sqrt{SB^2+BA^2}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$$

$$\because\quad (\sqrt{5})^2=2^2+1^2\quad 即SD^2=SA^2+AD^2$$

$\therefore$ $\triangle SAD$为直角三角形，其中$\angle SAD$为直角。

$$\therefore\quad \sin\alpha=\frac{AD}{SD}=\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

解法 3：用解法 2 中求出的 $SD=\sqrt{5}$，$SA=2$，在$\triangle SAD$ 中，有

$$\cos\alpha=\frac{SA^2+SD^2-AD^2}{2\cdot SA\cdot SD}=\frac{2^2+(\sqrt{5})^2-1}{2\cdot 2\cdot\sqrt{5}}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\therefore\quad \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{5}$$

解法 4：因为 SB 垂直于底面 ABCD，所以 SB$\perp$DA，由于 ABCD 为正方形，所以 DA$\perp$AB，从而 DA$\perp$平面 SAB，由此得 DA$\perp$SA.

以下同解法 1 .

例 2　三个平面两两相交，有三条交线，求证：这三条交线交于一点或互相平行。

已知：$\alpha\cap\beta=c$，$\beta\cap\gamma=a$，$\gamma\cap\alpha=b$.

求证：a、b、c 交于一点或 a // b // c.

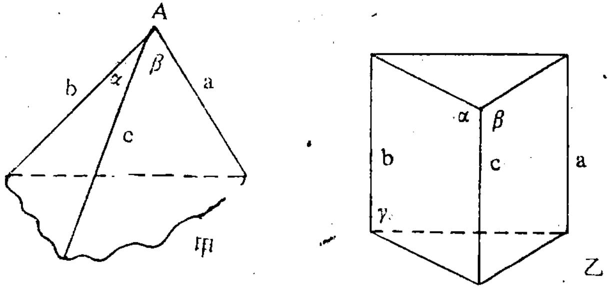


图 1—2—1

证法1：∵ $\alpha\cap\beta=c$，$\gamma\cap\alpha=b$

∴ $c\subset\alpha$且$b\subset\alpha$，即b，c共面α.

∴ b，c或者交于一点，或者互相平行。

(1) 若 b，c 相交于一点，设 $b\cap c=A$，由 $A\in b$，且 $b\subset\gamma$，∴$A\in\gamma$，又由 $A\in C$，且 $c\subset\beta$，∴$A\in\beta$，从而 $A\in\beta\cap\gamma=a$，即 a 经过 A 点。

∴ a，b，c交于一点(即A点)。

(2) 若 $b\,/\!/\,c$，则由 $b\subset\gamma$，$c\not\subset\gamma$，必有 $c\,/\!/\,\gamma$，又因为 β 是经过 c 且与 γ 相交于 a($c\subset\beta$ 且 $\beta\cap\gamma=a$) 的平面，∴ $c\,/\!/\,a$. ∴ $a\,/\!/\,b\,/\!/\,c$.

证法 2：如果 a，b，c 中有两条交于一点，不妨设$a\cap b=A$，则∵$A\in a$，而 $\beta\cap\gamma=a$，∴$A\in\beta$，又 $A\in b$，而 $\gamma\cap\alpha=b$，∴$A\in\alpha$，从而 A 在 α 与 β 的交线 c 上，即 $A\in c$，∴三直线 a，b，c 交于一点 A。

如果 a，b，c 中，任何两条都不相交，那么因为它们