

数学教育论

骆洪才 王晓萍 / 著

有数学学科，就必然存在数学教育。数学教育首先是数学的教育，同时又是教育的数学，这二者的矛盾关系推动着数学教育不断向前发展，正确处理好这二者的关系涉及数学教育观的问题。数学教育问题是复杂的、动态变化的，随着现代社会的发展，数学教育的理念、目标、内容和方法也必然发生相应的变化。

湖南师范大学出版社

湘南学院科研资助出版

湖南省教育厅教改研究课题项目

(湘教发[2003]98号)

湖南省教育厅教改研究课题项目

(湘财教指[2007]36号)

湘南学院科学研究重点课题立项

(湘南学院[2006]73号)

数学教育论

骆洪才 王晓萍 / 著

湖南师范大学出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

数学教育论 / 骆洪才, 王晓萍著. —长沙: 湖南师范大学出版社, 2008. 7

ISBN 978 - 7 - 81081 - 954 - 1

I. 数… II. ①骆…②王… III. 数学教学—教学研究
IV. 01 - 4

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 112340 号

数学教育论

骆洪才 王晓萍 著

◇责任编辑: 颜李朝

◇责任校对: 胡晓军

◇出版发行: 湖南师范大学出版社

地址/长沙市岳麓山 邮编/410081

电话/0731. 8853867 8872751 传真/0731. 8872636

网址/http: //press. hunnu. edu. cn

◇经销: 湖南省新华书店

◇印刷: 长沙瑞和印务有限公司

◇开本: 890 × 1240 1/32

◇印张: 15

◇字数: 432 千字

◇版次: 2008 年 9 月第 1 版 2008 年 9 月第 1 次印刷

◇书号: ISBN 978 - 7 - 81081 - 954 - 1

◇定价: 28.00 元

序

有数学学科,就必然存在数学教育.1908年6月,在罗马举行的第四届国际数学家大会,建立了国际数学教育委员会(ICMI),1952年,该委员会成为国际数学联盟(IMU)的一个分支机构.从1967年开始,与国际数学家大会一样,单独召开国际数学教育大会(ICME),开展数学教育的科学研究,数学教育的重要性已引起世人的瞩目.正如国际数学教育会议主席、法国南巴黎大学教授 Kahane 所说:世界不啻是一个数学教育实验室,ICME 实为一个交流经验基地.由此看来,数学与数学教育是紧密相关的.

这种关系体现在数学教育首先是数学的教育,同时又是教育的数学,这二者的矛盾关系推动着数学教育不断向前发展,正确处理好这二者的关系涉及数学教育观的问题.关于数学的教育,又必然涉及数学观的问题.如何认识数学的本质、数学观的内涵表现在哪些方面、数学教育中的教师与学生应具备怎样的数学观,对这些问题的不同回答,将会对数学教育产生深刻的影响.不同的数学观,影响到主体对数学教育的认识、对数学教学的态度、对数学学习的行为方式等.而作为教育的数学,应基于教育就是把一个自然人变成一个社会人,使之能自立于社会、能与他人相处、学会谋生处事这一出发点,以学生的发展为本,以学生的学习为主体,既要适应当代社会发展的需要,也要遵循数学教育教学规律.

数学教育问题是复杂的、动态变化的.随着现代社会的发展需求,信息化、技术化已成为当代社会的主要标志,数学教育的理念、目标、内容和方法等也必然发生相应的变化.数学教育中存在着很多问题,

要解决这些问题,就要抓住数学教育的本质,不断地进行改革,使之与社会发展相适应.国际数学教育经历了“实用数学教学”、“应用数学教学”、“新数运动”、“问题解决教学”、“大众数学”等几次大的改革阶段.我国数学教育也经历了建国初期全面学习苏联、教育大革命、调整巩固充实提高、义务教育与素质教育、新课程改革等改革发展阶段.尤其是数学课程标准的颁布实施,标志着我国数学教育从理念到方法到内容到评价等纵深领域的根本性变化:彻底摆脱应试教育的束缚,真正实现数学教育为了促进人的全面发展这一终极目标.

《数学教育论》一书,试图从数学、数学教育、数学教学、数学学习、数学教育评价及数学教育研究诸多方面进行全面的审视与思辨.书中既有作者本身对数学教育研究的成果,也很好地吸收了国内外数学教育发展的先进理论与前沿成果,尤其是强调了数学教育理论对实践的指导作用,书中所提供的一些案例成为了颇具说服力的实践材料.值得一提的是,书的最后一章应是了解数学文化的一个很好的窗口.

总的来说,该书内容丰富,资料详实,有独到见解,也颇有新意.



前 言

本书的体系结构由王晓萍教授和我讨论确定,书中融入了两人部分共同研究成果,最后由两人讨论定稿.全书由我执笔.

本书出版之时,正是我从事数学教育教学与研究二十年整.在长期的数学教育教学研究与实践的一线,本人积累了不少对我国数学教育教学的相关经验与想法,产生了一些关于我国数学教育理论发展的心得与见解,这些结果均反映在我所主持的相关课题的研究论文中.1999年,我与廖六生(已故)老师合作主持省级课题“面向21世纪高师数学专业人才培养模式的研究”(湘教通[1999]175号);2002年我主持校级课题“教师数学观对学生数学学习行为的影响”;2003年我主持省级课题“高师院校数学学科教学论课程与国家数学课程标准的整合研究”(湘教发[2003]98号);2006年我主持校级重点课题“义务教育数学课程标准的理论与实践”;2007年我主持省级教改课题“(市)级中学数学骨干教师培养如何适应新课程改革的理论与实践研究”(湘教通[2007]230号),其间还参与了部分其他同志主持的课题研究工作.这些课题的研究所得,在本书的相关章节有所体现.

除了课题研究的原因,另一个经历是碰上了我国具有历史意义的数学课程改革.1999年,义务教育国家数学课程标准研制工作开始启动,我有幸参与了湖南省由赵雄辉教授组织的相关调查、座谈、交流等研讨活动;2003年我又参与了由教育部师范司举办的高等院校中学数学学科教学论教师国家级培训班学习,系统地听取了普通高中数学课

程标准研制组成员王尚志教授、张英伯教授、李文林教授、刘兼教授等人关于高中数学课程内容的改革意见。可以说,20世纪80年代以来我国基础教育数学课程改革的自始至终,我都在以一个参与者的身份关注、感受、学习、领会、宣传、调查、实践这一改革。自改革实施以来,我一直为高师院校数学专业学生讲解、培训数学课程标准理念,指导毕业生毕业前的中学数学教育实习实践,并承担郴州市中学数学骨干教师培训。2007年,湖南省高中数学课程改革正式实施,我被郴州市教育局聘请为郴州市高中数学课程改革专家,具体指导郴州市高中数学课程改革工作。这些经历,也成为写作本书的重要原因。

关于本书的构思与策划,得益于2002年与2006年我两次在母校湖南师范大学脱产进修访问的机会。这使得我暂时缓解了平时忙碌的日常教学工作,有了较充分的思考问题、学习提高的自由时间,尤其是在2006年积累了大量的相关资料素材,为本书的写作奠定了较扎实的基础。在学习访问期间,我参加了多次全国性的数学教育会议,接触了国内一些数学及数学教育专家,他们有龚升先生、梅向明先生、严士健教授、张楚廷教授、张奠宙教授、宋乃庆教授、涂荣豹教授、李求来教授、沈文选教授、王光明教授、曹一鸣博士等。向专家的请教、听专家的报告及专家的指导给了我很多启示、鼓励、自信,这些是我写作本书的精神力量和外在动力。借此向他们表示崇高的敬意和深深的谢意。

二

以《数学教育论》作为书名,旨在系统地阐述我国数学教育发展的历程、数学教育改革的状况、数学教育研究的成果以及对数学教育的理性思辨。本书侧重于从观察的视角、思考的层面、发展的眼光审视数学教育,强调理论观点的明晰和对理论观点的争鸣,从“观”中发现,在“观”中思索与实践,寄希望于获得既有一定的理论价值又能指导具体实践的观点,于是各章节均以“……观”为标题。

关于数学教育,先要问数学是什么,如何去正确地认识数学?第一章“数学观”试图回答这一问题。不论是实践研究还是理论研究,都已表明数学观对数学教育产生了一定的影响;其次,关于数学的教育,

还需要问教育是什么,如何正确认识数学教育?第二章“数学教育观”阐述了数学教育领域的相关问题和对数学教育的一些看法.第三章“数学教学观”、第四章“数学教师观”、第五章“数学学习观”应属于数学教育中的具体问题,但因其内容的独立性、理论与实践的针对性,尤其是面对数学新课程改革理念的时效性,出于便于阅读和现实指导性作用的考虑,单独成章,不至于在体系上有考虑不周全的问题.第六章“数学教育评价观”应是本书体系中不可缺少的部分,数学教育理念的转变必然引起并促使评价在各个具体环节的变化,评价要适应改革的发展.第七章“数学教育研究观”则从学术研究的视角讨论了数学教育研究的相关问题.第八章“数学及数学教育的一些重大事项”从体系上看似乎有些不紧密,但从数学教育的文化特性方面,作为数学及数学教育中的重大事项或常识,其文化价值的教育意义是不言而喻的.所以不论从体系上还是从阅读上,都是合适的.

三

数学教育问题是重要的、复杂的、动态变化的,要将数学教育中的问题看得清、把得准、谈得深、悟得透、论得全,需要博古通今的能力,需要有深厚的数学素养和良好的教育素养,拙著还难以达到,本人之水平还难以达到,心有余而力不足.尽管如此,我还是尽我的全力,利用所有可能的时间,耗用可能承受的精力,潜心论著,其间包含着我所付出的勤劳与艰苦!

值得一提的是,这种付出,除了对得住自己的工作与事业以外,也为了了却自己的心愿:一是以本书回报养育我的已七十余岁高龄但仍在田间劳作的伟大的母亲,她不识一字却明辨事理,劳苦一生,不求回报;二是以本书鼓励我可爱的儿子,他聪明懂事,学习努力,希望他学有所成,健康成长,早日成才.

在撰写本书的过程中,参阅了大量的文献资料,吸收了同行专家的许多研究成果,引用或改编了一些案例,这些基本上在书中都作了对应注明,在此,特向上述作者们表示深深的谢意!

同时,要感谢湖南省重点建设学科带头人、湘南学院教务处长王

晓萍教授对于本书的指导、合作和给予学科经费资助;感谢湘南学院数学系领导及同事对于本书出版的支持与帮助;还要感谢我的学生范凌、欧阳君、周燕春、彭霞、樊喜武等人对本书的资料收集、打印、校对等所做的工作。

本书的出版,特别感谢湖南师范大学出版社周玉波社长,莫华老师的大力支持和热情帮助.由于水平的原因,《数学教育论》所论及的问题究竟其新意、深度、价值如何,我自己难有多少把握.书中不足之处肯定存在,恳请读者提出批评指导建议.

骆洪才

2008年5月

目 录

第一章 数学观	(1)
第1节 如何认识数学的本质	(2)
第2节 数学是抽象的	(8)
第3节 数学模式观	(16)
第4节 数学演算观	(21)
第5节 数学文化观	(26)
第6节 数学应用观	(30)
第7节 中小学数学教师与学生应具备的数学观	(36)
第8节 数学观的层面分析	(41)
第二章 数学教育观	(47)
第1节 数学教育概述	(48)
第2节 我国数学教育的发展	(50)
第3节 数学教育目的与数学课程标准	(65)
第4节 国际数学教育改革	(72)
第5节 现代数学教育思想	(78)
第6节 教育数学与数学教育观	(98)
第三章 数学教学观	(113)
第1节 正确认识数学课程与数学教材	(114)
第2节 充分理解数学课程改革内容	(117)
第3节 数学思想方法的教学	(135)

第4节	数学探究教学	(145)
第5节	现代信息技术手段与数学教学	(154)
第6节	数学教学应关注情感	(162)
第7节	注重数学课程资源的开发	(167)
第8节	数学教学艺术	(171)
第9节	数学教学效率	(185)
第10节	审视数学教学	(195)
第四章	数学教师观	(220)
第1节	数学教师的素质要求	(221)
第2节	数学教师的角色定位	(229)
第3节	数学教师类型规范	(234)
第4节	数学教师专业化	(241)
第5节	数学教师在职教育	(247)
第五章	数学学习观	(263)
第1节	学习的理论	(264)
第2节	理解性学习	(279)
第3节	合作学习	(289)
第4节	研究性学习	(297)
第5节	在“做”中学习	(305)
第6节	数学情境与提出问题学习	(314)
第7节	数学概念学习研究	(320)
第8节	数学学习情绪分析	(332)
第9节	数学学习效率	(340)
第10节	基于《标准》的数学学习观的认识与研究	(344)
第六章	数学教育评价观	(352)
第1节	对数学教育评价的认识	(353)
第2节	数学学习评价	(358)
第3节	数学教学评价	(367)
第七章	数学教育研究观	(378)
第1节	数学教育研究概述	(379)

第2节	数学教育研究相关问题	(383)
第3节	数学教育研究方法	(387)
第4节	数学教育研究观点与评述	(397)
第5节	数学教育研究步骤与规范	(401)
第6节	重大的数学教育理论与实验研究	(406)
第八章	数学及数学教育的一些重大事项	(408)
第1节	国际数学家大会	(409)
第2节	国际数学教育大会	(415)
第3节	国际数学奥林匹克	(418)
第4节	悖论与数学危机	(425)
第5节	数学基础三大学派	(433)
第6节	主要数学奖	(439)
第7节	20世纪重大数学创新及21世纪数学问题	(455)
第8节	中国——21世纪数学大国	(461)
参考文献		(466)



第一章 数学观

- 如何认识数学的本质
- 数学是抽象的
- 数学模式观
- 数学演算观
- 数学文化观
- 数学应用观
- 中小学数学教师与学生应具备的数学观
- 数学观的层面分析



第1节 如何认识数学的本质

一、数学是什么

对于数学是什么这一本质问题,数学家、数学哲学家们至今一直没有一个统一的结论,争论的焦点在于经验主义与理性主义两个方面,即数学是经验的还是演绎的?尽管如此,各自不同的观点获得了不同的发展,或者相互对立的观点在相互靠近.总之,人们对数学的认识逐渐澄清了,认识的角度更宽了,认识的层面更丰富了,认识的方法更科学了,一定程度上促进了数学的发展.归纳起来,有以下一些观点:

数学史上最早讨论数学本质的是古希腊哲学家柏拉图,他在《理想国》中提出了数学是处于从感性认识到理性认识的一个阶梯,是一种理智认识,第一次触及了数学的本质问题;毕达哥拉斯把“数”看成万物的本源,认为数学研究的对象与内容就是“数”;亚里士多德把数量区分为离散的和连续的;笛卡儿把数量解释为“顺序”和“度量”,他们的观点是:数学是研究数量的科学.英国哲学家洛克建立了唯物主义经验论,表达了数学经验论观点.德国数学哲学家莱布尼兹阐述了唯理论的数学哲学观,认为数学属于推理真理,否认数学知识具有经验性.德国哲学家康德为了克服唯理论与经验论的片面性,认为数学是“先验综合判断”.逻辑主义把数学等同于逻辑,罗素称数学是恒同于逻辑的学科.形式主义认为数学是一串没有实际内容的且在逻辑上又不互相矛盾的符号,他们倾向于认为数学是一门演绎科学. Whitehead 称数学是研究一切类型的形式的、必然和演绎推理的科学, Hilbert 称数学是无实在含义的形式游戏.拉卡托斯为了避免数学演绎的片面性,提出数学是一门拟经验科学.直觉主义认为数学是纯粹心智的构造.布尔巴基学派把数学定义为研究结构的科学.英国数学家怀特海说:数学是从模式化的个体作抽象的过程中对模式进行的研究.苏联数学家亚历山大洛夫把数学看成关于与内容相脱离的形式和关系的

科学. 数学家冯·诺依曼曾坚持形式主义的数学观, 后来他认为数学思想来源于经验. 美国数学家 R·柯朗指出“数学是什么”这个问题, 不能通过哲学概括、语义学定义或者新闻工作所特有的迂回说法来作出令人满意的回答, 他认为数学的基础是逻辑和直觉、分析和推理、共性和个性. 美国数学会在 1994—1995 年的国家政策报告中指出: 数学是一门研究度量、形式、图形和变化的学科. 数学教育家波利亚指出: 数学有两个侧面, 一方面它是欧几里得式的严谨科学, 从这个方面看, 数学像是一门系统的演绎科学; 但另一方面, 创造过程中的数学, 看起来却像是一门试验性的归纳科学. 集合论创始人康托认为数学的本质在于它的自由^①. 牛津词典解释: 数学是空间与数字的学科. 比较经典的是恩格斯对数学的定义: 纯数学的研究对象是现实世界的空间形式和数量关系.

我国数学家对数学本质的研究也没有停止过, 丁石孙先生认为数学的研究对象是客观世界和逻辑可能的数量关系和结构关系; 关肇直先生认为数学是研究现实世界中量的科学; 徐利治先生认为数学是研究广义的量(即模式结构形式)的学科; 林夏水先生认为作为经验的数学知识是通过解决问题而积累的, 而提出问题和解决问题需要计算, 对数学的一般方法(公式、原理、法则等)的概括不仅需要计算(包括使用计算机), 也需要采用观察、实验和演绎方法, 因此“演”(演绎)与“算”(计算和算法)能概括数学的本质, 数学是一门演算科学.

二、认识数学本质的方法

1. 从数学观的角度认识数学本质

数学观是人们对数学的总体看法, 它有不同的表现形式, 人们对它也有不同的回答, 从而不同的人可以有不同的数学观. 因而对数学本质的认识就是对数学的总体看法的一种表现. 或者说, 数学的本质是数学观的重要表现.

数学观通过数学研究方法表现出来, 数学观影响或决定着数学研

^① M·克莱茵. 古今数学思想. 上海: 上海科学技术出版社, 1981: 105

究方法.如20世纪初数学家在如何解决数学基础危机的问题上,由于各自的数学观不同,发展出数学基础的三大学派:以罗素为代表的逻辑主义,以希尔伯特为代表的形式主义,以布劳威尔为代表的直觉主义.一般来说,从事数学工作的人,如果认为数学是一门演绎的科学,他可能不会去关心实践提出的数学问题;如果认为数学是一门经验的科学,他可能很少关注数学的逻辑问题;如果认为数学是一门经验性与演绎性辩证统一的科学,他就既会关注实践提出的数学问题又会关心数学的逻辑问题.所以数学观对从事数学研究的人来说是非常重要的.

数学教育的任务则是把正确的数学观融入到数学教学中去,培养学生正确的数学观.

2. 从数学实践活动中认识数学的本质

首先,数学作为对客观世界的一种认识,它与其他科学认识一样,遵循着实践、认识,再实践、再认识的认识规律,数学发展的动力和源泉是实践.^①

其次,数学中的实践就是实际的数学活动,它包括从事数学研究以形成新的数学知识,构建新的数学理论体系,还包括数学的应用领域,如数学与人类文化、与自然科学实践、与数学研究本身的联系及数学的教与学活动.相对于数学知识积累的分析,数学中的实践着眼于实际数学活动,不再把数学的发展看成不容置疑的绝对真理在数量上的简单积累,而是把实际数学活动作为一种人类的创造性活动.在以往的认识数学本质的过程中,人们注重了数学研究这种创造性活动的结果及其在数学知识和方法层面的贡献,却往往对数学研究活动本身探讨不够充分,所以把数学实践作为认识数学的本质的重要方法.正如柯朗和罗宾斯(H. Robbins)所指出的:不论对专家来说,还是对普通人来说,唯一能回答数学是什么这个问题的,不是哲学,而是数学本身中活生生的经验.

另外,在认识数学本质的过程中,人类文化史中自然科学屡屡促

^① 林夏水.数学本质·认识论·数学观.数学教育学报,2002(3):28

进数学的重大进展的现象不容回避. 辛格(J. Synge)指出:正是在对自然界的研究中,才产生了(而且完全可能继续产生)比数学家们闭门造车创造出来的结构复杂得多的问题. 把应用数学的活动置于整个人类认识活动中来考察,正是通常人们认识数学本质所欠缺的. 比如,在人们寻找完美数的过程中,第五个完美数(33550336)的发现与第四个完美数(8128)的发现相隔一千多年,第六个完美数(8589869056)的发现距第五个完美数的发现相隔了50年,欧几里得以他敏锐的眼光和数学天赋发现完美数是形如 $2^n - 1$ 的数,而且猜测当 n 与 $2^n - 1$ 同为素数时, $2^n - 1$ 是完美数. 于是问题转化为寻找形如 $2^n - 1$ 的素数(称为默森数),至今寻找到的最后一个默森数是 $2^{86243} - 1$,共有两万多位,要用二十多页纸才能写完,更不用说判断其为素数有多难. 上述的数学发现的结果很难用经验或逻辑作出结论,只能说是数学实践活动的结果.

3. 从不同的历史阶段认识数学的本质

毋庸置疑,对数学本质的认识依赖于数学发展的不同历史阶段,数学起源于物体个数、长度、田土面积的计算,从而数学的最初时代表现为一种经验知识,这是经验说法的时代背景. 当欧几里得建立了数学史上第一个公理体系时,出现了演绎法. 至于先验论说法,则是数学从纯经验性向形式性过渡时期的一种观点,可以认为是对公理性的一种力不从心的表述. 现代计算机的应用,则促进了(计算)数学的发展,使得人们开始认识到,数学不是纯演绎的,算法与演绎都重要,从而数学是演算的科学的观点自然产生.

所以如果要给数学的本质下一个定义,必然是对过去的数学的概括,未来的数学则需要实践的不断检验,对数学本质的认识既随着数学的发展而发展,也随着人们的实践水平和认识水平的不断提高而深化,它是一个动态的认识过程.

4. 从数学的持续有效性认识数学的本质

数学总是有效的,这是数学家与普通人都接受的事实,也正因为如此,才激励着他们不停地探索数学中隐藏的巨大力量,探索数学与自然的关系,运用数学解决自然中的各种问题. 尽管数学史上出现了