全国成人高等教育规划教材

高等数学学习辅导书

本科使用

第二版

教育部高等教育司　组编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

高等数学学习辅导书

第二版

全国成人高等教育规划教材

高等数学学习辅导书

本科使用

第二版

教育部高等教育司　组编

主编　李心灿

副主编　蔡燧林　徐　兵

编委（以姓氏笔画为序）

计慕然　刘浩荣　刘　晓

吴　满　杨方禄　张魁元

[illegible]佳堂　龚冬保　谢　鹏

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

内容提要

本书是与全国成人高等教育规划教材《高等数学》配套的辅导书．各章都分为5部分：教学基本要求；重点；应明确的几个问题：指出知识背景、地位、作用及知识结构；思考题分析：引导学员掌握概念的要素、性质、特点，分析、诠释教材中的思考题；范例解析：分析讲解教材中典型习题，指出使用计算方法的条件，解题中易出现的错误．本书既是与教学同步的辅导书，又是阶段复习指导书，有助于使“无疑者须教有疑，有疑者却要无疑”，帮助学员掌握知识框架，理出知识脉络，培养学员分析问题、解决问题的能力．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学学习辅导书：成人本科/李心灿主编．—2版．—北京：高等教育出版社，2003.7
ISBN 7-04-011958-7

Ⅰ．高…　Ⅱ．李…　Ⅲ．高等数学-高等教育：成人教育-自学参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第037485号

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-64054588
社　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　址	http://www hep edu cn
总　机	010-82028899		http://www hep com cn
经　销	新华书店北京发行所		
排　版	高等教育出版社照排中心		
印　刷	化学工业出版社印刷厂		
		版　次	1999年10月第1版
开　本	850×1168　1/32		2003年7月第2版
印　张	11.375	印　次	2003年7月第1次印刷
字　数	280 000	定　价	15.60元

策划编辑　徐　可
责任编辑　胡乃冏
封面设计　张　楠
版式设计　胡志萍
责任校对　朱惠芳
责任印制　孔　源

前　言

本书是与全国成人高等教育规划教材《高等数学》配套的学习辅导书.

本书按教材章次对应编写.每章所包含的内容及编写意图:"教学的基本要求"及其"重点",是为了便于学员更主动地去学习;各章所提出的"应该明确的几个问题"及"思考题分析",是为了使"无疑者须教有疑,有疑者却要无疑",有助于学员理出知识的脉络、掌握知识框架,理解该章的主要概念、理论和方法;"范例解析"是为了有助于学员明确解题的思路、方法及解题时应该注意的有关问题,从而提高解题的能力.凡标有*号的思考题和范例不作基本要求.

本书既是与教学同步的学习辅导书,又是阶段复习的指导书,也是学员不见面的辅导教师.它有助于使学员对高等数学这门课程的基本概念、基本理论、基本方法有更全面、深刻地理解和掌握,有利于培养学员分析问题、解决问题的能力.

本书第一版和第二版的编写和出版,自始至终得到了高等教育出版社有关领导及该社原数学编辑室胡乃冏主任、张华副主任及高教分社徐刚副社长的重视,并给予了大力支持和帮助;天津大学齐植兰教授认真审阅了第一版全部书稿,并提出了不少宝贵意见;第一版的责任编辑文小西编审和第二版的责任编辑徐可先生为本书的编辑、出版付出了辛勤的劳动,并提出了诸多好的建议,在此一并致以诚挚谢意.

由于我们水平所限,书中若有不当之处,恳请同仁和读者批评指正.

编　者

2003 年春

目　　录

第一章 函 数

一、教学基本要求

1. 理解函数的概念.

2. 了解函数的有界性、单调性、奇偶性和周期性.

3. 了解反函数的概念,理解复合函数的概念.

4. 熟悉基本初等函数的性质及其图形.

5. 会建立简单实际问题中的函数关系.

二、重点

函数的定义.基本初等函数和初等函数的概念.基本初等函数的性质.

三、应该明确的几个问题

问题 1 高等数学与初等数学划分的依据是什么?

答 通常可以将数学的发展史划分为五个阶段:

第一阶段:数学萌芽时期.这个时期从远古时代起,止于公元前 6 世纪.在这个时期里,逐渐形成了数的概念,产生了数的运算方法,几何有了初步发展.但这个时期的有关知识都是片面的、零碎的.这个时期是算术、几何形成的时期,但它们还没有分开,彼此紧密地交织在一起,也没有形成严格、完整的体系,更主要的是缺乏逻辑性,基本上看不到问题的证明,演绎和推理.

第二阶段:常量数学时期.即"初等数学"时期.这个时期开始于公元前 6 世纪,终止于 17 世纪中叶,延续了近两千年左右.在这个时期,数学已由具体的实验阶段过渡到抽象的阶段,并逐渐形成一门独立的、演绎的科学,在这个时期里,算术、初等几何、初等代数、三角学都已形成独立的分支.现在我国中学数学课的主要内容反映了这个时期的基本成果.

第三阶段：变量数学时期.即“高等数学”时期.这个时期以17世纪中叶笛卡儿的解析几何诞生为起点，终止于19世纪中叶.第三阶段与第二阶段的主要区别在于：第二阶段是用静止的方法研究世界的某些规律.而第三阶段是用运动的、变化的观点来研究事物的变化和发展规律.现在我国高等理工科院校中高等数学课程的主要内容反映了这个时期的主要成果.

第四阶段：近代数学时期.这个时期始于19世纪中叶，止于20世纪40年代.在这个时期里，数学的研究对象被推广，并引起量的关系和空间形式在概念本身的重大突破，产生了非欧几何，数理逻辑，分析中产生了新理论、新方向，出现了函数逼近论、实变函数、复变函数等新学科.

第五阶段：现代数学时期.这个时期以20世纪40年代电子计算机的发明为标志而开始的.在这个时期，应用数学学科形成并发展.另一方面，数理逻辑、函数论、微分方程等学科向着更抽象，更综合的方向发展，并出现了许多新的分支学科.特别是数学的理论和方法跟电子计算机相结合，产生了许多新技术.

我们所讲的“高等数学”课程包括空间解析几何、微积分、微分方程等.所谓“初等”与“高等”之分是依惯例而形成的，并没有严格的划分标准.

问题2 我们的教材中对函数的概念采用了“依赖关系”的定义，而高中数学教材对函数的概念采用了“集合对应”的定义，这该怎样解释？“理解函数概念”应该达到什么要求？

答 函数是一个变量对另一个(或多个)变量的依赖关系的抽象模型.函数概念是数学中的重要概念之一.微积分学是研究函数的学科.了解函数的发展史有助于解释上面的问题.函数的发展可以分为四个时期：

第一时期为17世纪初叶以前，其特点是用文字描述来表示函数.

第二时期为17世纪中、下叶，其特点是把函数当作曲线来

研究.

第三时期为 18 世纪,其特点是将解析表达式定义为函数.

第四时期为 19 世纪初叶之后,这个时期给出了函数的明确的近代定义:"若变量 x 在允许范围内的每一个确定的值,变量 y 按照某个确定的规则有唯一的值与之对应,则称 y 为 x 的函数,记为 $y=f(x)$."我们称之为"依赖关系"定义.我国初中数学教材中普遍使用这一定义.目前我国高等理工院校的高等数学教材中也多采用"依赖关系"形式的函数定义.

19 世纪 70 年代集合理论问世之后,函数又被定义为集合间的对应关系:"设 A,B 为两个集合,如果按照某种对应法则 f,对于集合 A 中的任何一个元素,在集合 B 中都有唯一的元素和它对应,那么,这样的对应叫做集合 A 到集合 B 的映射,又称为函数."我们称之为函数的"集合对应"定义,一些"集合对应"论拥护者指出"依赖关系"的函数定义的提法不严密,对于变量而言,必须是随某个过程而变,它不能脱离过程而"自变",因此"依赖关系"的定义中含有不明确的因素.而"集合对应"的函数定义则无需依赖"过程",从而消除了"依赖关系"定义中的不明确因素.然而到了 20 世纪初期,一些数学家指出"集合对应"函数定义中所指出的"对应"一词也有不明确的因素,进而提出了"序偶"形式的函数的新定义.到了 20 世纪 60 年代,一些数学教科书采用了"序偶"形式的函数的新定义.

目前我国高中教材中关于函数的定义则采用了上述"集合对应"定义.部分高等学校的教科书也采用"集合对应"定义函数.从数学的严格性来说,两种定义都有不明确的因素.但这并不意味着"依赖关系"的函数定义不好.事实上它有易于理解,便于应用等许多优点.这也是目前国内外数学教科书中仍使用"依赖关系"的函数定义的主要原因.

教学基本要求指出"理解函数的概念",要达到这一点,应该明确函数定义的两个要素.

问题 3 函数定义的两个要素是什么？

答 “如果自变量 x 在允许范围 X 内任取一个数值时，变量 y 按一定的规则总有确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的函数，常记为 $y=f(x)$.”我们称之为函数的“依赖关系”定义. 这个定义的关键特征为：

——x 的允许范围，即函数的定义域；

——对应规则，即函数的依赖关系.

可以说函数概念有两个基本要素：定义域、对应规则.

只有当两个函数的定义域与对应规则完全相同时，才能认为它们是同一个函数.

读者仔细分析教材就可以发现，“对应规则”是本章的一条知识线，它串起了许多概念. 由于函数的定义中并没有限制“对应规则”与 y 的取值特点，因此可能出现：

(1) 当自变量 x 的值变动时，变量 y 的取值并不一定随 x 的变化而变化，y 可能总取一个值.

如 $y=3$ 表示不论 x 取什么值，所对应的 y 的值总是 3，因此它符合函数的定义. 可以说 $y=3$ 是函数. 通常称 $y=c$ 为常量函数.

(2) 函数对应规则的形式没有限制.

① 如果函数对应规则是解析表达式 $y=f(x)$，可称函数为显式形式.

② 如果函数对应规则是方程 $F(x,y)=0$，可称 y 为 x 的隐函数.

③ 如果函数对应规则在自变量的不同范围是由几个不同的解析表达式而表示的，例如

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{当 } x\leqslant 0, \\ x+1 & \text{当 } 0<x\leqslant 1, \\ x^2 & \text{当 } x>1, \end{cases}$$

则称 $f(x)$ 为分段函数. 注意这里不可以说 $f(x)$ 是三个函数,应该说 $f(x)$ 是定义域为 $(-\infty,+\infty)$ 的一个函数,在不同范围它是由三个不同解析表达式来表达而已.

④ 如果对应规则是由表格或图形表示出来,那么常称这种表示为函数的表格法或图形表示法.

⑤ 如果 x 与 y 通过第三个变量 t 而联系起来,如

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \end{cases}$$

则称这种函数关系为参数方程表示的函数.

问题 4 研究函数的单调性、有界性能否离开自变量的范围?

答 不能. 如 $y=x^2$ 当 $x<0$ 时为单调减少函数;当 $x>0$ 时为单调增加函数;在 $(-1,1)$ 内为非单调函数.

同样, $y=x^2$ 在 $(0,1)$ 内为有界函数,在 $(0,+\infty)$ 内为无界函数.

如果说函数 $f(x)$ 为单调函数或有界函数,而没有指明其范围,通常要理解为是在其定义域内而言.

一般初等函数的有界性与单调性常用函数的导数来判定(留待第四章介绍). 本章只限于利用定义讨论一些简单情形.

四、思考题分析

思考题 1 设 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$,且对于任意的 $M>0$, $f(x)$ 在 $[-M,M]$ 上为有界函数,那么 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是否一定为有界函数?

分析 例如,考察 $f(x)=x^2$,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$,对于任意的 $M>0$, $f(x)=x^2$ 在 $[-M,M]$ 上为有界函数,但是它在 $(-\infty,+\infty)$ 内为无界函数.

此例表明:"直观想像"的结论并不可靠. 也表明:在有限区间上的结论不能随意推广到无穷区间上.

思考题 2 设 $f(x)$ 为 $[a,b]$ 上的有界函数,试问函数 $f(x)$

在$[a,b]$上的界是否唯一?

分析 注意函数$f(x)$有界性的定义:"若$f(x)$的定义域为D,$X\subset D$,如果存在正数M,使得对于任意的$x\in X$,都满足不等式$|f(x)|\leqslant M$,则称$f(x)$在X上有界."这里对M并没有附加条件.由此定义可知,若$f(x)=\sin x$,设$M_1=1,M_2=2,M_3=3$,对于任意$x\in(-\infty,+\infty)$,总有$|\sin x|\leqslant M_1$,$|\sin x|<M_2$,$|\sin x|<M_3$.于是可以说,$M_1=1,M_2=2,M_3=3$都是$f(x)=\sin x$的界.因此,如果$f(x)$在$[a,b]$上有界,那么它的界不唯一.如果$M>0$为其一个界,则任意$M_1>M$必定为其界.

通常判定函数$f(x)$在$[a,b]$上有界,只要能找到一个界即可.如果说$f(x)$在$[a,b]$上无界,只需对任意给定$M>0$,找出一个$x\in[a,b]$,使$|f(x)|>M$.

思考题 3 是否每一个函数$y=f(x)$都有反函数?

分析 先考察$f(x)=c$,显然其不存在反函数.因此可以说,不是每个函数都存在反函数.

函数$f(x)$在区间$[a,b]$上存在反函数的充分条件是$f(x)$在$[a,b]$上严格单调增加(或减少).但这个定理的证明不属于教学基本要求.本章只须读者了解反函数的概念,知道由$y=f(x)$求其反函数的步骤,会求简单函数的反函数.

思考题 4 若由$F(x,y)=0$确定了y为x的函数,它是否一定可以确定出$y=f(x)$的显式形式?

分析 对于一些复杂的隐函数$F(x,y)=0$,往往不能用显式形式$y=f(x)$表示出来,例如$xy-2^x+2^y=0$.

思考题 5 $y=f(u),u=g(x)$是否一定能复合成y为x的函数?

分析 由复合函数的定义可以将复合函数解释为:若对于x在某一范围内的每一个确定值,u按某规则有一个确定值与之相对应,$u=g(x)$;而对此u的确定值,y按某规则有确定值y与之

相对应，$y=f(u)$，这样就确定了 y 与 x 之间的函数关系，称 y 为 x 的复合函数.

考察 $y=\ln u$，其定义域为$(0,+\infty)$；而 $u=x-\sqrt{1+x^2}$ 的值域为$(-\infty,0)$，即 $u=x-\sqrt{1+x^2}$ 的函数值为负值. u 的定义域为$(0,+\infty)$. 对于任意的 $x\in(-\infty,+\infty)$，$y=\ln u=\ln(x-\sqrt{1+x^2})$都无意义，可知此时 $y=\ln u$，$u=x-\sqrt{1+x^2}$ 不能复合为复合函数.

只有当 $y=f(u)$的定义域与 $u=g(x)$的值域有公共部分时，$y=f(u)$与 $u=g(x)$才能复合成 $y=f(g(x))$.

思考题 6 若函数 $f(x)$和 $g(x)$在(a,b)内无界，问函数 $f(x)\pm g(x)$，$f(x)g(x)$在(a,b)内一定无界吗？

分析 不一定. 例如 $f(x)=\dfrac{1}{\cos x}$，$g(x)=\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内均无界，但 $f(x)-g(x)=\cos x$ 在区间 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内有界. $f(x)=\tan x$，$g(x)=\cot x$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内无界，$f(x)g(x)\equiv 1$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$内有界. 之所以出现这种情况，是因为在做加、减或乘的运算时，将无界的因素消除掉了. 读者不妨举出 $f(x)$与 $g(x)$在(a,b)内无界，而$\dfrac{f(x)}{g(x)}$却有界的例子.

思考题 7 容易知道，若 $f(x)$在其定义域 D 内有界，则对任意的 $A\subset D$，$f(x)$在 A 内亦有界. 现在反过来问，若 $f(x)$在任意的 A 内有界，$A\subset D$，$A\neq D$，$f(x)$在 D 内一定有界吗？

分析 不一定. 例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间$(\varepsilon,1)$内有界，其中 $0<\varepsilon<1$，但 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在$(0,1)$内无界.

思考题 8 设 $f(x)$是偶函数，且 $x>0$ 时 $f(x)=\varphi(x)$. 问

$x<0$时$f(x)=?$

分析 根据偶函数定义,当 $x<0$ 时 $f(x)=f(-x)=\varphi(-x)$.例如,设 $f(x)$是偶函数,且 $x>0$ 时 $f(x)=x^3+1$,则 $x<0$时 $f(x)=f(-x)=(-x)^3+1=-x^3+1$.即

$$f(x)=\begin{cases} x^3+1 & \text{当 } x>0, \\ -x^3+1 & \text{当 } x<0. \end{cases}$$

思考题 9 设 $f(x)$是奇函数,且 $x>0$ 时 $f(x)=\varphi(x)$.问 $x<0$时$f(x)=?$

分析 根据奇函数定义,当 $x<0$ 时 $f(x)=-f(-x)=-\varphi(-x)$.例如,设 $f(x)$是奇函数,且 $x>0$ 时 $f(x)=x^3+1$,则 $x<0$ 时 $f(x)=-f(-x)=-[(-x)^3+1]=x^3-1$.即

$$f(x)=\begin{cases} x^3+1 & \text{当 } x>0, \\ x^3-1 & \text{当 } x<0. \end{cases}$$

思考题 10 设 $f(x)$为奇函数,并且 $f(0)$有定义,为什么说必有 $f(0)=0$? 若 $f(x)$为偶函数,并且 $f(0)$有定义,$f(0)$是否必定为 0?

分析 设 $f(x)$为奇函数,则对于定义域的任意 x,必有 $f(x)=-f(-x)$.以 $x=0$ 代入,有 $f(0)=-f(0)$,从而知必有 $f(0)=0$.若 $f(x)$为偶函数,则 $f(x)=f(-x)$,以 $x=0$ 代入,得 $f(0)=f(0)$,因此 $f(0)$不一定必为 0.事实上,例如 $f(x)=x^2+c$ 是偶函数,$f(0)=c$,c 可以为任意给定的实数.

思考题 11 设 $f(x)$是一个以 T 为周期的周期函数.已知当 $0<x<T$ 时 $f(x)=\varphi(x)$,如何求 $f(x)$在其它区间上的表达式?

分析 我们用例子来说明.设 $f(x)$是一个以 2 为周期的周期函数,且当 $0\leqslant x<2$ 时 $f(x)=x^2$.问当 $5<x<7$ 时 $f(x)=?$ 关键是将区间$(5,7)$上的 $f(x)$转化到区间$(0,2)$上去计算.方法如下:

当 $5<x<6$ 时，$f(x)=f(x-4)$. 令 $x-4=u$，于是转化为 $1<u<2$的 $f(u)$. 由已知条件，有 $f(u)=u^2$，从而有：

$$f(x)=(x-4)^2 \quad (5<x<6).$$

再看当 $6\leqslant x<7$ 时的情形，与以上类似，有

$$f(x)=(x-6)^2 \quad (6\leqslant x<7).$$

于是得到

$$f(x)=\begin{cases}(x-4)^2 & \text{当 } 5<x<6, \\ (x-6)^2 & \text{当 } 6\leqslant x<7.\end{cases}$$

五、范例解析

例 1 在下列各题中，函数 $f(x)$与 $g(x)$是否表示同一函数？为什么？

(1) $f(x)=\ln x^2$, $g(x)=2\ln x$;

(2) $f(x)=\cos^2 x$, $g(x)=1-\sin^2 x$;

(3) $f(x)=\cos x$, $g(x)=\sqrt{1-\sin^2 x}$.

解析 如果两个函数的定义域相同，并且对应法则也相同，则这两个函数是同一函数，否则它们就不是同一函数.

(1) 因为 $f(x)$的定义域为$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，而 $g(x)$的定义域为$(0,+\infty)$，它们的定义域不同，所以 $f(x)$与 $g(x)$是不相同的函数. 但在$(0,+\infty)$内 $f(x)$与 $g(x)$的函数值相同.

(2) 在$(-\infty,+\infty)$上均有

$$\cos^2 x=1-\sin^2 x,$$

即，$f(x)=g(x)$，它们不但定义域相同，并且对应法则相同，所以是同一个函数.

(3) 虽然 $f(x)$与 $g(x)$的定义域都是$(-\infty,+\infty)$，但是 $f(x)=\cos x$，$g(x)=|\cos x|$，它们的对应法则不同所以它们不是同一函数.

例 2 求下列函数的定义域：

(1) $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$；

(2) $y=\frac{1}{\sqrt{16-x^2}}+\lg\sin x$.

解析

(1) 注意到函数 $\arcsin x$ 的定义域为$[-1,1]$.为了使 $y=\arcsin\frac{x-1}{2}$有意义,须保证

$$-1\leqslant\frac{x-1}{2}\leqslant 1,$$

即$-1\leqslant x\leqslant 3$.所以,函数的定义域为$[-1,3]$.

(2) 在第一项中分母是$\sqrt{16-x^2}$,应满足 $16-x^2>0$;在第二项中真数应是正数,$\sin x>0$.为使函数有意义,x 须满足

$$\begin{cases}16-x^2>0,\\ \sin x>0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}-4<x<4,\\ 2k\pi<x<(2k+1)\pi \quad (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).\end{cases}$$

解此不等式组,得

$$-4<x<-\pi \text{ 或 } 0<x<\pi.$$

所以函数的定义域为$(-4,-\pi)\cup(0,\pi)$.

关于求函数的定义域问题,如果函数是由实际问题给出的,则定义域根据实际情况而定;对于一般公式法表达的函数,只须使解析式有意义就可以.通常考虑以下几点：

1. 分母不能为零;

2. 负数不能开偶次方;