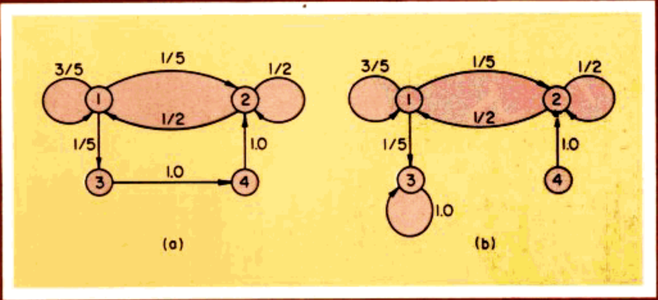
工程或然率

Probability Concepts in Engineering Planning and Design

決策、風險與可靠度

第二冊

原著者：洪華生　鄧漢忠
譯述者：姚致平



科技圖書股份有限公司

序 言

第二册與第一册一樣，都是強調或然率學與統計學在工程方面的應用。主要內容是根據第一册的基本原理，但另增較深入的應用工具，包括統計決策分析，Markov 與鵠候模式，極值統計學，Monte Carlo 模擬術，以及系統可靠度。所需的觀念，在工程問題中亦再度提出並加說明。實際上，本書的主要目的就在邏輯觀念與原理在工程方面的應用。所提供的工具，應可作爲風險估計。控制與管理的基礎，並可在不確定性下，作成正確決策。

書中不同章節中的舉例，常是在說明相同或相似的原理。主要目的是在證明相關觀念的廣泛應用，並提供讀者在應用方面的選擇。

當然，會用到很多的數學技術，例如，Gumbel（1958）的極值統計學；Rubinstein（1981）的Monte Carlo 模擬技術；Raiffa（1970）與Schlaifer（1969）的統計決策分析；以及Rarzen（1962）與Saaty（1961）的Markov 與鵠候過程。但所要特別強調的是工程規劃與設計；目的在於使讀者知道其工程重要性，並使工程師更易瞭解（書中列出各種例題作爲輔助說明）。在第六與第七章中很多有關基本及系統可靠度，是引用科學與技術期刊，所選內容儘量避免不切實用的。

本書內容適合大三、大四或研究所課程。本書第二、三與五章的工程決策與風險分析方面的內容，與第一册第八章相關；其他有關系統可靠度與設計，可利用第四、六及第七章的內容。這兩方面的內容皆需第一册所提的或然率學與統計學方面的基礎。

在準備本書內容的這段時間，我們十分感謝同事與學生，以及忍受第一册內容部分不完整的讀者，尚有多年來不斷給我們建議的Y. K. Wen（文）教授，與協助我們修正及校閱的A. der Kiureghian, M. Shinozuka, E. Vanmarcke，與J. T. P. Yao（姚治平）教授。

很多以前研究所的同學對本書的出版亦出力甚多，特別是R.M. Bennett，C.T. Chu，H. Pearce，J. Pires，I. Sidi，M. Yamamoto，及A. Zerva 等人的協助與貢獻。最後，我們要特別感謝Claudia Cook的耐心與打字工作，以及R. Winburn對資料處理的貢獻。

洪華生
鄧漢忠

工程或然率

目　錄

序　言

第一章　緒　言

第二章　決策分析

第三章　Markov、鵠候與可用性模式

第四章　極值統計學

第五章 Monte Corlo模擬術

第六章 可靠度與根據可靠度的設計

第七章 系統可靠度

附錄A 表

附錄B 非常態變速轉換至獨立常態變數

附錄C　參考書目

第一章　緒　言

1.1　第二册的目的與範圍

本册的主要目的與第一册相同；計包括不確定性的工程問題模式，與它們對系統功能的影響，以及在不確定情況下作設計與決策的基礎。

第一册所說明的基本原理與工具，在本册中將輔以更深入的工具與觀念，計包括統計決策分析、Markov 與鵠候過程，以及極值統計理論。或然率計算所需的數學工具中，必含有Monte Carlo 模擬術(Monte Carlo simulation method)才算完備；書中列有一章專門歸納此類計算過程的基本技巧。工程系統的安全度與可靠度的計算，與設計標準相對應的公式，乃是或然率觀念在工程方面最重要的應用。根據這些目的而發展的結果，分別列在最後兩章。其中最後一章專述所建立技術系統的分析與可靠度。

在面對實際問題時，要特別強調判斷力的重要性、工程判斷力與理論專精程度並無直接關係。但由不確定性的分析與它對決策(decision)、風險(risk)，以及可靠度(reliability)的效應，即可看出判斷力的重要性。此外，判斷力與或然率迫近法(probabilistic approach)一樣都需用或然率或統計項來表示;而專家的判斷力用方便或已定出的項目來表示(這是常事)，但必需換算成適當的或然率項來表示。在本書中亦列有建議所需的方法。

1.2　基本性與重點

各章中的主要影響與重點，可分列歸納如下：

1.2.1　決策分析(第二章)

工程分析最重要的目的是在提供決策時所需的資訊或基礎。工程決策的範圍相當廣泛，由結構用柱的尺寸選擇，主壩的位置選擇，以及分析核子動力是否可作爲安全能源等，都屬於工程決策範圍。不幸，在實際工程決策中難免有不確定性存在，因此，在規劃與設計一工程系統時，不可避免會面臨決策的風險。故在不確定狀況下的決策分析有系統構架（systematic frame-work），將會十分有用。此種決策分析工具，將在第二章中作詳細說明。

在此，又將說明決策樹（decision tree）模式，以說明決策問題所需的觀念。各種選擇與或然率可得出的結果，以及相對應各種選擇的隱含結果。簡言之，決策樹可提供有關系統決策分析資料的整理結果。

在本書中亦將列舉各種工程例題以說明決策分析所涉及的觀念。資訊價值（value-of information）的觀念，是討論在作最後決策前，是否需要再增加資訊。取樣問題，即決定設計所需的參數，與最適取樣計畫的建立，皆可成爲決策問題。

效用理論（utility theory）的基本觀念，可用來量測一般值，這是由一決策不同潛伏結果的相關重要性而起。另外亦將說明較複雜的工程決策問題，包括多目標決策問題。

1.2.2 Markov、鵠候與可用性模式（第三章）

工程系統的執行特徵，通常可分成幾個不同狀態。例如，地震對結構的潛在效應，可依不同破壞程度分成幾個等級；工程包商的財務情況，（用現金流量作爲代表）可能包括幾種不同狀態，包括破產在內。在收費站排隊鵠候的車輛［鵠候長度（queue length）］可視爲收費系統。這些系統的狀態，可依或然率定律而改變。

Markov 鏈是用在分析多狀態系統的或然率模式。首先說明是離散參數齊次Markov 鏈模式的基本概念。其次爲連續參數Markov 鏈的鵠候模式例題。另外將以Poission 抵達（arrivals）導出鵠候系統的穩態鵠候長度或然率。

工程系統的功能，通常可分解成兩種狀態：例如，安全與不安全

狀態，或操作或不操作狀態。此兩種狀態系統的轉換行為的研究，即為可用性問題(availability problem)。系統可用性問題包括維修程式，即定期檢查與修護，此時更新理論(renewal theory)為一有效模式。工程的可用性問題，包括系統在所給時間內有無維修工作。

第三章中將說明Markov程序在工程上的應用，包括鵠候模式與可用性模式。

1.2.3 極值的統計理論(第四章)

實際現象的極值(extreme value)與極值狀況(extremal conditions)，對工程問題十分重要，特別是在工程系統的安全度與可靠度方面，包括自然災害。因此，極值統計理論(statistical theory of extreme values)對考慮風險與可靠度的工程問題十分重要。

很多統計極值理論可在書中得到，但這些數學自然現象有時很難被很多工程師所接受。第四章是在說明統計極值的基本觀念，並強調這些觀念對工程問題的實際重要性。特別是統計極值的漸近性質(asymptotic property)，強調極值理論的重要性，很多應用，都需先瞭解此觀念。因此，漸近性質與相對觀念為該章的重點，同時也將用工程問題實例來說明。

1.2.4 Monte Carlo 模擬術(第五章)

隨着工程系統的複雜性提高，除非有適當的理想化與簡化法，否則所需的分析模式將變得更難；有時即使有了公式，但其解答也不易處理。在這些複雜例中，可經由Monte Carlo模擬術而得出或然率解。Monte Carlo模擬術是得出所給問題的相對應解的重覆過程；各解皆對應所給隨機變數的決定值。Monte Carlo模擬過程的主要內容是，由特定分佈中得出隨機數值，將會說明如何從幾種常見的或然率分佈得出此種隨機數值的方法。

由於Monte Carlo解常需不斷重覆演算過程，因此，若用在複雜問題其成本將會很高。故使用Monte Carlo法需特別留心。通常只在最後才去使用，亦即找不出適當方法時才用。故Monte Carlo

解通常只作或然率計算近似法的驗證。

已有不少個案已用模擬法以及資訊分類法等由Monte Carlo 計算導出。

1.2.5 可靠度與根據可靠度的設計（第六章）

工程系統的安全性與／或功能，爲工程設計的主要目的。爲達到某程度的可靠度，需有適當的計算方法。當其在具不確定條件下進行時，可靠度或安全度往往只能用或然率來表示。事實上，僅在當設計標準爲根據可靠度的或然率量度（probabilistic measures）表示時，才可同時達到安全度與可靠度。

工程可靠度與具重要性，對工程設計的影響已日益深遠。在本章中將會說明最新而實用的方法。同時也用例題說明其在土木工程方面的重要性。安全度與可靠度問題的產生，是因有設計上的不確定性。因此，不確定性的分析自然爲可靠度計算與根據可靠度作設計的中心主題。在該章將廣泛說明所需的統計基礎與方法。

1.2.6 系統可靠度（第七章）

整個系統的可靠度雖爲主要研究主題，但系統可靠度仍爲個別組成元件的可靠度的函數；亦即系統可靠度的決定，必需根據元件的可靠度資料。此外，工程設計亦需根據元件來操作，系統可靠度，再經由分析算出；第七章將列出所需的技巧。

就可靠度的觀點來看，系統可根據多種破壞式來說明。潛在破壞模式，可能由串聯或平行的分量破壞模式所組成（特別對多餘系統）。在一般多餘系統（redundant system）中，多餘部分可能是備用或主動型態，將會影響系統的可靠度與其分析。

在較複雜的系統中，要分辨破壞的潛在模式，可能十分困難，因此需用系統化程序來分析，例如故障樹（fault tree）模式。此外，系統破壞的潛在結果，是決定在特定開始事件之後的連續事件。事件樹（event tree）模式，可用來分析系統所有的潛在結果。故障樹與事件樹模式的應用，將在最後一章中用不同的工程例題來說明。

第二章　決策分析

2.1 緒　言

作技術性決策，是工程規劃與設計必經的一環；事實上，工程師的基本責任就在作決策。通常，此種決策亦需根據含有不確定性(uncertainty)的預測與資料。在此種情況下，風險(risk)是不可避免的。經由或然率的模擬與分析，可適當地評估其不確定性，與其對決策可能產生的影響。根據此方法，可描述各種不同決策可能面臨的風險，若有需要，可採適當步驟以控制或減少可能產生的影響。

工程規劃與設計的決策問題，通常需考慮非技術性因素，例如社會大衆的好惡與是否接受。對環境的影響，甚至政治意義，此時要作最佳決策時，技術考慮並非唯一的因素。同時能考慮到決策問題所有層面的系統構架，稱爲決策模式(decision model)。

本章所要說明的，是決策問題中所涉及的決策模式與分析的元素。單目標與多目標的工程決策問題，都將討論並說明。

2.1.1 簡單風險、決策問題

在作決策分析時，首先應認清並定義決策(或設計)變數[decision(or design)variables]。例如在設計暴雨下水道時，工程師依所需的流量以選擇管道直徑。由於日後暴雨所產生的廢水變化很大，所選管道的流量可能不足。因所發生的或然率與管尺寸有關。故或然率範圍可代替管直徑作爲決策變數。

爲分類各種不同設計，主要函數即以決策變數定義之。此函數通常用貨幣單位以表示總收益或總成本。很明顯，最適設計，是根據可使收益最大或損失最小時的決策變數值。在某些情形中，主函數爲決

策變數的連續函數，而微分法的最大化與最小化計算，可作為最適化的工具。若X_1，X_2，…，X_n代表一組設計變數，當決策變數值能滿足下式時，可得出最適設計（optimal design）。

$$\frac{\partial F(X_1, \ldots, X_n)}{\partial X_i} = 0; \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2.1}$$

其中，$F(X_1, \cdots, X_n)$為主函數。用二次偏微分，可決定式（2.1）得出最大或最小主函數。演算過程詳見下列例題。

【例題 2.1】　（節錄自 Shuler, 1967）

某包商準備投標某一結構工程。根據他的經驗，判斷得標或然率，依他的投標比（bid ratio）R決定，此R值為

$$p = 1.6 - R; \qquad 0.6 \le R \le 1.6$$

其中，R為他的投標價格對估計總成本的比（見圖 E2.1）。

很明顯，此時的決策變數為該商所提出的投標價格B。相對應的主函數則為預期可由該工程獲得的利益

$$\begin{aligned} X &= (B - C)p + 0 \cdot (1 - p) \\ &= \frac{B - C}{C} pC \\ &= (R - 1)pC \\ &= (-R^2 + 2.6R - 1.6)C; \qquad \text{當 } 0.6 \le R \le 1.6 \end{aligned}$$

其中，C為營建物的估計成本。最適決策發生在X對R為最大時；因

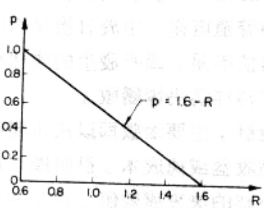


圖 E2.1　投標得標的或然率對投標比值

此，置

$$\frac{dX}{dR} = C(-2R + 2.6) = 0$$

可得 $R = 1.3$ 。因在 $R = 1.3$ 時，$d^2X/dR^2 < 0$，投標比爲 1.3 時 X 爲最大。因此，包商的最適投標價格應爲估計成本的 1.3 倍。

以上的解，假設包商未得標時，無金錢上的收入或損失。假設營建人員怠忽，包商無法獲得此工作，他會有損失 L 。此時主函數應包括預期損失；假設 $L = 0.1C$ ，則預期的總收益爲

$$\begin{aligned} X &= (R - 1)pC - (1 - p)L \\ &= [(R - 1)(1.6 - R) - (R - 0.6) \times 0.1]C \\ &= [-R^2 + 2.5R - 1.54]C \end{aligned}$$

則

$$\frac{dX}{dR} = -2R + 2.5 \equiv 0$$

可得 $R = 1.25$ 。因此，最適投標價格變爲估計成本的 1.25 倍。此時，需有較低投標價格才能使包商增加得標的機會。因此，可減少營建人員的怠忽機會。

【例題2·2】

建造橋墩時，需在河流內設置圍堰（cofferdam）。假設洪水出現率呈 Poisson 分佈，平均出現率爲每年 1.5 次，且每次洪水的高度呈指數分佈，平均高出一般水面 5 ft 。每次圍堰皆被淹沒營造日期延誤所產生的預期損失與排水成本估計約爲 \$ 25,000 。由於洪水高度可事先預測而不影響工人自圍堰內撤走，而工人受困於圍堰內而形成的損失可以忽略。假設圍堰的建造成本爲

$$C_c = C_o + 3000h$$

其中，C_o 包括圍堰基座與控制河流在一般水位所需的工程成本，h 爲圍堰高出水面的高度（ft）。若圍堰使用年限能超過兩年，決定圍堰的

最適高度。

在此，最方便的主函數爲預期金錢損失C_T，此損失包括建造成本與該圍堰在兩年使用期間因洪水所形成的總損失。各次洪水的預期損失爲

$$\begin{aligned} C &= E(\text{損失} \mid \text{越過堰頂})\,P(\text{越過堰頂}) \\ &= 25{,}000 \int_h^{\infty} \frac{1}{5} e^{-x/5}\,dx \\ &= 25{,}000 e^{-h/5} \end{aligned}$$

因此，兩年期間洪水所形成的總損失爲

$$\begin{aligned} C_f &= \sum_{i=0}^{\infty} E(\text{損失} \mid i \text{ 次洪水})\,P(2\text{ 年內 } i \text{ 次洪水}) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot (25{,}000 e^{-h/5}) \frac{3^i e^{-3}}{i!} \\ &= 25{,}000 e^{-h/5} \sum_{i=0}^{\infty} i \frac{3^i e^{-3}}{i!} \\ &= 75{,}000 e^{-h/5} \end{aligned}$$

總預期金錢損失變成

$$\begin{aligned} C_T &= C_c + C_f \\ &= C_o + 3000h + 75{,}000 e^{-h/5} \end{aligned}$$

由上式可看出，h 爲唯一的決策變數。但C_o爲常數，與 h 無關。將 C_T 對 h 作微分，可得最適圍堰高度爲

$$\frac{dC_T}{dh} = 3000 + 75{,}000 e^{-h/5}\left(-\tfrac{1}{5}\right) \equiv 0$$

或

$$e^{-h/5} = \tfrac{1}{5}$$

因此

$$h_{\text{opt}} = 5 \ln(5) = 8.05 \text{ ft}$$

因此，圍堰的最適高度應高出河面約 8 ft。圖 E 2.2 所示，爲用決策

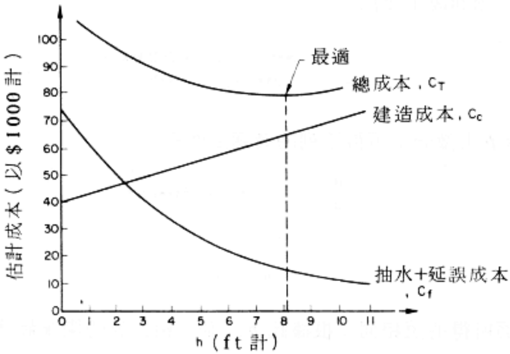


圖 E2.2　圍堰高度超過正常水面高度的成本函數

變數 h 表示的各項成本函數。由圖中可看出，當 h 增加時建造成本增加；而預期的洪水損失會減少。當兩個函數的斜率相等但符號相反時，預期總損失爲最小。此時 C_c 的邊際增量（marginal increase），可由 C_f 的邊際減少來平衡。C_o 值，在圖 E2.2 中假設等於 $40,000，加到各 h 值上，且不會影響最適 h 值的決定。$h = 8.05$ ft 在洪水中會圍堰被淹沒的或然率爲

$$P(\text{洪水位高度} > 8.05') = \int_{8.05}^{\infty} \frac{1}{5} e^{-x/5}\, dx = 0.2$$

換言之，主函數可利用淹沒的或然率 p 來表示。由於建造成本爲 h 的函數，需將 h 表示淹沒或然率 p。根據洪水高度的指數分佈，可證明

$$p = \int_{h}^{\infty} \frac{1}{5} e^{-x/5}\, dx$$

或

$$h = -5 \ln p$$

因此，總預期成本變爲

$$C_T = C_o + 3000(-5 \ln p) + 3(25{,}000)p$$
$$= C_o - 15{,}000 \ln p + 75{,}000p$$

將 C_T 對 p 求微分，可得下列的最適或然率

$$\frac{dC_T}{dp} = -15{,}000 \frac{1}{p} + 75{,}000 \equiv 0$$

由此得

$$p_{\text{opt}} = 0.2$$

此與前面所得的值相同。根據此 p_{opt} 值，相對應的圍堰最適高度（超過常水位）爲

$$\begin{aligned} h_{\text{opt}} &= -5 \ln p_{\text{opt}} \\ &= -5 \ln (0.2) \\ &= 8.05 \text{ ft} \end{aligned}$$

前面所述的第一種方法，可直接得出決策變數的最適值，而第二項公式，可直接得出最適或然率範圍。若要設置多個圍堰，且各個圍堰蒙受不同的洪水分佈，用共同風險性來表示總主函數，可以簡化最適化過程。不論是何種情形，假設決策變數與淹沒或然率間有關連性存在，則兩種方法皆可導出相同結果。

2.1.2 一般決策問題的特性

以上所提的最適化過程的應用，有些限制：主要是主函數必需表成決策變數的連續函數。不幸，很多工程決策問題都無法如此解決。考慮在某排水盆地中，用水壩控制洪水。壩高應爲一決策變數；壩位置的選擇也需決定。此外，其他洪水控制方法，例如疏水渠道、洪水堤、多目標水庫，都是決策分析中尚需加用其他方法來考慮。因此，很難得出用所有決策變數來表示的主函數。

有時，決策不可僅根據手邊所有的資料。若時間允許，最好在下最後決策前，在各種可行設計方法間收集其他資料。工程問題的額外

資料，可從實驗室或由工地測試，或作更深入研究中獲得。由於收集額外資料的方法並不相同，因此，也使可選擇的範圍更爲廣泛。

簡言之，大多數決策問題都需作有系統的分析構架。通常決策分析至少包括下列各項步驟：

(1) 列出所有可行的交替方案，包括可獲得的額外資料。
(2) 列出各方案可能產生的所有結果。
(3) 計算各項可能結果的或然率。
(4) 評估各方案與結果可能產生的影響。
(5) 決策的準則。
(6) 有系統的評估所有交替方案。

在 2.2 節中，將說明考慮以上所有基本因素的決策模式。

2.2 決策模式

2.2.1 決策樹

決策問題的不同考慮因素，可由決策樹（decision tree)佈置來涵蓋。它是由連續的決策所構成，亦即列出各種可行方案；各方案可能產生的結果；相對應的指派（probability assignment）或然率；金錢方面的影響與效用計算等（見 2.4 節）。換言之，決策樹結合了要分析最適方案所需的各項決策分析要素。工程分析與設計的或然率模式，可用來計算可能結果間的相似性，而適當值或效用模式（utility models），可評估各項結果的優點。

圖 2.1 所示，爲具有三種交替方案的決策樹。其中第三方案在作最後決策前，加用實驗收集額外的資料。下列符號皆適用於圖 2.1 中

a_i = 第 i 個方案
θ_j = 第 j 個結果
e_k = 設計來收集額外資料的第 k 個實驗
z_l = 第 l 個實驗結果