课标本

# 教材完全解读

王后雄学案

总策划：熊 辉

## 高中数学 必修5

配人课B版

丛书主编：王后雄
本册主编：曾祥红

导航 丛书系列

中国青年出版社

# 课标本

# 教材完全解读

## 王后雄学案

**高中数学 必修5**

**配人课B版**


丛书主编：王后雄
本册主编：曾祥红
编　　委：王强芳　黄河清
丁仁贵　杜建国
王志明　王　涛
杜　苏　陈　锐
王春勇　胡建平
徐志平　邵爱先
朱少华


导航丛书系列

中国青年出版社

（京）新登字083号

图书在版编目（CIP）数据

教材完全解读：人教B版课标版. 高中数学. 5：必修/王后雄主编.
—3版. —北京：中国青年出版社，2008
ISBN 978-7-5006-6825-1

Ⅰ.教… Ⅱ.王… Ⅲ.数学课—高中—教学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆CIP数据核字（2007）第030182号

策　　划：熊　辉
责任编辑：李　扬
封面设计：木头羊

教材完全解读
高中数学
必修5

中国青年出版社 出版发行

社址：北京东四 12 条 21 号　邮政编码：100708
网址：www.cyp.com.cn
编辑部电话：（010）64034328
读者服务热线：（027）61883306
枝江市新华印刷有限公司印制　新华书店经销
889 × 1194　1/16　12 印张　323 千字
2008 年 5 月北京第 3 版　2008 年 5 月湖北第 3 次印刷
印数：10001 — 15000 册
定价：20.70 元

# 教材完全解读

## 本书特点

基础教育新课标改革已如火如荼地展开，新课程教材助学助考的开发问题已成为人们关注的焦点。应广大读者的要求，我们特邀来自国家新课程改革试验区和国家级培训班的专家编写课标版《教材完全解读》丛书。该系列丛书能帮助学生掌握新的课程标准，让学生能够按照课程理念和教材学习目标要求科学、高效地学习。该书以“透析全解、双栏对照、服务学生”为宗旨，助您走向成功。

这套丛书在整体设计上有两个突出的特点：一是双栏对照，对教材全解全析，在学科层次上力求讲深、讲透、讲出特色；另一个就是注重典型案例学习，突出鲜活、典型和示范的特点。

为了让您更充分地理解本书的特点，挑战学习的极限，请您在选购和使用本书时，先阅读本书的使用方法图示。


**3层完全解读**

从知识、方法、思维三个方面诠释教材知识点和方法点，帮您形成答题要点、解题思维，理清解题思路、揭示考点实质和内涵。

**教辅大师王后雄教授、特级教师科学超前的体例设置，帮您赢得了学习起点，成就您人生的夙愿。**

——题记

### 整体训练方法

针对本节重点、难点、考点及考试能力达标所设计的题目。题目难度适中,是形成能力、考试取得高分的必经阶梯。

### 解题错因导引

“点击考点”栏目导引每一道试题的“测试要点”。当您解题出错时，建议您通过“测试要点”的指向，弄清致错原因，找到正确答案。

### 教材课后习题解答

帮助您弥补课堂上听课的疏漏。答案准确，讲解繁简适度、到位、透彻。

### 最新5年高考名题诠解

汇集高考名题，讲解细致入微，教纲、考纲，双向例释；练习、考试，讲解透彻；多学、精练，效果显著。

### 单元知识整合

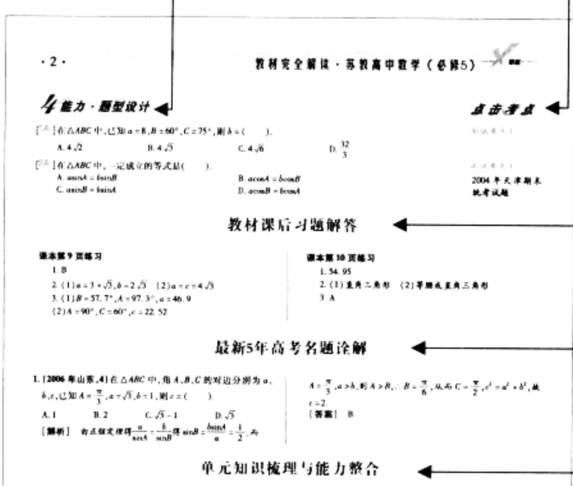
单元知识与方法网络化，帮助您将本单元所学教材内容系统化，形成对考点知识的二次提炼与升华，全面提高学习效率。

### 考试高分保障

精心选编涵盖本章节或阶段性知识和能力要求的检测试题，梯度合理、层次分明，与同步考试接轨，利于您同步自我测评，查缺补漏。

### 点拨解题思路

试题皆提供详细的解题步骤和思路点拨，鼓励一题多解。不但知其然，且知其所以然，帮助您养成良好规范的答题习惯。



# 目 录

# 知识与方法

# 阅读索引

## 第一章 解三角形



## 第二章 数列

## 第三章 不等式

# 学法指津

## ——如何学好人教高中数学必修5(B版)

同学们:

本书是高中数学必修课程的最后一册.在这一册中,我们将学习关于“解三角形”、“数列”、“不等式”的知识.经过我们的努力,前面的四册必修课程,我们已顺利地学完了,那么这一册又该如何学好呢?下面谈几点,供同学们参考.

**一、注重基础**

“扎实的基础知识是知识转化为能力的桥梁”,牢固掌握数学的基础知识是学好数学的前提,是提升能力的瓶颈,所以,我们在这一册的学习过程中,应加强对概念、定理与公式的严密思考、分析,要在理解的基础上记忆,并弄清每一个知识点的来龙去脉和它的各种变形及其应用.

**二、突出对数学思想方法的掌握**

数学是一门思维的科学,是培养我们理性思维的重要载体.所以,我们在学习本册课程过程中要注重学科思想的培养,注重数学思想方法的提炼与渗透,注重一题多思、一题多变、一题多解、横向联系、纵向发散,注重培养和发展自己的数学思维能力.

**三、突出对能力的培养**

在学习过程中要有目的地培养自己的思维能力、运算能力、应用想象能力以及实践能力和创新精神.在学习过程中,逐步学会运用知识解决实际问题的能力.如在学正、余弦定理解决实际问题时,可以培养我们的数学应用意识和创新精神,使我们养成实事求是、扎实严谨的科学态度,学会用数学的思维方式去解决问题、认识世界.

**四、学会应用,增强应用意识**

学会应用包括两个方面:一是基本概念、基本公式、定理在解题中的应用;二是应用所学的数学知识解决生产、生活和实践中的实际问题,只有这样,才会将知识学“活”,真正做到举一反三,学以致用.要做到这一点必须增强我们的应用意识,必须自觉将自己置身于现实社会的大环境中,关心自己身边的数学问题,促使自己在学习和实践中形成和发展数学的意识,加强数学知识在实际中的应用是本册书编排的重要特点之一,如运用正、余弦定理解决实际生活的测量问题,运用数列知识解决生活中的购房贷款,运用线性规划知识解决实际生活中的产品安排、物资调运、合理下料等问题,无不体现了数学知识在实际生活中应用的广泛性和重要性,所以,我们在学习中应关注生活、关注社会,逐步学会运用数学知识分析并加以解决生活中的普遍问题和社会热点问题的能力.

# 第一章 解三角形

## 课标单元知识

本章共分三节内容：正弦定理和余弦定理；应用举例；实习作业. 教材采用由特殊到一般的呈现方式，以直角三角形为例证明了正弦定理. 然后在一般三角形中证明了正弦定理. 再用几何法通过构造直角三角形，利用勾股定理证明了余弦定理. 利用坐标法，借助于三角函数的定义推导出了三角形的面积公式，并通过例题说明解三角形在测量建筑物的高度、求两点间的距离以及计算物体的受力大小和测量角度等方面的应用. 正弦定理、余弦定理揭示了任意三角形边角之间的客观规律，是三角形中实施边角互化的理论依据，同时也是解三角形的重要工具. 正弦定理、余弦定理、三角形在实际问题中的应用是本章的重点，而难点内容是对这两个定理的理解及解决实际问题中的建模问题.

课程标准要求参考：(1)通过对任意三角形边长和角度关系的探索，掌握正弦定理、余弦定理，并能解决一些简单的三角形度量问题.

(2)能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

## 高考命题趋向

(1)新课标在安排本章内容上有两点明显变化：一是正弦定理、余弦定理的推导过程与旧教材相比发生了明显变化，新课标中定理的推导更贴近学生所学习过的知识，推导过程更容易让学生理解和接受；二是加强了正弦定理、余弦定理的应用意识. 解三角形应用举例一节，由原来两个例题扩充到三种类型四个例题十二个习题，体现了新课标的新的理念，有助于强化学生的应用意识，提高解决实际问题的能力. 这也是今后高考命题的趋向.

(2)分析近十年高考试卷，有关三角形求解的内容是每年必考内容，分值在4分到17分之间；试题内容主要涉及两个方面：其一是考查正弦定理、余弦定理及其变式或推论的内容和简单应用，这类题目多见于选择题和填空题，难度不大；其二是以三角形为知识载体，研究三角变换及向量等问题，这类问题不仅要运用正弦定理、余弦定理求解边、角，还要结合三角或向量的运算处理问题，除了在选择题和填空题中出现外，解答题中的中档题也经常出现这方面的内容.

总之，解三角形的内容从总体上看，难度虽然有所降低，但能力要求却越来越高，对本章的学习应立足基础，加强训练，学会建模，提高应用意识和能力.

考试大纲要求：(1)正弦定理和余弦定理

掌握正弦定理和余弦定理，并能解决一些简单的三角形度量问题.

(2)应用

能够运用正弦定理、余弦定理等知识和方法解决一些与测量和几何计算有关的实际问题.

# 1.1 正弦定理和余弦定理

## 1.1.1 正弦定理

### 知识 · 能力聚焦

**1. 正弦定理**

(1)正弦定理

在一个三角形中，各边的长和它所对的角的正弦的比相等，即$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$.

(2)正弦定理的证明

教材中对定理的证明是分锐角三角形和钝角三角形两种情形来证明的，若利用向量知识和平面几何知识，又该如何证明呢？

利用向量知识证明正弦定理.

当△$ABC$是锐角三角形时，过$A$点作单位向量$\boldsymbol{i}$垂直于$AB$，如图1－1－1－1.

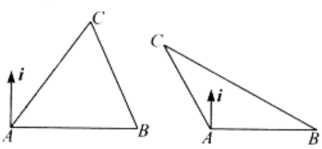


图1－1－1－1

$\because\ \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，$\therefore\ \boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{i}\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})=\boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{AB}+\boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{i}\cdot\overrightarrow{BC}$，$\therefore\ b\cos(90°-A)=a\cos(90°-B)$，得$b\sin A=a\sin B$，得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$.

当△$ABC$为钝角三角形时，类似地得出上述结论.

用平面几何知识证明：

如图1－1－1－2所示，设$O$为△$ABC$的外接圆的圆心，连$BO$并延长交⊙$O$于$A'$，连$A'C$，则$A'=A$或$A'=\pi-A$，$\therefore\ \sin A=\sin A'=\frac{BC}{A'B}=\frac{a}{2R}$，即$\frac{a}{\sin A}=2R$，同理可证$\frac{b}{\sin B}=2R=\frac{c}{\sin C}$. 故有$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$.

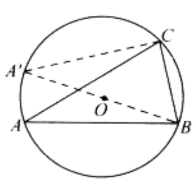


图1－1－1－2

**2. 利用正弦定理解三角形**

(1)解三角形：一般地，我们把三角形的三个角$A$、$B$、$C$和它们的对边$a$、$b$、$c$叫做三角形的元素. 已知三角形的几个元素，求其他元素的过程叫做解三角形.

(2)利用正弦定理可解下列两类型的三角形：

①已知两角及一边，求其余两边；

②已知两边及其中一边的对角，求另一边.

[例] △$ABC$中，(1)$A=30°$，$B=45°$，$a=2$，求$c$；

(2)$A=30°$，$a=\sqrt{2}$，$b=2$，求$B$.

[解析] (1)$\because\ C=180°-(A+B)=105°$，

### 名师诠释

◈[考题1] (1)在△$ABC$中，已知$BC=12$，$A=60°$，$B=45°$，则$AC=$________.

(2006年江苏高考题)

(2)在△$ABC$中，$B=30°$，$C=45°$，$c=1$，求边$b$的长及三角形的外接圆半径.

(2007年黄冈市模拟题)

[解析] (1)由正弦定理知$\frac{BC}{\sin A}=\frac{AC}{\sin B}$，

$\therefore\ AC=\frac{BC\sin B}{\sin A}=\frac{12\times\sin45°}{\sin60°}=4\sqrt{6}$.

(2)已知$B=30°$，$C=45°$，$c=1$，由正弦定理得：$\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$，

所以$b=\frac{c\sin B}{\sin C}=\frac{1\cdot\sin30°}{\sin45°}=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$2R=\frac{c}{\sin C}=\frac{1}{\sin45°}=\frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}$，

$R=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

[点评] 正弦定理揭示了三角形中边与角之间的关系，可利用它进行三角形中的边角关系运算.

◈[考题2] (1)在△$ABC$中，已知$A=45°$，$a=2$，$b=\sqrt{2}$，求$B$；

(2)在△$ABC$中，已知$a=10$，$b=8$，$A=70°$，求$B$；

(3)在△$ABC$中，已知$b=\sqrt{2}$，$c=1$，$B=45°$，求$a$、$A$、$C$.

[解析] (1)根据正弦定理得：$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

$\therefore\ \sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sin45°}{2}=\frac{1}{2}$，

$\because\ b<a$，$\therefore\ B<A$，$\therefore\ B$为锐角，即$B=30°$.

(2)$\because\ b<a$，$\therefore\ B<A$，$\therefore\ B$为锐角，根据正弦定理得$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$，

$\therefore\ \sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{8\times\sin70°}{10}\approx0.752$，$\therefore\ B\approx48.8°$.

(3)$\because\ b=\sqrt{2}$，$c=1$，$B=45°$，

于是由正弦定理得$\sin C=\frac{c\sin B}{b}=\frac{1\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$.

由$b>c$，$B=45°$，可知，$C<B$，$\therefore\ C=30°$.

$\therefore\ A=180°-(30°+45°)=105°$.

再由正弦定理得$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{\sqrt{2}\sin105°}{\sin45°}=\frac{\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，

故$a=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$，$A=105°$，$C=30°$.

又 $\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$，∴ $c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{2\sin75^\circ}{\sin30^\circ}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

(2) 由正弦定理得 $\sin B=\frac{b}{a}\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$，∴ $B=45^\circ$ 或 $135^\circ$.

3. 三角形的有关公式

三角形面积公式：

$$S_\triangle=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}ab\sin C=\frac{abc}{4R}=\frac{1}{2}(a+b+c)r,$$

其中 $r$ 为 $\triangle ABC$ 内切圆半径，$R$ 为外接圆半径.

## 2 方法·技巧平台

4. 正弦定理的活用

正弦定理 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$ 有如下变化公式，它在解题中有着广泛的应用.

(1) $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A}$；

(2) $a\sin B=b\sin A$，$c\sin B=b\sin C$，$c\sin A=a\sin C$；

(3) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$；

(4) $\sin A=\frac{a}{2R},\sin B=\frac{b}{2R},\sin C=\frac{c}{2R}$（其中 $R$ 为三角形的外接圆半径）；

(5) $a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$.

5. 三角形解的个数的讨论

已知三角形的两边和其中一边的对角，不能惟一确定三角形的形状，解决这类三角形问题将出现无解、一解和两解的情况，应分情况予以讨论. 图 1-1-1-3与图 1-1-1-4，即是表示了在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a$、$b$ 和 $A$ 时解三角形的各种情况.

(1) 当 $A$ 为锐角时，

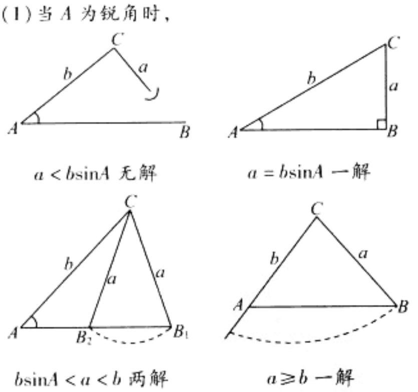



图 1-1-1-3

(2) 当 $A$ 为直角或钝角时，

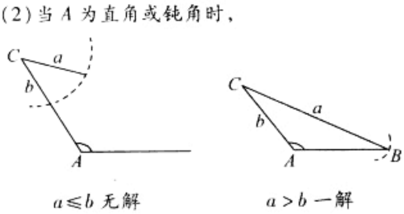



图 1-1-1-4

◈ [考题 3] 在 $\triangle ABC$ 中，若 $A=120^\circ$，$AB=5$，$BC=7$，则 $\triangle ABC$ 的面积________.

（2005 年上海高考题）

[解析] 如图 1-1-1-5 所示，

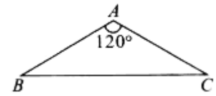



图 1-1-1-5

$\frac{7}{\sin120^\circ}=\frac{5}{\sin C}$，∴ $\sin C=\frac{5\sqrt{3}}{14}$，且 $C$ 为锐角（∵ $A=120^\circ$），

∴ $\cos C=\frac{11}{14}$.

∴ $\sin B=\sin(180^\circ-120^\circ-C)=\sin(60^\circ-C)$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos C-\frac{1}{2}\cdot\sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{11}{14}-\frac{1}{2}\times\frac{5\sqrt{3}}{14}=\frac{3\sqrt{3}}{14}$.

∴ $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot BC\cdot\sin B=\frac{1}{2}\times5\times7\times\frac{3\sqrt{3}}{14}=\frac{15\sqrt{3}}{4}$.

◈ [考题 4] $\triangle ABC$ 中，$a^2\tan B=b^2\tan A$，试判断 $\triangle ABC$ 的形状.

[解析] 只要根据已知条件找到三角形的边或角的关系，就可以确定三角形的形状.

由正弦定理变式，$a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$ 得

$(2R\sin A)^2\cdot\frac{\sin B}{\cos B}=(2R\sin B)^2\cdot\frac{\sin A}{\cos A}$.

∴ $\sin A\cos A=\sin B\cos B$，即 $\sin2A=\sin2B$.

∴ $2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$.

∴ $A=B$ 或 $A+B=\frac{\pi}{2}$.

∴ $\triangle ABC$ 为等腰三角形或直角三角形.

[点评] 正弦定理的变形公式使三角形的边与边的关系和角与角的关系之间的相互转化的功能更加强大，更加灵活.

◈ [考题 5] (1) 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=2\sqrt{2}$，$b=2\sqrt{3}$，$A=45^\circ$，求 $c$、$B$、$C$；

(2) 已知 $\triangle ABC$ 中，$A=60^\circ$，$B=45^\circ$，且三角形一边的长为 $m$，解三角形.

[解析] (1) 由正弦定理得，$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2\sqrt{3}\sin45^\circ}{2\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

∵ $b\sin A<a<b$，∴ 这个三角形有两组解.

∴ $B=60^\circ$ 或 $120^\circ$.

当 $B=60^\circ$ 时，$C_1=180^\circ-(45^\circ+60^\circ)=75^\circ$，

由正弦定理得：$c_1=\frac{a\sin C_1}{\sin A}=\frac{2\sqrt{2}\cdot\sin75^\circ}{\sin45^\circ}=\sqrt{6}+\sqrt{2}$.

当 $B=120^\circ$ 时，$C_2=180^\circ-(45^\circ+120^\circ)=15^\circ$，

由正弦定理得：$c_2=\frac{a\sin C_2}{\sin A}=\frac{2\sqrt{2}\sin15^\circ}{\sin45^\circ}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$，

故 $B=60^\circ$，$C=75^\circ$，$c=\sqrt{6}+\sqrt{2}$ 或 $B=120^\circ$，$C=15^\circ$，$c=\sqrt{6}-\sqrt{2}$.

(2) 依题设得 $C=75^\circ$.

若 $a=m$，由正弦定理得：

$b=\frac{a\sin B}{\sin A}=\frac{m\cdot\sin45^\circ}{\sin60^\circ}=\frac{\sqrt{6}}{3}m$，$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{m\cdot\sin75^\circ}{\sin60^\circ}=\frac{3\sqrt{2}+\sqrt{6}}{6}m$.

若 $b=m$，同理可得 $a=\frac{\sqrt{6}}{2}m$，$c=\frac{\sqrt{3}+1}{2}m$.

若 $c=m$，同理可得 $a=\frac{3\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}m$，$b=(\sqrt{3}-1)m$.

画图时先画已知角 $A$，使未知边 $AB$ 水平，顶点 $C$ 在上边，以 $C$ 为圆心以边长 $a$ 为半径作圆，看与射线 $AB$ 交点的个数，即为三角形解的个数.

当然，也可用代数方法来讨论三角形解的情况，如下：若已知 $a,b,A$，由正弦定理可得 $\sin B=\dfrac{b}{a}\sin A=m$.

(1)当 $\sin B>1$ 时，则这样的 $B$ 角不存在，即三角形无解.

(2)当 $\sin B\leqslant 1$ 时，则在$[0°,180°]$内存在角 $B$，使 $\sin B=m$，但此时三角形不一定有解. 即：

①当 $\sin B=1$ 时，$B=90°$，若 $A<90°$ 时，则三角形有一解；若 $A\geqslant 90°$，则无解.

②当 $\sin B<1$ 时，设满足 $\sin B=m$ 的锐角为 $\alpha$，钝角为 $\beta$，则当 $A+\alpha>180°$ 时三角形无解；$A+\alpha<180°$ 时三角形有解，且当 $A+\beta<180°$ 时有两解，当 $A+\beta\geqslant 180°$ 时有一解.

## 3 创新·思维拓展

### 6. 正弦定理的综合应用

正弦定理的综合应用体现在两个方面，其一：利用正弦定理解决三角形中的综合问题，解决这类问题的关键是在于：充分利用正弦定理的边角关系的相互转化这一功能；其二是正弦定理在实际中的应用，解决这类问题的关键是在实际问题中会构造三角形的模型，画好图形，标出已知的边角，再运用正弦定理来求解.

[例] $\triangle ABC$ 三边各不相等，角 $A$、$B$、$C$ 的对边分别为 $a$、$b$、$c$ 且 $a\cos A=b\cos B$，求 $\dfrac{a+b}{c}$ 的取值范围.

[解析] 将 $\dfrac{a+b}{c}$ 利用正弦定理换成角，再利用角的范围求 $\dfrac{a+b}{c}$ 的取值范围.

$\because a\cos A=b\cos B$，$\therefore \sin A\cos A=\sin B\cos B$，$\therefore \sin 2A=\sin 2B$.

$\because 2A,2B\in(0,2\pi)$，$\therefore 2A=2B$ 或 $2A+2B=\pi$，

$\therefore\quad A=B$ 或 $A+B=\dfrac{\pi}{2}$.

如果 $A=B$，则 $a=b$ 不符合题意，$\therefore\ A+B=\dfrac{\pi}{2}$.

$$\therefore \frac{a+b}{c}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\sin A+\sin B=\sin A+\cos A$$

$$=\sqrt{2}\sin\left(A+\frac{\pi}{4}\right),$$

$\because\ a\neq b$，$C=\dfrac{\pi}{2}$，$\therefore\ A\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 且 $A\neq\dfrac{\pi}{4}$，

$\therefore\ \dfrac{a+b}{c}\in(1,\sqrt{2})$.

[点评] (1)利用正弦定理，可以解决以下两类有关三角形的问题：①已知两角和任一边，求其他两边和一角；②已知两边和其中一边的对角，求另一边的对角（进而求出其他边和角）.(2)已知两边及一边的对角时，三角形的解的情况不确定（见下表）.

| | $A\geqslant 90°$ | $A<90°$ |
|---|---|---|
| $a>b$ | $B$ 是锐角，一解 | $B$ 是锐角，一解 |
| $a=b$ | 无解 | $B$ 是锐角，一解 |
| $a<b$ | 无解 | $b\sin A<a<b$，$B$ 是锐角或钝角，两解；$a=b\sin A$，$B$ 是直角，一解；$a<b\sin A$ 无解 |

◈[考题6] 台风中心位于某市正东方向300km处，正以40km/h的速度向西北方向移动，距离台风中心250km范围内将会受其影响. 如果台风风速不变，那么该市从何时起要遭受台风影响？这种影响持续多长时间？（结果精确到0.1h）

[解析] 如图1-1-1-6，设该市在点 $A$，台风中心从点 $B$ 向西北方向移动，$AB=300$km. 在台风中心移动过程中，当该中心到点 $A$ 的距离不大于250km时，该市受台风影响.

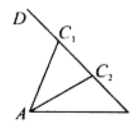


图1-1-1-6

设台风中心从点 $B$ 向西北方向沿射线 $BD$ 移动，该市为位于点 $B$ 正西方向300km处的点 $A$.

假设经过 $t$ h，台风中心到达点 $C$，则在 $\triangle ABC$ 中，$AB=300$km，$AC=250$km，$BC=40t$ km，$B=45°$.

由正弦定理 $\dfrac{AC}{\sin B}=\dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{BC}{\sin A}$ 知，

$$\sin C=\frac{AB\cdot\sin B}{AC}=\frac{300\sin 45°}{250}=\frac{3}{5}\sqrt{2}\approx 0.8485.$$

所以 $C_1\approx 58.05°$，或 $C_2\approx 121.95°$.

当 $C_1\approx 58.05°$ 时，$A=180°-(B+C_1)\approx 180°-(45°+58.05°)=76.95°$，

所以 $BC_1=\dfrac{AC_1\sin A}{\sin B}=\dfrac{250\sin 76.95°}{\sin 45°}\approx 344.4$(km)，

$t_1=\dfrac{BC_1}{40}=\dfrac{344.4}{40}\approx 8.6$(h).

同理，当 $C_2\approx 121.95°$ 时，$BC_2\approx 79.83$km，$t_2\approx 2.0$h，$t_2-t_1\approx 8.6-2.0=6.6$(h).

故约2h后将要遭受台风影响，持续约6.6h.

[点评] 正确地画出几何图形是解决本题的关键.

## 4 能力·题型设计

**点击考点**

[1]在 $\triangle ABC$ 中，角 $A$、$B$、$C$ 的对应边分别为 $x$、$b$、$c$，若满足 $b=2$，$B=45°$ 的 $\triangle ABC$ 恰有两解，则 $x$ 的取值范围是（　　）.

A. $(2,+\infty)$　　B. $(0,2)$　　C. $(2,2\sqrt{2})$　　D. $(\sqrt{2},2)$

测试要点5
2006年浙江十校联考题

[2]在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=8$，$B=60°$，$C=75°$，则 $b$ 等于（　　）.

A. $4\sqrt{2}$　　B. $4\sqrt{3}$　　C. $4\sqrt{6}$　　D. $\dfrac{32}{3}$

测试要点1,2
2006年黄冈模拟题

[3A]根据下列条件,确定$\triangle ABC$有两解的是(　　).

测试要点5　2006年武汉市统考题

A. $a=18,b=20,A=120°$　　B. $a=60,c=48,B=60°$

C. $a=3,b=6,A=30°$　　D. $a=14,b=16,A=45°$

[4A]在$\triangle ABC$中,$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C$,则$\triangle ABC$为(　　).

测试要点4　2006年黄冈中学模拟题

A. 直角三角形　　B. 等腰直角三角形

C. 等边三角形　　D. 等腰三角形

[5B]在$\triangle ABC$中,$a^2\tan B=b^2\tan A$,则$\triangle ABC$的形状是(　　).

测试要点4

A. 等腰三角形　B. 直角三角形　C. 等腰三角形或直角三角形　D. 等腰直角三角形

[6B]根据下列条件解三角形:

测试要点5　2007年春季湖北省部分重点中学联考题

①$A=60°,a=\sqrt{3},b=1$;②$A=30°,a=1,b=2$;③$A=30°,a=6,c=10$;④$A=30°,a=5,c=10$. 其中有惟一解的个数为(　　).

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

[7B]$\triangle ABC$中,$\lg b-\lg a=\lg\sin B=-\lg\sqrt{2}$,$B$为锐角,则$A$的值等于________.

测试要点3　2007年黄冈市统考题

[8A]在$\triangle ABC$中,$A=60°,C=45°,b=4$,则此三角形的最小边是________.　测试要点1、2

[9A]在$\triangle ABC$中,若$A:B:C=1:2:3$,则$a:b:c=$________.　测试要点4

[10A]在$\triangle ABC$中,已知$AB=5,BC=2,S_{\triangle ABC}=4,\angle ABC=\theta$,则$\cos\theta=$________.　测试要点3

[11B]已知$\triangle ABC$的面积$S=6$,外接圆半径$R=3$,内切圆的半径$r=1$,则$\sin A+\sin B+\sin C$的值是________.　测试要点3、4

[12C]地球与金星的公转轨道分别是直径为$2.98\times10^8$km和$2.14\times10^8$km的近似圆,圆心为太阳. 某时刻,地球和金星的连线与地球和太阳的连线成18°的角,如图1-1-1-7,求此时地球与金星之间的距离(地球、金星、太阳均视为点,结果保留3个有效数字).　测试要点6

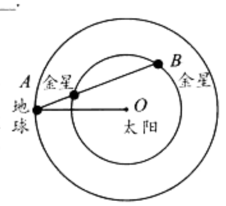



图1-1-1-7

## 教材课后习题解答

**练习A(P6)**

1. (1) $C=180°-(A+B)=90°$,由正弦定理得,$b=\frac{a\sin30°}{\sin60°}=\sqrt{3}$,$c=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{3}$.

(2) $C=180°-(A+B)=60°$,$a\approx5.9$,$c\approx7.2$.

(3) 由正弦定理得,$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{1}{2}$,因为$a>b$,所以$B=30°$,则$C=180°-(A+B)=90°$,$c=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{3}$.

(4) 由正弦定理得,$\sin A=\frac{a\sin B}{b}=\frac{3\sqrt{2}}{4}>1$,所以三角形无解.

(5) 由正弦定理得:$\sin B=\frac{b\sin C}{c}\approx0.8049$,因为$c>b$,且$C$为锐角,所以$B\approx53.6°$.

$A=180°-(B+C)=51.4°$,$a=\frac{c\sin A}{\sin C}\approx3.9$.

2. 证明:在$\triangle ABC$中,由正弦定理有:

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

$\therefore\ a=2R\sin A,b=2R\sin B,c=2R\sin C$.

故右边$=\frac{2R\sin A+2R\sin B}{2R\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}=$左边.

$\therefore$ 原式成立.

**练习B(P6)**

1. 由正弦定理得,$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{2}{3}$,因为$b>a$,且$A=30°$,所以$B\approx41.81°$或$B\approx138.19°$.

当$B\approx41.81°$时,$C=180°-(A+B)=108.19°$;

当$B\approx138.19°$时,$C=180°-(A+B)=11.81°$.

2. 证明:在$\triangle ABC$中,若$a>b$,由正弦定理知,$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}>1$,$\sin A>\sin B$.

根据函数$y=\sin x,x\in[0,\pi]$的图象如图1-1-1-8所示,关于$x=\frac{\pi}{2}$对称,有$B<A<\pi-B$或$\pi-B<A<B$(舍去),从而$A>B$.

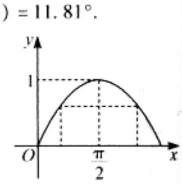



图1-1-1-8

反之,若$A>B$,则$A<\pi-B$,有$\sin A>\sin B$.

$\therefore\ a>b$,故得证.

3. 证明:由正弦定理有$\sin A=\frac{a}{2R},\sin B=\frac{b}{2R},\sin C=\frac{c}{2R}$.

$$\therefore\quad \frac{a^2}{4R^2}+\frac{b^2}{4R^2}=\frac{c^2}{4R^2}$$

$\therefore\ a^2+b^2=c^2$,故$\triangle ABC$是直角三角形.

探索与研究见本节中的用平面几何知识证明正弦定理.

# 最新5年高考名题诠解

**1.（2005年江苏高考题）** 在$\triangle ABC$中，$A=\frac{\pi}{3}$，$BC=3$，则$\triangle ABC$的周长为（　　）.

A. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)+3$　　B. $4\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+3$

C. $6\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)+3$　　D. $6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+3$

［解析］　在$\triangle ABC$内，由正弦定理得

$$\frac{AC}{\sin B}=\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}=\frac{3}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\sqrt{3}.$$

$\therefore$　　$AC=2\sqrt{3}\sin B.$

$AB=2\sqrt{3}\sin C=2\sqrt{3}\sin[\pi-(A+B)]=2\sqrt{3}\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right).$

$\therefore$ 周长为 $AB+AC+BC=2\sqrt{3}\left[\sin\left(B+\frac{\pi}{3}\right)+\sin B\right]+3$

$=2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2}\sin B+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos B\right)+3$

$=2\sqrt{3}\cdot\left[\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin B+\frac{1}{2}\cos B\right)\right]+3$

$=6\sin\left(B+\frac{\pi}{6}\right)+3.$

［答案］　D

**2.（2005年上海春季高考题）** 在$\triangle ABC$中，若$\frac{a}{\cos A}=\frac{b}{\cos B}=\frac{c}{\cos C}$，则$\triangle ABC$是（　　）.

A. 直角三角形　　B. 等边三角形

C. 钝角三角形　　D. 等腰直角三角形

［解析］　由正弦定理及题意得

$$\frac{2R\sin A}{\cos A}=\frac{2R\sin B}{\cos B}=\frac{2R\sin C}{\cos C},$$

即　　$\tan A=\tan B=\tan C$,

$\therefore$ $A=B=C$，故选B.

［答案］　B

**3.（2004年上海春季高考题）** 在$\triangle ABC$中，$a$、$b$、$c$分别是$A$、$B$、$C$所对的边，若$A=105°$，$B=45°$，$b=2\sqrt{2}$，则$c=$________.

［解析］　$\because$ $A=105°$，$B=45°$，$\therefore$ $C=30°$.

由正弦定理得 $c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{2\sqrt{2}\sin 30°}{\sin 45°}=2.$

［答案］　2

**4.（2006年湖南高考题）** 如图1－1－1－9所示，$D$是直角$\triangle ABC$斜边$BC$上一点，$AB=AD$，记$\angle CAD=\alpha$，$\angle ABC=\beta$.

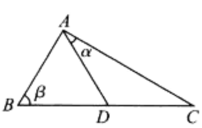



图1－1－1－9

（1）证明：$\sin\alpha+\cos2\beta=0$；

（2）若$AC=\sqrt{3}DC$，求$\beta$的值.

［解析］　（1）如图1－1－1－9，因为$\alpha=\frac{\pi}{2}-\angle BAD=\frac{\pi}{2}-(\pi-2\beta)=2\beta-\frac{\pi}{2}$，所以$\sin\alpha=\sin\left(2\beta-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos2\beta$，

即$\sin\alpha+\cos2\beta=0$.

（2）在$\triangle ADC$中，由正弦定理得$\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{AC}{\sin(\pi-\beta)}$，即$\frac{DC}{\sin\alpha}=\frac{\sqrt{3}DC}{\sin\beta}$，所以$\sin\beta=\sqrt{3}\sin\alpha$.

由（1）知，$\sin\alpha=-\cos2\beta$，所以$\sin\beta=-\sqrt{3}\cos2\beta=-\sqrt{3}(1-2\sin^2\beta)$，即$2\sqrt{3}\sin^2\beta-\sin\beta-\sqrt{3}=0$，

解得$\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$或$\sin\beta=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

因为$0<\beta<\frac{\pi}{2}$，所以$\sin\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，从而$\beta=\frac{\pi}{3}$.

**5.（2006年江西高考题）** 如图1－1－1－10，已知$\triangle ABC$是边长为1的正三角形，$M$、$N$分别是边$AB$、$AC$上的点，线段$MN$经过$\triangle ABC$的中心$G$. 设$\angle MGA=\alpha\left(\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}\right)$.

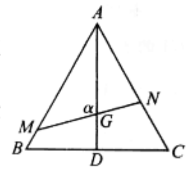



图1－1－1－10

（1）试将$\triangle AGM$、$\triangle AGN$的面积（分别记为$S_1$与$S_2$）表示为$\alpha$的函数；

（2）求$y=\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}$的最大值与最小值.

［解析］　（1）因为$G$为边长为1的正三角形$ABC$的中心，所以$AG=\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$，$\angle MAG=\frac{\pi}{6}$.

由正弦定理得$\frac{GM}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{GA}{\sin\left(\pi-\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}$，

得　　$GM=\frac{\sqrt{3}}{6\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}$.

则 $S_1=\frac{1}{2}GM\cdot GA\cdot\sin\alpha$

$=\frac{\sin\alpha}{12\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}\left(\text{或}=\frac{1}{6(\sqrt{3}+\cot\alpha)}\right)$.

又$\frac{GN}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{GA}{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}$，得$GN=\frac{\sqrt{3}}{6\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}$，

得 $S_2=\frac{1}{2}GN\cdot GA\cdot\sin(\pi-\alpha)$

$=\frac{\sin\alpha}{12\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}\left(\text{或}=\frac{1}{6(\sqrt{3}-\cot\alpha)}\right)$.

（2）$y=\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}=\frac{144}{\sin^2\alpha}\cdot\left[\sin^2\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)+\sin^2\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]$

$=72(3+\cot^2\alpha)$.

因为$\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}$，所以，当$\alpha=\frac{\pi}{3}$或$\alpha=\frac{2\pi}{3}$时，$y$的最大值$y_{max}=240$；当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，$y$的最小值$y_{min}=216$.

# 1.1.2　余弦定理

## 知识 · 能力聚焦

### 1. 余弦定理

余弦定理：三角形任何一边的平方等于其他两边平方和减去这两边与它的夹角的余弦的积的两倍. 即在$\triangle ABC$中，有：

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$.

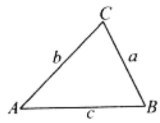



图 1－1－2－1

下面用向量法来证明余弦定理：

如图 1－1－2－1，在$\triangle ABC$中，$AB$、$BC$、$CA$的长分别为$c$、$a$、$b$，

$\because \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$，

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+|\overrightarrow{BC}|^2$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+2|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos(180^\circ-B)+|\overrightarrow{BC}|^2$

$=c^2-2ac\cos B+a^2$.

即　　$b^2=c^2+a^2-2ac\cos B$.

同理可证：　$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$（你能否想到其他的证明方法？）

若令$C=90^\circ$，则$c^2=a^2+b^2$，即为勾股定理，所以余弦定理是勾股定理的推广. 利用余弦定理，主要解决的问题有：①已知三边求三个角；②已知两边和夹角，求第三边及另外两个角. 余弦定理的每一个等式中均含有四个量，它们分别是三角形的三边和一个角，知道其中的三个量，便可求得第四个量.

### 2. 余弦定理的变式运用

余弦定理有如下变形公式：

$$b^2+c^2-a^2=2bc\cos A，a^2+c^2-b^2=2ac\cos B，$$
$$a^2+b^2-c^2=2ab\cos C；$$

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}，\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}，\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

［例］　若以 2，3，$x$为三边组成一个锐角三角形，求$x$的取值范围.

［解析］　由于$x$的大小不确定，故须分情况讨论.

若$x<3$，则 3 对应的角最大，由余弦定理得

$$\cos\theta=\frac{x^2+2^2-3^2}{2\cdot x\cdot 2}=\frac{x^2-5}{4x}，$$

$\because$ 三角形为锐角三角形，$\therefore \cos\theta>0$.

$\therefore x^2-5>0$，$x>0$，$\therefore \sqrt{5}<x<3$.

若$x\geqslant 3$，则边$x$对应的角最大. 同理可得，$2^2+3^2>x^2$，即$x^2<13$，又$x\geqslant 3$，$\therefore 3\leqslant x<\sqrt{13}$.

故$x$的取值范围是$(\sqrt{5},\sqrt{13})$.

## 名师诠释

◈［考题 1］　(1) 已知$\triangle ABC$中，$a:b:c=2:\sqrt{6}:(\sqrt{3}+1)$，求$\triangle ABC$的各角度数.

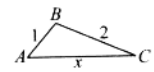



图 1－1－2－5

(2) 在$\triangle ABC$中，如图 1－1－2－5，$AB=1$，$BC=2$，求$C$的取值范围.

［解析］　(1) 令$a=2k$，$b=\sqrt{6}k$，$c=(\sqrt{3}+1)k$，

利用余弦定理，有

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{6k^2+(\sqrt{3}+1)^2k^2-4k^2}{2\times(\sqrt{3}+1)k\times\sqrt{6}k}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$\therefore A=45^\circ$，同样方法可得$\cos B=\frac{1}{2}$，$\therefore B=60^\circ$.

$\therefore$　　$C=180^\circ-45^\circ-60^\circ=75^\circ$.

(2) 设$AC=x$，则$\begin{cases}x<1+2,\\x>2-1,\end{cases}$ 即$1<x<3$.

根据余弦定理，得$x^2+4-4x\cos C=1$.

$\therefore x^2-4x\cos C+3=0$，于是$\Delta=(-4\cos C)^2-4\times 3\geqslant 0$.

$\therefore$　　$16\cos^2C-12\geqslant 0$，$\cos^2C\geqslant\frac{3}{4}$.

因为$C$是$\triangle ABC$中的最小内角，所以$\cos C>0$.

$\therefore \cos C\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$，故$0<C\leqslant\frac{\pi}{6}$.

◈［考题 2］　在$\triangle ABC$中，(1) 若$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C+\sin B\sin C$，求角$A$；

(2) 若$\sin A:\sin B:\sin C=(\sqrt{3}-1):(\sqrt{3}+1):\sqrt{10}$，求最大内角.

［解析］　先用正弦定理将角的关系转化为边的关系，再用余弦定理求解.

(1) $\because$　$\sin^2A=\sin^2B+\sin^2C+\sin B\sin C$，

由正弦定理得$\left(\frac{a}{2R}\right)^2=\left(\frac{b}{2R}\right)^2+\left(\frac{c}{2R}\right)^2+\frac{b}{2R}\cdot\frac{c}{2R}$.

$\therefore a^2=b^2+c^2+bc$，即$b^2+c^2-a^2=-bc$.

$\therefore \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{-bc}{2bc}=-\frac{1}{2}$，$\therefore A=120^\circ$.

(2) 由已知有$\frac{\sin A}{\sqrt{3}-1}=\frac{\sin B}{\sqrt{3}+1}=\frac{\sin C}{\sqrt{10}}$，

$\therefore \frac{a}{\sqrt{3}-1}=\frac{b}{\sqrt{3}+1}=\frac{c}{\sqrt{10}}$.

设$a=(\sqrt{3}-1)k$，$b=(\sqrt{3}+1)k$，$c=\sqrt{10}k$，

$\because \sqrt{3}-1<\sqrt{3}+1<\sqrt{10}$，$\therefore C$为最大角.

$$\therefore \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\frac{(\sqrt{3}-1)^2k^2+(\sqrt{3}+1)^2k^2-10k^2}{2(\sqrt{3}-1)k\cdot(\sqrt{3}+1)k}$$

$$=-\frac{1}{2}.$$

$\therefore$ 最大内角$C=120^\circ$.

## 2 方法·技巧平台

**3. 利用余弦定理解三角形**

利用余弦定理解三角形主要体现在以下几个方面：

(1)已知两边及夹角[如 $a$、$b$ 及 $C(a \geqslant b)$].

解法：$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$，$\sin B = \dfrac{b\sin C}{c}$（$B$ 为锐角），$A = 180° - (B + C)$.

(2)已知三边(如 $a$、$b$、$c$).

解法：$\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$，同样可求出 $B$、$C$.

(3)已知两边和其中一边的对角(如 $a$、$b$、$A$).

解法：一般是建立二次方程求解.

如：在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a$、$b$、$A$，求 $c$.

常利用余弦定理建立关于 $c$ 的一元二次方程 $c^2 - 2bc\cos A + b^2 - a^2 = 0$. 此方程正实数解的个数即为该问题解的个数.

**4. 如何判断三角形的形状**

(1)判断三角形的形状是看该三角形是否为某些特殊的三角形(如锐角、直角、钝角、等腰、等边三角形等).

(2)对于给出条件是边角关系混合在一起的问题，一般地，应运用正弦定理和余弦定理，要么把它统一为边的关系，要么统一为角的关系. 再利用三角形的有关知识，三角恒等变形方法、代数恒等变形方法进行转化、化简，从而得出结论.

(3)常见结论：设 $a$、$b$、$c$ 是 $\triangle ABC$ 的角 $A$、$B$、$C$ 的对边：

①若 $a^2 + b^2 = c^2$，则 $C = 90°$；

②若 $a^2 + b^2 > c^2$，则 $C < 90°$；

③若 $a^2 + b^2 < c^2$，则 $C > 90°$；

④若 $\sin 2A = \sin 2B$，则 $A = B$ 或 $A + B = \dfrac{\pi}{2}$.

[例] 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$ 且 $\sin A = 2\sin B \cdot \cos C$，试确定 $\triangle ABC$ 的形状.

[解析] 首先根据条件 $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$，利用余弦定理求出一个角；再利用另一个条件得到另外两个角的关系即可判断.

解：$\because$ $(a + b + c)(b + c - a) = 3bc$，

$\therefore$ $a^2 = b^2 + c^2 - bc$.

又根据余弦定理得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$.

$\therefore$ $\cos A = \dfrac{1}{2}$，$\therefore$ $A = 60°$.

$\because$ $\sin A = \sin(B + C) = \sin B\cos C + \cos B\sin C = 2\sin B\cos C$.

$\therefore$ $\sin B\cos C - \cos B\sin C = 0$.

即 $\sin(B - C) = 0$，$\therefore$ $B = C$.

$\because$ $B + C = 180° - 60° = 120°$，$\therefore$ $B = C = 60°$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 为等边三角形.

**[点评]** (1)在本例中，先用正弦定理将角的三角函数关系转化为边的关系，再用余弦定理求角，这种方法我们今后会经常用到，应熟练掌握. (2)如何灵活地运用正弦定理、余弦定理呢？关键在于观察、分析已知条件的结构特征，并联想公式运用之. (3)余弦定理 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ 还可改写为 $\sin^2 A = \sin^2 B + \sin^2 C - 2\sin B\sin C\cos A$（正余弦定理），有时运用它求三角函数值时很方便.

◈ **[考题3]** $\triangle ABC$ 中，(1)已知 $a = 2$，$b = 2\sqrt{2}$，$C = 15°$，求角 $A$、$B$ 和边 $c$ $\left(\cos 15° = \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right)$；

(2)已知 $AC = 5$，$BC = \sqrt{5}$，$\cos A = \dfrac{9}{10}$，求 $AB$ 的长.

**[解析]** (1)由余弦定理得：

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C = 4 + 8 - 2 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot \dfrac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} = 8 - 4\sqrt{3}$.

$$\therefore \quad c = \sqrt{8 - 4\sqrt{3}} = \sqrt{6} - \sqrt{2},$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{8 + 8 - 4\sqrt{3} - 4}{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$\therefore$ $A = 30°$，$B = 180° - (A + C) = 135°$.

(2)由余弦定理得：

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A.$$

将已知条件代入有 $5 = AB^2 + 25 - 10 \cdot AB \cdot \dfrac{9}{10}$.

$\therefore$ $AB^2 - 9AB + 20 = 0$，$\therefore$ $AB = 4$ 或 $AB = 5$.

**[点评]** 根据题目的结构特征，灵活地运用正弦定理或余弦定理及它们的变式是解三角形的关键所在. 它不仅是解决有关问题的切入点，更是找到解题捷径的所在.

◈ **[考题4]** (1)在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\lg a - \lg c = \lg\sin B = -\lg\sqrt{2}$，且 $B$ 为锐角，试判断此三角形的形状.

(2)已知方程 $x^2 - (b\cos A)x + a\cos B = 0$ 的两根之积等于两根之和，$a$、$b$ 为 $\triangle ABC$ 的两边，$A$、$B$ 为两内角，试判断这个三角形的形状.

（2007年江苏省部分重点中学联考题）

**[解析]** (1)$\because$ $\lg\sin B = -\lg\sqrt{2}$，$\therefore$ $\sin B = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，又 $\because$ $B$ 为锐角，

$\therefore$ $B = 45°$，$\because$ $\lg a - \lg c = -\lg\sqrt{2}$，$\therefore$ $\dfrac{a}{c} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

由正弦定理得 $\dfrac{\sin A}{\sin C} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$，即 $2\sin(135° - C) = \sqrt{2}\sin C$.

$\therefore$ $2(\sin 135°\cos C - \cos 135°\sin C) = \sqrt{2}\sin C$.

$\therefore$ $\cos C = 0$，$\therefore$ $C = 90°$，$\therefore$ $A = B = 45°$.

$\therefore$ $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形.

(2)设方程的两根为 $x_1$、$x_2$，由韦达定理知：

$$x_1 + x_2 = b\cos A, \quad x_1 x_2 = a\cos B.$$

依题意得 $b\cos A = a\cos B$，

由余弦定理得：$b \cdot \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = a \cdot \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$.

所以 $b^2 + c^2 - a^2 = a^2 + c^2 - b^2$，即 $2b^2 = 2a^2$，即 $a = b$，

所以 $\triangle ABC$ 是等腰三角形.

**[点评]** (1)要判断三角形的形状，其基本思路是寻求边与边之间的数量关系，或求出角的大小. 常用的方法之一是用正弦定理进行代换，暴露出三角形的边角关系，然后作出判断.