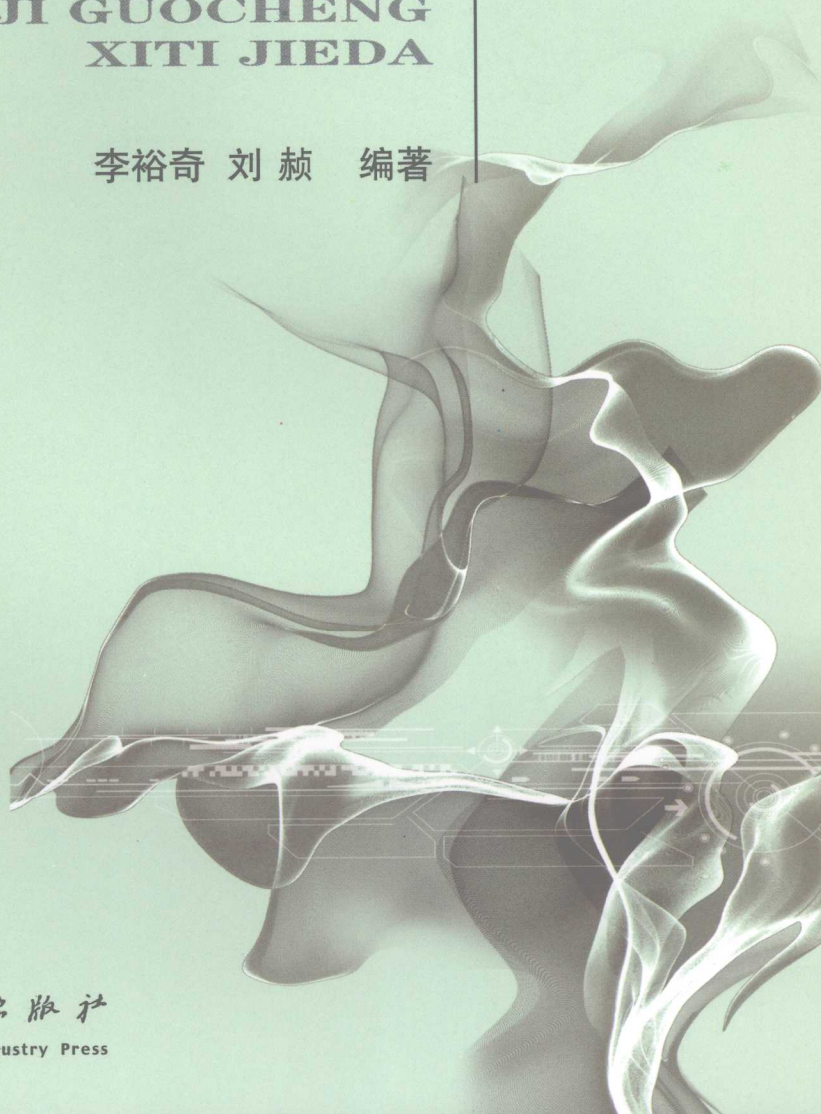


随机过程 习题解答

SUIJI GUOCHENG
XITI JIEDA

李裕奇 刘 赓 编著

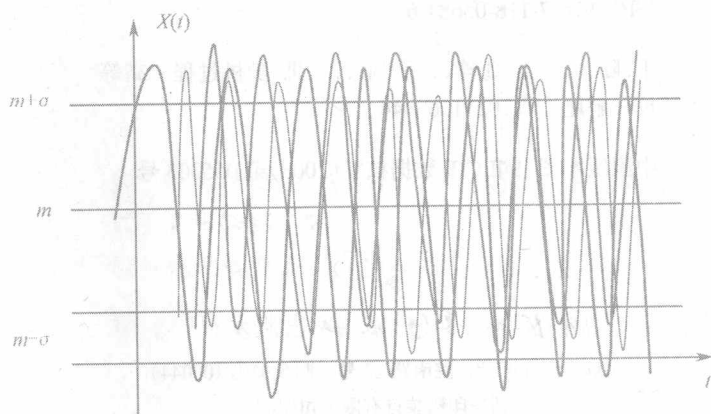


国防工业出版社
National Defense Industry Press

随机过程

习题解答

李裕奇 刘 赅 编著



国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

本书作为国防工业出版社出版的《随机过程》的配套教材,书中的习题大部分出自该书。习题亦按教材内容分为每节的基本练习,每章综合练习与每章自测题三个部分。本书内容包括概率论基础知识、随机过程的基本概念、随机过程的基本概念、均方微积分、泊松过程、平稳过程、马尔可夫过程等随机过程的基本理论与简单应用的有关习题解答,解答详细,推导严谨。

读者只需具备概率论、微积分与线性代数知识,即可顺利阅读本书。

本书可作为高等学校本科生、研究生的教学辅导书或参考书,也可作为相关工程技术人员的参考资料。

图书在版编目(CIP)数据

随机过程习题解答/李裕奇,刘赅编著. —北京:国防工业出版社,2008.6

ISBN 978-7-118-05684-6

I. 随... II. ①李...②刘... III. 随机过程—高等学校—解题 IV. 0211.6-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 055303 号

※

国防工业出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

天利华印刷装订有限公司印刷

新华书店经售

*

开本 710×960 1/16 印张 13½ 字数 258 千字

2008 年 6 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 24.00 元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店: (010)68428422

发行邮购: (010)68414474

发行传真: (010)68411535

发行业务: (010)68472764

前 言

随机过程理论是现代随机数学的一个重要分支,它研究的是动态随机现象的统计规律性,探索的是大千世界中动态数据的奥秘。在通信技术、电子科学、物流运输、金融经济等各个领域及专业方面,已无可争议的呈现出其强大的理论技术的支撑能力。因此对于现代科学技术人才而言,随机过程理论是一门重要的基础理论课程,也是一种重要的应用技术手段。

为了更好地学习和掌握随机过程的基本理论与基本方法,最直接的方法是做练习,通过练习加深对基本概念的理解,学会定理的应用,触发衍生问题的思考。由于随机过程理论的学习有相当的难度,我们根据多年的教学经验,编写了这本习题解答,试图通过我们的努力,能帮助初学者尽快掌握研究、分析与应用随机过程的理论与方法。若能通过本书帮助读者逐步具备分析和解决随机过程问题的能力,并能进一步拓展思维,开阔视野,将是编者心中所愿。

本书作为国防工业出版社出版,李裕奇等编写的《随机过程》一书的配套教材,书中的习题大部分出自该书。习题亦按教材内容分为每节的基本练习,每章综合练习与每章自测题三个部分,尽量按照循序渐进,由浅入深的方式安排习题,以便于各个层次的学习者把握学习要点和基本内容。

本书的出版得益于国防工业出版社、西南交通大学数学系的鼎力支持与帮助,概率统计教研室与统计咨询中心全体同仁的热情参与和支持,谨此一并表示由衷的感谢。

由于编者水平有限,书中难免会有错误与不妥之处,敬请同行与读者批评、指正。

编 者

2008年3月于成都

目 录

第 1 章 概率论基础 1	
1.1 基本内容 1	
1.2 基本要求..... 14	
1.3 习题详解..... 15	
1.3.1 随机变量及其 分布..... 15	
1.3.2 条件分布和条件数学 期望..... 24	
1.3.3 特征函数..... 29	
第 2 章 随机过程的基本概念 35	
2.1 基本内容..... 35	
2.2 基本要求..... 42	
2.3 习题详解..... 42	
2.3.1 随机过程的定义..... 42	
2.3.2 随机过程的分布与 数字特征..... 48	
2.3.3 随机过程的分类..... 53	
2.3.4 综合练习..... 58	
2.3.5 自测题..... 67	
第 3 章 均方微积分 69	
3.1 基本内容..... 69	
3.2 基本要求..... 74	
3.3 习题详解..... 74	
3.3.1 基本练习..... 74	
3.3.2 综合练习..... 81	
3.3.3 自测题..... 86	
第 4 章 泊松过程 88	
4.1 基本内容..... 88	
4.2 基本要求..... 92	
4.3 习题详解..... 92	
4.3.1 泊松过程概念..... 92	
4.3.2 随机质点的到达时间 与时间间隔..... 95	
4.3.3 其它计数过程..... 98	
4.3.4 综合练习 101	
4.3.5 自测题 115	
第 5 章 平稳过程 118	
5.1 基本内容 118	
5.2 基本要求 125	
5.3 习题详解 125	
5.3.1 平稳过程的基本 概念 125	
5.3.2 平稳过程的遍 历性 132	
5.3.3 平稳过程的功率谱密度 与谱分解 137	
5.3.4 综合练习 144	
5.3.5 自测题 162	
第 6 章 马尔可夫过程 165	
6.1 基本内容 165	
6.2 基本要求 171	
6.3 习题详解 171	
6.3.1 马尔可夫过程的 概念 171	
6.3.2 马尔可夫链 175	
6.3.3 切普曼—柯尔莫哥洛 夫方程(C-K 方程)..... 183	
6.3.4 遍历性与平稳 分布 193	
6.3.5 综合练习 197	
6.3.6 自测题 210	

第 1 章 概率论基础

1.1 基本内容

1. 随机试验、随机事件与概率定义

(1) 随机试验: 概率论中的试验是指对自然的观察或为某种目的进行的科学实验。如果此试验能在相同条件下重复进行, 且每次试验的可能结果不止一个, 能够事先明确试验所有可能结果, 而每一次试验之前不能确定哪一个结果会出现。这样的试验就是随机试验。

(2) 样本空间: 随机试验的全部可能结果的集合称为样本空间, 记作 S 。随机试验的每一个可能结果, 即组成样本空间的元素称为样本点, 又称基本事件, 记作 e 。

(3) 随机事件: S 的子集, 即部分样本点的集合称为随机事件。通常用大写字母 A 、 B 、 C 等表示。若事件中至少一个样本点发生时, 称这一事件发生或出现。

(4) 概率的公理化定义: 设 E 为随机试验, S 为其样本空间, 对于 E 的每一事件 A , 赋予一实数 $P(A)$, 若集函数 $P(\cdot)$ 满足

1° 非负性: $\forall A \subset S, P(A) \geq 0$

2° 规范性: $P(S) = 1$

3° 可列可加性: 若 $A_1, A_2, \dots$ 为两两互不相容的随机事件列, 即 $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \phi$, 则有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

则称 $P(A)$ 为随机事件 A 的概率。

(5) 概率的基本性质:

性质 1 不可能事件发生的概率为零, 即 $P(\phi) = 0$

性质 2 (有限可加性): 若随机事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两互不相容, 则

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$$

性质 3 若 $A \subset B$, 则 $P(A) \leq P(B)$, 且 $P(B - A) = P(B) - P(A)$

性质 4 $\forall A \subset S, 0 \leq P(A) \leq 1$

性质5 $\forall A \subset S$, 有 $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

性质6 $\forall A \subset S, B \subset S, P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$, 且

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

2. 古典概型概率计算方法

若随机试验的样本空间中的元素个数只有有限个, 记为 $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, 且每个基本事件 e_i 出现的可能性相等, $i = 1, 2, \dots, n$, 即

$$P(\{e_1\}) = P(\{e_2\}) = \dots = P(\{e_n\}) = \frac{1}{n}$$

则称此试验为古典概型。对于古典概型, 任意一个随机事件 A 的概率计算公式为

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A \text{ 包含的基本事件数}}{S \text{ 中基本事件总数}}$$

3. 条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式

(1) 条件概率定义: 设 A, B 为两事件, 且 $P(A) > 0$, 称

$$P(B | A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$$

为在事件 A 发生条件下事件 B 发生的条件概率。

(2) 乘法公式: 设 $P(A) > 0$, 则有

$$P(AB) = P(A)P(B | A)$$

对于任意的 $n \geq 2$, 设 $P(A_1 A_2 \dots A_{n-1}) > 0$, 则有

$$P(A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n) = P(A_1)P(A_2 | A_1)$$

$$P(A_3 | A_1 A_2) \dots P(A_n | A_1 A_2 \dots A_{n-1})$$

(3) 全概率公式与贝叶斯公式: 设随机试验 E 的样本空间为 S , A 为 E 的事件, 若 $B_1, B_2, \dots, B_n$ 为 S 的一个完备事件组 (或称为 S 的一个划分), 即满足条件

1° $B_1, B_2, \dots, B_n$ 两两互不相容, 即 $B_i B_j = \emptyset, i \neq j, i, j = 1, 2, \dots, n$

2° $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = S$

且有 $P(B_i) > 0, i = 1, 2, \dots, n$, 则

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A | B_i)$$

称为全概率公式。

$$P(B_i | A) = \frac{P(B_i)P(A | B_i)}{\sum_{j=1}^n P(B_j)P(A | B_j)}, i = 1, 2, \dots, n$$

称为贝叶斯公式。

4. 独立性

(1) 两个事件的相互独立性: 设 A, B 是两事件, 如果

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

则称 A, B 为相互独立事件。

(2) 多个事件的相互独立性: 设 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为 n 个事件, 若对于任意 k , $2 \leq k \leq n$ 个事件 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_k}, 1 \leq i_j \leq n, j = 1, 2, \dots, k$, 均有

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \cdots P(A_{i_k})$$

则称 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 为相互独立的事件。

(3) 试验的独立性定义: 对于任意的随机试验, 若每个试验的结果都不依赖于其它试验的结果, 则称试验之间是相互独立的。

5. 随机变量及其分布函数

(1) 随机变量定义: 设 E 为随机试验, 其样本空间 $S = \{e\}$, 若对于每一个 $e \in S$, 均有一个实数 $X(e)$ 与之对应, 这样一个定义在样本空间 S 上的单值实函数

$$X = X(e)$$

称为随机变量, 其值域 $R_X \subset (-\infty, +\infty)$ 。

(2) 分布函数的定义: 设 X 是一个随机变量, x 是任意实数, 函数

$$F(x) = P\{X \leq x\}, \forall x \in R$$

称为 X 的分布函数。

随机变量的分布函数具有以下重要性质:

1° $F(x)$ 是一个不减函数: 即 $\forall x_1 \leq x_2, F(x_1) \leq F(x_2)$

2° $0 \leq F(x) \leq 1$, 且 $F(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0, F(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$

3° $F(x)$ 是右连续函数: 即 $F(x+0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} F(x+\epsilon) = F(x)$

4° $\forall x_1 \leq x_2, P(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$

(3) 离散型随机变量: 若随机变量 X 的可能取值仅有有限个或可列多个, 则称此随机变量为离散型随机变量。离散型随机变量 X 的概率分布 (概率函数) 或分布律 (列) 为

$$P\{X = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

p_k 满足条件

$$1^\circ p_k \geq 0, k = 1, 2, \dots$$

$$2^\circ \sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$$

其中 x_k 为 X 的可能取值。

离散型随机变量的分布函数为

$$F(x) = \sum_{x_k \leq x} P\{X = x_k\}$$

(4) 常见的离散型分布如下:

分布类型	分布律	参数
(0-1)分布	$P\{X=k\} = p^k(1-p)^{1-k}, k=0,1$	$0 < p < 1$
二项分布 $B(n, p)$	$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\dots,n$	$0 < p < 1$
几何分布	$P\{X=k\} = P(1-p)^{k-1}, k=1,2,\dots$	$0 < p < 1$
超几何分布	$P\{X=k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}, k=0,1,2,\dots,r$	$r = \min\{n, M\}$
负二项分布	$P\{X=k\} = C_{k-1}^{r-1} p^r (1-p)^{k-r}, k=r, r+1, \dots$	$r \geq 1,$ $0 \leq p < 1$
泊松分布 $\pi(\lambda)$	$P\{X=k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, k=0,1,2,\dots$	$\lambda > 0$
等可能分布	$P\{X=x_k\} = \frac{1}{n}, k=1,2,\dots,n$	

(5) 连续型随机变量: 如果对于随机变量 X 的分布函数 $F(x)$, 存在非负函数 $f(x)$, 使得 $\forall x \in R$, 均有

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$$

则称 X 为连续型随机变量, 其中函数 $f(x)$ 称为 X 的概率密度函数, 简称概率密度。

随机变量 X 的概率密度具有以下性质:

1° $f(x) \geq 0, x \in (-\infty, +\infty)$

2° $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$

3° $\forall x_1 \leq x_2, P\{x_1 < X \leq x_2\} = F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$

4° 若 $f(x)$ 在 x 处连续, 则 $F'(x) = f(x)$

(6) 常见的连续型分布如下:

分布类型	概率密度	参数
均匀分布 $U(a, b)$	$f(x) = \begin{cases} 1/(b-a) & a < x < b \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$	$a < b$
指数分布 $Z(\alpha)$	$f(x) = \begin{cases} \alpha e^{-\alpha x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\alpha > 0$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ, σ^2
伽玛分布 $\Gamma(\alpha, \beta)$	$f(x) = \begin{cases} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\alpha > 0$ $\beta > 0$
瑞利分布	$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$	$\sigma > 0$
柯西分布	$f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\lambda^2 + (x-\mu)^2}$	$\lambda > 0$ μ

6. 随机变量函数的分布

(1) 离散型随机变量函数的分布:若已知离散型随机变量 X 的分布律为

$$P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$$

$g(\cdot)$ 为连续函数,则 X 的函数 $Y = g(X)$ 亦为离散型随机变量,其可能取值为

$$y_k = g(x_k), k = 1, 2, \dots$$

情况 1: 若 $y_k = g(x_k), k = 1, 2, \dots$ 中任何两个值都有不相等,即当 $x_i \neq x_j$ 时, $g(x_i) \neq g(x_j), i, j = 1, 2, \dots$, 则

$$P\{Y = y_k\} = P\{g(X) = y_k\} = P\{X = x_k\} = p_k, k = 1, 2, \dots$$

情况 2: 若 $y_k = g(x_k), k = 1, 2, \dots$ 中存在两个或两个以上的值相等,如存在 $x_i \neq x_j$ 但 $g(x_i) = g(x_j) = y_i$, 则

$$\begin{aligned} P\{Y = y_i\} &= P\{X = x_i \cup X = x_j\} = \\ &P\{X = x_i\} + P\{X = x_j\} = p_i + p_j \end{aligned}$$

(2) 连续型随机变量函数的分布:

① $g'(x)$ 恒大于 0(或恒小于 0)的情形:已知 X 的概率密度

$$f_X(x) \begin{cases} > 0 & a < x < b \\ = 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中 a 可为 $-\infty$, b 可为 $+\infty$, 且 $y = g(x)$ 在 (a, b) 处处可导, 恒有 $g'(x) > 0$ (或 $g'(x) < 0$), 则 $Y = g(X)$ 的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(h(y)) |h'(y)| & c < y < d \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$$

其中 $x = h(y)$ 为 $y = g(x)$ 的反函数, $c = \min\{g(a), g(b)\}$, $d = \max\{g(a), g(b)\}$ 。

② $g'(x)$ 不恒大于 0, 或不恒小于 0 情形:

1° 先将 Y 的分布函数 $F_Y(y)$ 用 X 的分布函数表示, 即

$$F_Y(y) = P\{Y \leq y\} = P\{g(X) \leq y\} = \int_{g(x) \leq y} f_X(x) dx$$

(注意将区域 $\{X | g(x) \leq y\}$ 分成关于 y 的单值区间)

2° 对 $F_Y(y)$ 求导即得 Y 的概率密度, 即

$$f_Y(y) = F'_Y(y)$$

7. 二维随机变量的定义与分布函数

(1) 二维随机变量: 设 E 为一个随机试验, 样本空间 $S = \{e\}$, $X = X(e)$ 及 $Y = Y(e)$ 是定义在 S 上的两个随机变量, 由它们构成的联合变量 (X, Y) 称为二维随机变量或二维随机向量。

(2) 二维随机变量 (X, Y) 的分布函数定义: 设 (X, Y) 是定义在 S 上的二维随机变量, 对于任意实数 x, y , 二元函数

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad -\infty < y < +\infty$$

称为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数, 或随机变量 X 与 Y 的联合分布函数。

(3) 二维随机变量的分布函数具有以下性质:

1° $F(x, y)$ 是变量 x 和 y 的不减函数, 即

$$\forall x_1 \leq x_2, F(x_1, y) \leq F(x_2, y); \quad \forall y_1 \leq y_2, F(x, y_1) \leq F(x, y_2)$$

2° $0 \leq F(x, y) \leq 1$, 且 $F(x, -\infty) = 0, F(-\infty, y) = 0, F(-\infty, -\infty) = 0, F(+\infty, +\infty) = 1$

3° $F(x, y)$ 关于变量 x 和 y 均是右连续的, 即

$$\forall x, y \in R, F(x+0, y) = F(x, y) = F(x, y+0)$$

4° 对于任意的 $x_1 \leq x_2, y_1 \leq y_2$, 下述不等式成立:

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0$$

(4) 二维离散型随机变量: 若二维随机变量 (X, Y) 的所有可能取值是有限对或可列多对, 则称 (X, Y) 为二维离散型随机变量。

二维离散型随机变量的概率分布为

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, i, j = 1, 2, \dots$$

满足性质

$$1^\circ p_{ij} \geq 0, i, j = 1, 2, \dots$$

$$2^\circ \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$$

其分布函数为

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\} = \sum_{x_i \leq x} \sum_{y_j \leq y} p_{ij}$$

关于 X 与 Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \sum_{x_i \leq x} P\{X = x_i\},$$

$$F_Y(y) = F(+\infty, y) = \sum_{y_j \leq y} P\{Y = y_j\}$$

关于 X 与 Y 的边缘分布律分别为

$$p_{i\cdot} \triangleq P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, i = 1, 2, \dots,$$

$$p_{\cdot j} \triangleq P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, j = 1, 2, \dots$$

(5) 二维连续型随机变量: 设二维随机变量 (X, Y) 的分布函数为 $F(x, y)$, 若存在一个非负可积的二元函数 $f(x, y)$, 使得 $\forall x, y \in \mathbb{R}$, 都有

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv$$

则称 (X, Y) 是二维连续型随机变量, 函数 $f(x, y)$ 称为二维随机变量 (X, Y) 的概率密度, 或随机变量 X 与 Y 的联合概率密度. 概率密度 $f(x, y)$ 具有以下性质:

$$1^\circ f(x, y) \geq 0, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

$$2^\circ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy = 1$$

3° 若 $f(x, y)$ 在点 (x, y) 处连续, 则

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = f(x, y)$$

4° 随机点 (X, Y) 落在平面区域 D 内的概率

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy$$

关于 X 与 Y 的边缘分布函数为

$$F_X(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x f_X(t) dt, F_Y(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^y f_Y(t) dt$$

关于 X 与 Y 的边缘概率密度为

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

(6) 多维正态分布: 二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho)$ 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ \frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho \frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\}$$

$$-\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$$

n 维正态分布的概率密度为

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |C|^{\frac{1}{2}}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})' \mathbf{C}^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu}) \right\}$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'$ 为 n 维实向量, $\boldsymbol{\mu} = (E(X_1), E(X_2), \dots, E(X_n))'$ 为随机向量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的均值向量, $\mathbf{C} = (C_{ij})_{n \times n}$ 为 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 的协方差阵, 即

$$C_{ij} = \text{Cov}(X_i, X_j), i, j = 1, 2, \dots, n$$

n 维随机变量 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 服从 n 维正态分布的充要条件是 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 的任意线性组合 $l_1 X_1 + l_2 X_2 + \dots + l_n X_n$ 服从一维正态分布。

8. 相互独立的随机变量

(1) 相互独立性: 设 $F(x, y)$ 及 $F_X(x), F_Y(y)$ 分别是二维随机变量 (X, Y) 的分布函数及边缘分布函数, 若 $\forall x, y \in R$, 有

$$P\{X \leq x, Y \leq y\} = P\{X \leq x\} P\{Y \leq y\} = F_X(x) F_Y(y)$$

则称随机变量 X 与 Y 是相互独立的。

(2) 离散型随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件是它们的联合分布律等于两个边缘分布律的乘积

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} P\{Y = y_j\}$$

即

$$p_{ij} = p_{i \cdot} \cdot p_{\cdot j}, i, j = 1, 2, \dots$$

(3) 连续型随机变量 X 和 Y 相互独立的充要条件是它们的联合概率密度 $f(x, y)$ 等于边缘概率密度 $f_X(x)$ 和 $f_Y(y)$ 的乘积, 即

$$f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$$

9. 两个随机变量的函数分布

(1) 设随机变量 (X, Y) 的概率分布为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$$

则离散型随机变量和 $Z = X + Y$ 的分布律公式为

$$P\{Z = z_k\} = \sum_i P\{X = x_i, Y = z_k - x_i\} = \sum_j P\{Y = y_j, X = z_k - y_j\}$$

其中 i, j 均为自然数, $\sum_i, \sum_j$ 是对所有满足等式 $z_k = x_i + y_j$ 的有序自然数对 (i, j) 求和。特别地, 当 X 与 Y 相互独立时

$$P\{Z = z_k\} = \sum_i P\{X = x_i\} P\{Y = z_k - x_i\} = \sum_j P\{Y = y_j\} P\{X = z_k - y_j\}$$

(2) 两随机变量之和 $Z = X + Y$ 的概率密度函数为

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z - x) dx$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z - y, y) dy$$

特别地, 当 X 与 Y 相互独立时

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z - x) dx$$

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z - y) f_Y(y) dy$$

(3) 两随机变量之商 $Z = \frac{X}{Y}$ 的概率密度函数为

$$f_z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy$$

(4) 随机变量极值的分布: 设 X, Y 是两个相互独立的随机变量, 称 $M = \max\{X, Y\}$ 为最大值变量, $N = \min\{X, Y\}$ 为最小值变量, 统称为极值随机变量, 其分布函数分别为

$$F_M(z) = F_X(z) F_Y(z), F_N(z) = 1 - (1 - F_X(z))(1 - F_Y(z))$$

它们的概率密度函数分别为

$$f_M(z) = f_X(z) F_Y(z) + f_Y(z) F_X(z)$$

$$f_N(z) = f_X(z)(1 - F_Y(z)) + f_Y(z)(1 - F_X(z))$$

10. 数学期望

(1) 离散型随机变量的数学期望: 设 X 的分布律为 $P\{X = x_k\} = p_k, k = 1,$

2, \dots, 若级数 $\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$ 绝对收敛, 则称

$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k$$

为 X 的数学期望, 亦称为概率均值, 简称均值或期望。

(2) 连续型随机变量的数学期望: 设 X 的概率密度为 $f(x)$, 若积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ 绝对收敛, 则称

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

为连续型随机变量 X 的数学期望, 简称期望或均值。

(3) 随机变量函数的数学期望:

$$Y = g(X) \text{ 为离散型: } E(Y) = E[g(X)] = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k) p_k$$

$$Y = g(X) \text{ 为连续型: } E(Y) = E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$$

(4) 数学期望的基本性质:

性质 1 (线性法则) 设 X 为随机变量, 其期望为 $E(X)$, 对任意常数 a, b , 有

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

性质 2 (加法法则) 设 X, Y 为同类型随机变量, 则

$$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$$

性质 3 (乘法法则) 设 X, Y 为同类型随机变量, 且相互独立, 则

$$E(XY) = E(X)E(Y)$$

性质 4 (柯西—许互兹不等式) 设 X, Y 是两个随机变量, 则

$$|E(XY)|^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$$

11. 方差

(1) 方差的定义: 设 X 是一个随机变量, 若 $E[(X - E(X))^2]$ 存在, 则称其为 X 的方差, 记为 $D(X)$ 或 $\text{Var}(X)$ 或 σ_X^2

即

$$D(X) = \text{Var}(X) = E[(X - E(X))^2]$$

显然 $D(X) \geq 0$, 称 $\sigma_X = \sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ 为 X 的标准差或均方差。

由方差的定义易得

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$$E(X^2) = D(X) + [E(X)]^2$$

(2) 离散型随机变量的方差:

$$D(X) = \sum_{K=1}^{\infty} [x_k - E(X)]^2 p_k$$

$$D(X) = \sum_{K=1}^{\infty} x_k^2 p_k - \left(\sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \right)^2$$

(3) 连续型随机变量的方差:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - E(X)]^2 f(x) dx$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \right]^2$$

(4) 方差的基本性质:

性质 1 对于任意实常数 a, b , 则

$$D(aX + b) = a^2 D(X)$$

性质 2 设 X, Y 为两个相互独立的随机变量, 则

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y)$$

性质 3 (切比雪夫不等式) 设 X 的均值 $E(X) = \mu$, 方差 $D(X) = \sigma^2$, 则

$$\forall \epsilon > 0, P\{|X - \mu| \geq \epsilon\} \leq \frac{\sigma^2}{\epsilon^2}$$

性质 4 $D(X) = 0$ 的充要条件是 X 以概率 1 取常数 $\mu = E(X)$, 即 $P\{X = \mu\} = 1$

12. 协方差、相关系数、矩

(1) X 与 Y 的协方差为

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))]$$

根据方差及协方差的定义可知

$$D(X + Y) = D(X) + D(Y) + 2\text{Cov}(X, Y)$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

(2) 随机变量 X 与 Y 的相关系数为

$$\rho_{XY} = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{D(X)} \sqrt{D(Y)}}$$

(3) 矩:

X 的 k 阶原点矩: $\mu_k = E(X^k)$

X 的 k 阶中心矩: $\sigma_k = E[(X - E(X))^k]$

X 与 Y 的 $k+l$ 阶混合原点矩: $\mu_{kl} = E(X^k Y^l)$

X 与 Y 的 $k+l$ 阶混合中心矩: $\sigma_{kl} = E[(X - E(X))^k (Y - E(Y))^l]$

13. 条件分布

(1) 条件分布律: 设 (X, Y) 是离散型随机变量, 可能取值为 $(x_i, y_j), i, j = 1, 2, \dots$, 其分布律及边缘分布律分别为

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} \triangleq p_{ij}, p_{i\cdot} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}, p_{\cdot j} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}, i, j = 1, 2, \dots$$

则

$$P\{Y = y_j | X = x_i\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}} = \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} = p_{j|i}, j = 1, 2, \dots$$

称为在 $X = x_i$ 条件下 Y 的条件分布律。

$$P\{X = x_i | Y = y_j\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}} = p_{i|j}, i = 1, 2, \dots$$

称为在 $Y = y_j$ 条件下 X 的条件分布律。

(2) 条件分布函数与条件概率密度函数: 若 (X, Y) 是连续型随机变量, 在 $Y = y$ 条件下 X 的条件分布函数为

$$\begin{aligned} F_{X|Y}(x | y) &= P\{X \leq x | Y = y\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P\{X \leq x | y - \epsilon < Y \leq y + \epsilon\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{P\{X \leq x, y - \epsilon < Y \leq y + \epsilon\}}{P\{y - \epsilon < Y \leq y + \epsilon\}} \end{aligned}$$

在 $Y = y$ 条件下 X 的条件概率密度函数为

$$f_{X|Y}(x | y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$$

类似的, 在 $X = x$ 条件下 Y 的条件分布函数为

$$\begin{aligned} F_{Y|X}(y | x) &= P\{Y \leq y | X = x\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} P\{Y \leq y | x - \epsilon < X \leq x + \epsilon\} = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \frac{P\{Y \leq y, x - \epsilon < X \leq x + \epsilon\}}{P\{x - \epsilon < X \leq x + \epsilon\}} \end{aligned}$$

在 $X = x$ 条件下 Y 的概率密度函数为

$$f_{Y|X}(y | x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$$

14. 条件数学期望

(1) 离散型随机变量的条件数学期望: 在 $X = x_i$ 条件下 Y 的条件数学期望为

$$E(Y | X = x_i) = \sum_{j=1}^{\infty} y_{\cdot j} \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}} = \sum_{j=1}^{\infty} y_{\cdot j} p_{j|i}, i = 1, 2, \dots$$