数学证明方法

孙宗明　编著

兰州大学出版社

数 学 证 明 方 法

孙宗明 编著

兰 州 大 学 出 版 社

(甘)新登字第08号

内 容 提 要

本书全面地论述了数学证明方法，从而形成一个完整的体系；通过若干典型的例子，详细地论述了实施数学证明的一般途径；介绍了数理逻辑的基础知识，并利用这些知识再一次全面地论述了数学证明方法。

本书适合高等学校理工科教师、大学生、研究生阅读，也适合中等学校数学教师及数学爱好者阅读。

数 学 证 明 方 法

孙宗明　编著

兰州大学出版社出版发行

（兰州市天水路216号　邮编:730000 . 电话:8883156）

山东农业大学印刷厂印刷

开本：850×1168毫米1/32　　印张：9

1995年8月第1版　　1995年8月第1次印刷

字数：225千字　　印数：1—1500册

ISBN7-311-00813-1/O·108　　定价：8.50元

说　明

本书全面地论述了数学证明方法，对各种方法给以分析、推导、概括，以定理的形式列出并证明，从而形成一个完整的体系。本书还详细地论述了实施数学证明的一般途径，精选了若干典型的例子，说明如何使用各种证明方法。本书还论述了数学证明方法与形式逻辑、数理逻辑等学科的关系，并介绍了一些有关的历史资料。

本书的正文分为六章十五节，节是统一编号的，即：§1至§15。

第一章是全书的引言，包括二节：§1与§2。§1回顾数学证明的发展过程，概观各种数学证明方法。§2为研究数学证明方法作准备，简要介绍概念、判断、推理等形式逻辑的若干内容。

第二章是全书的核心，阐述一般的数学证明方法，包括三节：§3至§5。研究三对六种数学证明方法。§3阐述演绎法和归纳法，§4阐述直接证法和间接证法，§5阐述综合法和分析法。

第三章讨论较一般的数学证明方法，包括二节：§6与§7。§6阐述数学归纳法，§7阐述轮换证法。

第四章讨论特殊的数学证明方法，包括二节：§8与§9。§8阐述循环证法、抽屉证法等若干特殊的证明方法，§9介绍定性证明、构造性证明、初等证明、机器证明等若干知识。

第五章是讨论数学证明方法的继续，阐述如何实施数学证明，包括五节：§10至§14。重点研究如何获得正确的数学证明、选择好的数学证明方法，也研究了如何获得数学命题。

第六章是全书的结语，包括一节：§15。介绍数学证明方法的历史发展，阐明研究数学证明方法的重要意义。

本书前后联系引用的内容均放在方括号内指出，例如：〔§2，定理1〕指§2的定理1，〔§10，例1〕指§10的例题1．凡方括号内不写节的号码者，均指本节的内容．定义、公理、定理、例题诸项目都是各节单独编号的．图形是全书统一编号的．

《命题真值代数与命题逻辑》作为本书的《附录一》，是本书的重要组成部分，包括八节：§1至§8．介绍了数理逻辑的基础知识，并用这些知识完整地论述了数学证明方法．《附录一》自成体系，不需要预备知识，读者由此得到关于数学证明方法的新的认识，加深对于各种证明方法的理解；同时，读者由此体会到数理逻辑的地位和作用，从数学证明方法的角度对数理逻辑产生兴趣．

《参考文献》部分，列出了作者写作本书所使用的主要资料，共30件．值得指出的是，文献〔21〕至〔30〕是作者发表的十篇论述数学证明方法的论文，时间是1981年至1994年．这一事实说明，本书是作者的一个长时间的研究课题，从而，本书的出版使作者感到欣慰．

《名词索引》部分，列出了本书正文与《附录一》中的主要名词，按照汉语拼音的音序排列，每一名词后面的阿拉伯数字是该名词在本书中出现的主要页码．

目 录

第一章　引　　论

§1　数学证明方法概观

方法的重要性

我们从具体例子谈起。

例1　某幼儿园的一个班有25个儿童，他们都是1975年出生的，则他们之中至少有三个是在同一个月出生的。

有人说，这个问题并不困难，只要把这25个儿童的登记表取来，按照他们出生的月份分别登记，就找到三个儿童，他们是在同一个月出生的。

这是一个解决问题的办法，我们称为方法一。方法一对问题的必然性揭示得不够，即：能保证找到同一个月内出生的三个儿童吗？

方法一的出发点是，考察所研究的每一个对象：25个儿童、12个月份，最后得出结论。下面我们将看到，这是完全归纳法的思想方法。这个方法“想”的少，而“做”的多，或者说，“思维”少，而“实践”多。任何理论科学，尤其是纯粹数学，都是在“思维的王国”里周旋的！因此，我们考察第二个解决办法，以表明“思维”在数学中的地位。

下面两个简单例子是显然的。

六个人去一个办公室开会，办公室里只有五把椅子，他们要坐下来开会而又不再去搬椅子，那就至少要有一把椅子供两个人来坐。

六包糖果放到五个抽屉里，那就至少要有一个抽屉放两包糖果。

由此可以概括出所谓“抽屉原则”，见§8。

利用“抽屉原则”来解决上面的问题，就得出方法二：把1975年的12个月份看作12个“抽屉”，25个儿童放到这12个“抽屉”中，如果每个“抽屉”只放两个，那么$2\times12=24$个，放不进25个，所以，至少有一个“抽屉”要放3个，即，至少有3个儿童在同一个月出生。

不难看出，方法二比方法一更令人信服，而且，方法二并不需要25个儿童的登记表，也不需要去作按月份登记的手续，只是多用脑“想”．由下面的例子看出，方法二的重要性并不止于此。

例2　如果两个人是在同一分钟内降生的，则称这两个人是同生的。假定1977年中国人口为8亿，1978年的平均出生率为1%，则在1978年里，至少有16个人是同生的。

这是与〔例1〕性质完全相同的问题，当然可以和〔例1〕一样，用两种方法来解决。

在一个不大的镇上或一个小村子里，都发生过同生的例子，中国之大，一年的时间之长，16个人同生似乎是不成问题的，因此，有人认为〔例2〕是无须证明的。但是，细想起来，这或许是偶然的，因为，查找很多家大医院的出生记录，都可能没有发现16人同生，这样，要使人们相信16人同生这个客观真理，就必须进行证明。

用〔例1〕的方法一来解决〔例2〕，在实际上是行不通的，原因在于：(1)许多1978年出生的儿童，没有详细的出生记录；(2)调集全国的出生记录资料是难于做到的；(3)按照出生的月、日、时、分（如，3月10日17时10分）作统计，工作量十分巨大。就是说，方法一在道理上是可行的，而实际上是不可行的。

方法二　1978年共有$365\times24\times60=525600$分钟，即525600个“抽屉”。

若每个“抽屉”放15人，共放$15\times525600=7884000$人。

1978年共出生$800000000 \times 1\% = 8000000$人。

这样，至少有一个“抽屉”放16人，即至少有16人是同生的。

我们只是在于揭示“至少有16人同生”这一客观真理，并不要求指出哪16个人在哪一分钟同生，也不排斥有的分钟一个人也未降生或有的分钟多于16人同生，因此，方法二的证明是令人确信无疑的。

例3 据人体生理学家的研究结果：一个人的头发不超过500000根。济南市的人口以110万计算，则至少有3个居民有相同根数的头发。

解决这个问题，若应用方法一，则是荒唐的，不现实的！但用方法二证明，却是十分简单的.〔例3〕同样揭示出一个客观真理：济南市至少有3个居民的头发根数相同。

下面的例子将进一步说明，方法一不仅在实践上不可行，而且在理论上也不可行。

例4 有无限多个自然数，它们被7除后均余6。

对于无限多个，逐一考察是办不到的，因此，以完全归纳法思想为出发点的方法一是不能解决问题的。但是，我们看到，6，13，20被7除后均余6，由此出发，应用数学归纳法，证明形如$7k+6$（k为任一自然数）均被7除后余6，这就证明了有无限多个自然数被7除后余6。

中国有一句话：为要善其事，必先利其器。讲的是方法的重要性。上面的例子充分说明了这一点。因此，研究数学证明方法，无疑是十分必要的。

数学证明

证明是一个思维过程，是概念、判断、推理这三种思维形式的综合运用，是引用真实的判断来证实另一判断为真实的过程。

证明作为一个思维过程，并不是只在数学中使用，然而，由

于数学证明自身的特点和作用，使得它在数学中占有特殊的、重要的地位。

数学证明就是由已被承认的数学命题（包括定义、公理、定理）来证实另一数学命题的思维过程。具体表现为：由要证命题的条件出发，引用已被承认的命题，经过前后联在一起的若干逻辑推理（可称为逻辑链），得到要证命题的结论。图示为：

条件——逻辑链——结论。

正确的前提与正确的逻辑推理相结合，必然得到正确的结论。在这里，我们的目的就是要使人们相信这一点。我们将通过对于证明方法本身的分析来达到这一目的。

数学证明最先在几何学这个领域里开始，后来，也是由于几何学领域里的问题所推动，经历了深刻的变化。我们回顾一下这方面的历史，对于认识数学证明是有好处的。

几何学早在数千年之前由于人类生活的需要而产生，在文明古国中国和埃及都有高度的发展。古代埃及，由于尼罗河经常泛滥，冲毁田地的界线，洪水过后，要重新测量，确定田地界线。几何学就起源于这种测地术。“几何学”这一名词，在拉丁文或希腊文中都含有“测地术”的意思。古代埃及还有金字塔那样的宏伟建筑。埃及人积累了十分丰富的几何知识，并有记载这些几何知识的“阿赫美斯手册”。古代希腊在同埃及通商和希腊学者到埃及留学的过程中，学到了埃及的几何学并传到了希腊，几何学在希腊得到了新的发展。由于古代希腊的哲学思想活跃，形式逻辑已确定为一门科学，使得丰富的几何知识向数学理论转化。公元前五世纪，几何学的系统叙述已在希腊出现，至公元前三世纪，欧几里得集前人之大成，写成名为《几何原本》的十三卷巨著。这一人类历史上的科学杰作是如此严密而系统，以至于在非欧几何出现之前，两千多年的时间里，人们原则上已不能也不需要对它再增加什么新的东西，几何学教科书都不过是《几何原

本》的通俗改写而已。

欧几里得在他的《几何原本》中，先列出了一些定义、公理和公设，而后应用逻辑推理，导出了全部定理，造成了一个循序渐进的、前后一贯的、无矛盾的、有根据的、确定的体系，使几何学实现了由感性认识到理性认识的飞跃，数学证明也正是在《几何原本》中被确立和大量使用。欧几里得以后的数学著作，都以《几何原本》为范例去撰写，也以《几何原本》为标准去评价。微积分的产生和发展过程中，之所以受到非难，原因就在于它缺少《几何原本》那样的逻辑基础，柯西等人也正是为了消除这一非难而建立了微积分的严密理论。一句话，《几何原本》是一切纯粹数学著作的典范，就是在今天，在许多方面，仍然具有这种典范的意义。

《几何原本》中的第五公设是平行线公理，这一公理不象其他公理那样显然，因此，自《几何原本》问世以来，许多数学家都企图证明第五公设。然而，这一企图都失败了，直到1826年，俄罗斯数学家罗巴切夫斯基才解决了这一问题。罗巴切夫斯基的做法是：保留其他公理，以第五公设的负判断来代替第五公设，而后进行逻辑推理，从而得出了一系列深刻的结果，也造成了一个循序渐进的、前后一贯的、无矛盾的、有根据的、确定的体系。这就是一种新的几何学：罗巴切夫斯基几何学。只是找不到欧几里得几何那样的现实意义，所以罗巴切夫斯基把它称为“虚拟的几何学”。罗巴切夫斯基几何的产生，使人们看到欧几里得几何的逻辑结构并不是十全十美的。这在数学界引起了极大震动。本来微积分缺少逻辑基础这一事实就使数学家不安，欧几里得基础的动摇更加剧了这种不安，于是，在1850年左右，数学家们对于“数学证明”这件事，似乎陷入了绝望的境地。数学证明应该在怎样的基础上进行？各门数学学科应该建立怎样的基础？如此等等的问题，引起数学家们的深入思考。

在19世纪后半期，数学家们为了使他们的学说建立合适的逻辑基础，开展了一场名为批判的运动，从波尔察诺和柯西开始，由维尔斯特拉斯、戴狄金、康托、皮亚诺等人继续，对算术、代数和数学分析给予了一个公理基础。希尔伯特等人的工作，则给予了欧几里得几何一个更好的公理基础，并确立了数学研究的现代公理法。

希尔伯特把公理系统的结构的基本特性概括为五个方面：(1)基本概念的列举；(2)定义的叙述；(3)公理的叙述；(4)定理的叙述；(5)定理的证明。希尔伯特还提出一个良好的公理系统的三项基本要求：(1)相容性；(2)独立性；(3)完备性。现代数学的各个分支，一般都用公理化方法来建立自己的严谨体系。

上面的叙述，也显示了数学证明的两个最根本的特性：顺序性和严格性。

数学证明的顺序性在于：在证明中，决不使用尚未证明的命题，决不使用尚未引入的概念，就是说，循序渐进，反对任何形式的“跳跃”。

数学证明的严格性在于：按照逻辑推理，一步一步地进行，在任何一个步骤中，都不能也不必要再凭借直觉和默许。一个好的证明就是一个坚实的逻辑链，任何一个环节都是打不开缺口的。证明的语言是准确的，说理是充分的，但又没有多余，使一步一步跟着证明走过来并且明白了的人确信无疑。

数学证明还有两个特性：能动性和广泛性。

数学证明具有特有的能动性。第一，如果说，物理、化学等自然科学的假说，有待于今后的实验去验证，那么，数学的假说（猜想），却可以由人们的逻辑推理去验证，作出肯定或否定的解答。第二，数学证明尽可能地挖掘了数学概念的性质，促进了各个数学概念之间的互相联系和互相鉴定。第三，数学证明可以确定一个问题正确或不正确，分析所提问题的适用范围，许多初看起

来是非数学的问题，有时也可以用数学证明来解决。第四，数学证明对于数学概念的挖掘简直是无止境的，许多初等的古老的数学学科中，只要认真研究，仍然会有许多新的发现。

数学里充满着证明，一门数学理论，一本理论的数学书籍，其中绝大部分是证明。凡受过专门数学训练的人，总是习惯于证明，并且，非经自己证明过的命题，就难于使用，甚至难于相信。数学家的工作和乐趣就在于找到证明。这就是数学证明的广泛性。

客观世界的数学模型或数学理论内部的矛盾运动提供新的数学命题，人们由此得出的数学命题，相当于感性认识；要使数学命题确立为定理，必须进行数学证明，经过证明之后，感性认识上升到理性认识。因此，数学证明是认识论中的飞跃过程。数学证明的哲学意义也就在于此。

常常有人认为数学证明是由理论到理论，而不是由感性认识到理性认识的飞跃过程，这种观点是把感性认识和人们的实践简单化了。实际上，数学自身的矛盾运动，使人们发现新问题，人们由此产生的初步认识应视为感性认识。我们应该承认感性认识的相对性，在一种情况下为理性认识的，在新的更高的发展阶段上就成为感性认识。

数学证明可以是确立一个数学命题的过程，可以是修改一个数学命题的过程，也可以是否定一个数学命题的过程。这些不同的情况充分说明了数学证明在认识论中的意义。

数学证明方法概观

中学生在学习几何图形的性质时，开始接触到数学证明题，通过做数学证明题，由模仿到独立解决，逐步掌握了简单的证明方法。这时，学生们还没有关于各种证明方法的概念。后来，在继续学习几何图形的性质时，遇到了“反证法”、“同一法”等证明方法。在学习“不等式”时，遇到了“分析法”。在学习“排列、组

合、二项式定理”时，遇到了“数学归纳法”。至中学毕业，学生们已经见到并掌握了不少数学证明方法。

在继续进行数学学习和阅读数学书籍、文章的过程中，特别是在阅读论及形式逻辑与数学相关联的内容的书时，见到的数学证明方法就更多了，例如：直接证法、间接证法、反证法、半反证法、同一法、演绎法、归纳法、完全归纳法、分析法、综合法、数学归纳法、逆向归纳法、多重归纳法、无穷递降法、轮换证法、抽屉证法、摄动法、循环证法、转圈证法、两两等价法、综合几法、三角法、代数法、向量法、余数法、集合等同法、唯一性法、极大极小法、初等证法、构造性证法、非构造性证法，等等。

面对这么多的证明方法，我们不得不提出下列问题：哪些方法是一般的？哪些方法是特殊的？哪些方法是属于逻辑的？哪些方法是属于技巧的？如何将这些方法分类？这些方法的正确性是由什么保证的？应该如何研究这些方法？等等。

我们将把这些方法分为一般的、较一般的与特殊的，而后分别予以讨论。下面我们先给出一个简单的说明。

人类的认识运动，有由特殊到一般的过程，又有由一般到特殊的过程，在形式逻辑中，前者称为归纳，后者称为演绎，相应地，在数学证明方法中，就有演绎法和归纳法。归纳法作为数学证明方法，指的是完全归纳法。

要证明一个数学命题，我们可以对命题本身采取两种做法：一种是直接证明命题自身的正确性，另一种是通过证明与要证命题等效的其他命题来证明命题自身。相应于前者的数学证明方法称为直接证法，相应于后者的数学证明方法称为间接证法。反证法、同一法、半反证法是几种不同的间接证法。

要证明一个数学命题，都有一个如何思索以求得证明的问题，都有一个从何着手的问题，按照思路的“顺”和“逆”，可分为两种：一种是由命题的条件入手，一步一步地推到结论；一种是

由命题的结论入手，一步一步地靠近条件，最后找到结论与条件之间的必然联系。相应的数学证明方法，前者称为综合法，后者称为分析法。

由上可知，演绎法是相对于归纳法而言的，直接证法是相对于间接证法而言的，综合法是相对于分析法而言的，这三对六种证明方法，是一般的、应用广泛的证明方法。我们将用三节讨论这三对六种证明方法，并且作为全部问题的重点。

数学归纳法是一种变态的演绎法，它是证明同自然数有关的命题的基本方法。就整个证明过程而言，它是归纳的，所以有归纳法的名字，但它又不同于完全归纳法，故称之为数学归纳法。我们将用一节对它作专门研究。反向归纳法、多重归纳法、无穷递降法均属于数学归纳法。数学归纳法是较一般的证明方法，也是我们研究的重点。

轮换证法是与分断式命题有关的一种证明方法。分断式命题全面反映了所研究对象的性质，是一类十分重要的命题。因此，我们也将以专门的一节来研究轮换证法。轮换证法也是较一般的证明方法。

其余的证明方法都是特殊证法。它们或是上述证明方法的推论，或是某种证明的技巧。就其使用的范围而言，它们或是属于某一个范围内的证法，或是为了证明某个问题而创造的方法。

研究证明方法的意义

论证能力，是一个人数学水平高低的基本标志之一，因此，不断提高论证能力，就成为学习数学的基本目的之一。研究数学证明方法的根本意义就在于此。

通过对某种数学证明方法的研究，使我们能够确信这种证明方法的合理性，加深理解这种证明方法，从而造成正确使用这种证明方法的条件。

通过对各种数学证明方法的通盘研究，将使我们思路开阔，在进行论证时，就能合理地选用证明方法。

通过分析自己和别人所作的数学证明，研究所使用的证明方法，考虑一下：为什么使用这种证明方法而不使用那种证明方法？还可以使用什么样的证明方法？日积月累，就会产生飞跃，在证明的方法和速度上将会有显著的提高。

通过研究已有的数学证明方法，注意在使用已有的数学证明方法中作改进，久而久之，就能创造出新的证明方法。

总之，通过对数学证明方法的研究，就能够很好地使用它、改进它，创造新的方法，从而不断提高数学论证能力。

证明方法的根据

各种证明方法的根据是什么？它们为什么是正确的方法？这是我们所要研究的首要问题。我们在这里先给出一个总的回答。

数学证明方法的总的根据是形式逻辑的基本规律：同一律、矛盾律、排中律、传递律.我们称之为的“传递律”，在一般的书上并没有这样讲，而是采取另外的表达方式。我们将把这四条规律写成简单的形式而经常使用。

数学证明是概念、判断、推理这三种思维形式的综合运用，因此，数学证明方法的根据是这三种思维形式的规律，特别地，是各种推理规律的进一步深化和发展。

同一律、矛盾律、排中律、传递律，是正确的思维规律，是千百年以来人类实践证实了的客观规律，具有公理的意义，因此，由它们出发而正确地推导出的证明方法是无可怀疑的。

在这里和前面，我们已经提到了一些数学及逻辑上的概念，而没有加以说明，按照数学证明要有“循序渐进”的顺序性的要求，这是不允许的，好在我们这开头的一节只是作一个概括性的介绍，下边，我们将按照顺序，从概念、判断、推理谈起，而后