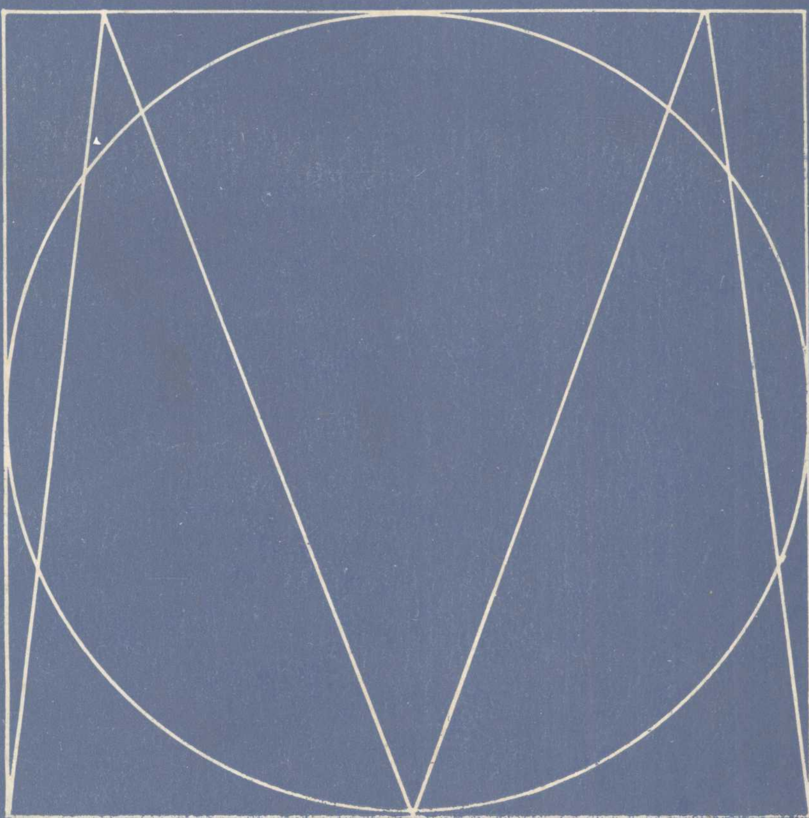
数学习题集

（苏）A·M·伯什卡拉等著　　谭彦科　兰纪正　译

●陕西师范大学出版社

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ



数 学 习 题 集

〔苏〕A.M.伯什卡拉等著

谭彦科　兰纪正　译

陕西师范大学出版社

СБОРНИК ЗАДАЧ ПО МАТЕМАТИКЕ

А.М.ПЫШКАЛО, Л.П.СТОИЛОВА.
Н.Н.ЛАВРОВА, Н.П.ИРОШНИКОВ.

МОСКВА «ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1979

数学习题集

〔苏〕A.M.伯什卡拉等著
谭彦科 兰纪正 译

●

陕西师范大学出版社出版
(西安市陕西师大120信箱)
陕西省新华书店发行 各地新华书店经售
西安外国语学院印刷厂印刷

●

开本787×1092 1/32 印张9.5 字数199千字
1985年11月第1版 1985年11月第1次印刷
印数1—10,000册
统一书号：7403·06 定价：2.10元

译 者 说 明

这本习题集，虽然是苏联教育部对苏联中等师范学生规定的必作习题，但是，因为它内容丰富，故对中学教师和学生都有着普遍意义，是一本很好的参考书。每章开始先简捷扼要地叙述基础知识，然后列出示范性例题，再列出习题，最后有一两套学生的自测题。自测题覆盖本章基础知识，可以检查“双基”掌握的情况。本书习题类型新颖多样，叙述方式灵活，适合学生心理状态。这本习题集不是任意汇编的一些零散习题，而是一本配合教材的、系统性较强的教学用书。“数理逻辑初步”一章写得更为突出，考虑到学生的接受能力，叙述方法通俗易懂，但不失数学的严格性。目前出现的数理逻辑一类书，大多偏深偏难，不适合中学生程度，使初学者不容易接受。学习这一章也可为学生学习计算机提供一些逻辑知识。“平面变换”一章，可启发师生把平面几何证题中的技巧系统化。其余几章也各有特点，这里就不一一介绍了。全书近 1000 个习题，较难者在书尾有解（证）法提示。

由于我们业务和外文水平有限，错误之处在所难免，希同志们批评指正。

译　者

一九八五年夏于陕西师范大学

目　　录

第一章　集合论初步

集合是数学的基本概念之一，通常用大写拉丁字母 A、B、C 等等表示集合．包括在集合内的自然界的任何对象，叫做集合的元素．

语句“对象 a 属于集合A”记作 $a \in A$，如果对象 a 不属于集合A，记作$a \notin A$.例如：如果A是正偶数集合，则$12 \in A$，$28 \in A$，$15 \notin A$，$-14 \notin A$，$0 \notin A$．

不包括任何元素的集合叫作空集（合），用符号ϕ表示．

如果对于任意的对象都可以指出，它属于或者不属于集集合 A，则称集合A是确定的．表示一个集合有下面两种方法：

1．列举出集合的所有元素．例如，仅有数1，2，3，4，5 属于集合A，则记作：$A = \{1,2,3,4,5\}$．

2．指出集合元素的本质属性．例如，集合 A 仅包含小于6的所有自然数，则记作：$A = \{x|x \in N，x < 6\}$．

集合间存在着不同的关系．如果集合 B 的每一个元素都属于集合 A，则称集合 B 是集合 A 的子集，记作 $B \subset A$．例如：$B = \{a, b, c\}$，$A = \{a, b, c, k, e\}$，则$B \subset A$．符号“$\subset$”称作“含于”符号，而关系 $B \subset A$ 称作含于关系．$A \subset A$ 和$\phi \subset A$ 成立．如果集合 A 包含 n 个元素，则它存在

2^n 个不同的子集。

如果集合 A 的每个元素都属于 B，且集合 B 的每个元素也都属于 A，则称集合 A 和 B 相等，记作 $A = B$. 例如：$A = \{2,3,4,5\}$ 且 $B = \{3,2,4,5\}$，则 $A = B$。

集合和它们间的关系可借助于欧拉圆表示.例如："是真子集"的关系借助于欧拉圆表示如图1。

对集合可施行并、交、差、笛卡儿积运算。

集合 A 和 B 的交是一个集合，它包括且仅包括既属于集合 A 又属于集合 B 的元素. 集合 A 和 B 的交记作 $A \cap B$。这样，

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{且} x \in B\} .$$

用欧拉圆表示集合 A 和 B 的交如图2。

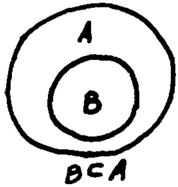


图1

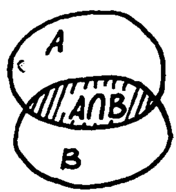


图2

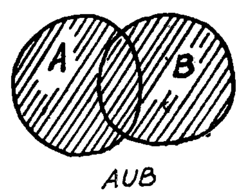


图3

集合A和B的并是一个集合，它包括且仅包括属于集合A或集合 B 的元素. 集合 A 和 B 的并，记作 $A \cup B$. 这样，

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{或} x \in B\}.$$

用欧拉圆表示集合 A 和 B 的并如图3。

集合交和并的运算满足下面的定律：

1. 交和并的交换律，即对于任何集合 A 和 B，有：$A \cap B = B \cap A$，$A \cup B = B \cup A$。

2. 交和并的结合律，即对于任何集合A、B 和 C，有：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。

3. 交对于并的分配律，即对于任何集合A、B和C，有：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。

应用集合的子集、交和并这些概念，可以把集合分为两两互不相交的子集或类。

如果满足下列三个条件，就称把集合 X 分为两两不相交的子集或类：

1. 所有子集非空。

2. 任何两个子集不相交。

3. 所有子集的并等于集合 X。

集合 A 和 B 的差是一个集合，这个集合的元素都属于 A 但不属于 B。集合 A 和 B 的差记作：A\B。这样，

$$A\backslash B=\{x|x\in A\text{且}x\notin B\}。$$

集合 A 和 B 的差用欧拉圆表示如图4。

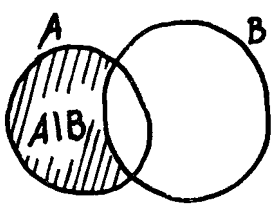


图4

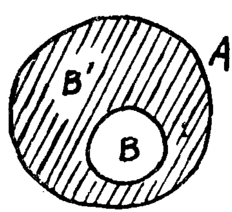


图5

如果 $B\subset A$，则集合 A 和 B 的差称为集合 B 对集合 A 的补集，表示为 B'（或B'_A）。在图5中，集合 B' 表示如图中的阴影部分。

对于任何集合 A 和 B 满足下列的定律：

$$(A\cap B)'=A'\cup B',\qquad (A\cup B)'=A'\cap B'.$$

集合A和B的笛卡儿积是一个集合，这个集合由第一个坐标属于A、第二个坐标属于B的所有对儿组成。集合A和B的笛卡儿积记作：$A\times B$。这样，

$$A\times B=\{(a,b)|a\in A且b\in B\}.$$

对于某些数集合有专门的表示：自然数集合用字母N表示，整数集合用字母Z表示，非负整数集合用字母Z_0表示，有理数集合用字母Q表示，实数集合用字母R表示。

范例1 已知：集合$A=\{m,k,l,n\}$，$B=\{m,n,p,t,y\}$，试求集合$A\cap B$，$A\cup B$，$A\backslash B$。

解：集合$A\cap B$由且仅由既属于A又属于B的元素组成，即由元素m和n组成：$A\cap B=\{m,n\}$。集合$A\cup B$的元素属于A或属于B，即$A\cup B=\{m,k,l,n,p,t,y\}$。集合$A\backslash B$的元素属于A但不属于B，即$A\backslash B=\{l,k\}$。

范例2 如果A是某班爱玩象棋的学生的集合，B是这个班爱玩跳棋的学生的集合，试指出下列集合元素的本质属性：$A\cap B$，$A\cup B$，$A\backslash B$。

解：集合A和B的交的元素是这个班既爱玩象棋又爱玩跳棋的学生，即$A\cap B=\{x|x$是既爱玩象棋又爱跳棋的学生$\}$。

集合A和B的并的元素是爱玩象棋或爱玩跳棋的学生，即

$A\cup B=\{x|x$是爱玩象棋或爱玩跳棋的学生$\}$。

注：属于集合$A\cup B$的学生，有爱玩象棋不爱玩跳棋的，有爱玩跳棋不爱玩象棋的，还有爱玩象棋又爱玩跳棋的。

集合 A 和 B 的差集包括爱玩象棋但不爱玩跳棋的学生，即

$A\backslash B=\{x|x$ 是爱玩象棋不爱玩跳棋的学生$\}$.

范例3 列举出集合 $A=\{3,4,5\}$ 和 $B=\{1,2,6,7\}$ 的笛卡儿积的元素。

解：因为集合 A 和 B 的笛卡儿积的元素是第一个坐标属于集合 A、第二个坐标属于集合 B 的数对，所以

$A\times B=\{(3,1),(3,2),(3,6),(3,7),(4,1),(4,2),$
$(4,6),(4,7),(5,1),(5,2),(5,6),(5,7)\}$.

范例4 在平面坐标系中，表示出集合 $X\times Y$ 的元素，如果：

1) $X=\{x|x\in N, 2\leqslant x\leqslant 5\}$,
$Y=\{y|y\in N, 1\leqslant y\leqslant 3\}$;

2) $X=\{x|x\in R, 2\leqslant x\leqslant 5\}$,
$Y=\{y|y\in R, 1\leqslant y\leqslant 3\}$.

解：1）集合 X 和 Y 都有有限个元素，所以，可以列举出 $X\times Y$ 的所有元素：$X\times Y=\{(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3)\}$。$X\times Y$ 的每一个数对都对应着平面坐标系上的一个点，其横坐标是数对的第一个数，纵坐标是数对的第二个数。作出坐标是集合 $X\times Y$ 元素的所有点，就得到集合 X 和 Y 的笛卡儿积在平面坐标系中的图象（如图6）。

2）集合 X 和 Y 有无限个元素，集合 X 是区间$[2;5]$。Y 是区间$[1;3]$。分别在 ox 轴和 oy 轴上标出这些区间。这时，集合 X 和 Y 的笛卡儿积的元素可以用矩形 ABCD 中的点表示（如图7）。

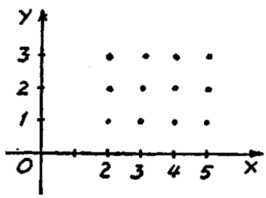


图6

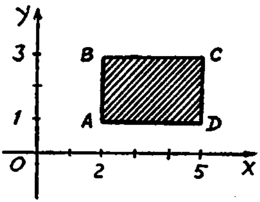


图7

范例5 证明：对于任何集合 A、B和C，等式 $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$成立。

解：设$x\in A\setminus(B\cup C)$，根据差集的定义，有$x\in A$且$x\notin B\cup C$，所以$x\notin B$且$x\notin C$；因为$x\in A$且$x\notin B$，则$x\in A\setminus B$；而$x\in A$且$x\notin C$，得$x\in A\setminus C$。由此，根据交集的定义有：$x\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$.这样，如果x是集合$A\setminus(B\cup C)$的任何一个元素，则x属于集合$(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$。

设$y\in(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$，根据交集的定义，则有$y\in A\setminus B$且$y\in A\setminus C$。$y\in A\setminus B$时，根据差集的定义，则$y\in A$且$y\notin B$。同时，$y\in A\setminus C$时，可得$y\in A$且$y\notin C$。因为$y\notin B$且$y\notin C$，根据并集的定义得，$y\notin B\cup C$，则$y\in A\setminus(B\cup C)$。这样，如果y是集合$(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$的任一个元素，则它属于集合$A\setminus(B\cup C)$。

总之，对于集合$A\setminus(B\cup C)$的任一个元素都属于集合$(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$，反之也成立。所以对于任何集合A、B及C，等式$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$成立。

§ 1　集合的概念、集合的元素

1. M 是小歌舞乐队乐器的集合，试问：下列乐器属于这个集合吗？

1) 鼓；　2) 吉塔；　3) 吉塔弦；　4) 三弦琴.

2. 写出你房间中电器集合的元素.

3. 写出师范学校一年级学生学习用具集合的元素.

4. A 是平面上几何图形的集合，试问：下列几何元素属于这个集合吗？

1) 五边形；　2) 直线；　3) 立方体；　4) 圆；　5) 点.

5. K 是上数学课教室木器的集合，弄清楚下列推断中的正确的：

1) 黑板属于集合 K.

2) 桌是集合 K 的元素.

3) 装着直观教具的书厨属于集合 K.

4) 窗户不是集合 K 的元素.

5) 挂在墙上的画像属于集合 K.

6) 门属于集合 K.

6. 字母 C 表示所有俄语字母的集合，指出下列推断中正确的：

1) $Б \in C$；　2) $Ю \in C$；　3) $Z \notin C$；　4) $t \in C$；

5) $33 \in C$.

7. 数5属于自然数集合N，试问：下列推断正确吗？

1) $15 \in N$；　2) $\frac{3}{4} \in N$；　3) $17.5 \in N$；

4) $-37 \in N$；　5) $13457 \in N$.

8. N是自然数集合，K是正偶数集合，M是能被3整除的自然数的集合。应用符号“$\in$”，试分别写出数4、12、79、$\frac{5}{8}$属于给定的那些集合。应用符号“$\notin$”，写出这些数分别不属于给定的那些集合。

9. F是圆周上点的集合。试分别指出图8中属于圆周和不属于圆周的点，并且弄清下列推断中的正确的：

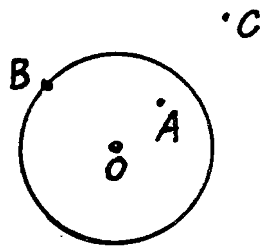


图8

1) $O\in F$;　2) $A\notin F$;

3) $B\in F$;　4) $C\notin F$.

10. K是圆面上的集合，试指出图8中满足下列条件的点：

1) 属于圆面；

2) 不属于圆面；

3) 属于圆面，但不属于圆周。

11. 考察图9，试弄清下列推断中的正确的：

图9

1) $X\in[A,B]$;　2) $X\notin(A,B)$;　3) $X\in[A,B)$;

4) $X\notin[B,A)$;　5) $Y\in[A,B)$;　6) $Y\notin[A,B]$;

7) $X\in[X,B)$;　8) $X\notin(X,Y)$;　9) $Y\in(X,Y)$.

12. 试指出下列语句中，说的是元素属于（或不属于）集合的关系的语句；是这种关系的，试指出这个集合：

1) “房间”一词是名词。

2) 玛莎是女少先队员。

3) 12是自然数。

4) 线段 AB 是几何图形。

5) $5\frac{3}{4}$不是自然数。

6) 梯形不是五边形。

7) 一星期内有几天？

8) 多么晴朗的天！

13. X 是某师范学校教学班的集合。试问：这个学校的某个学生是集合 X 的元素吗？

14. 集合 Y 的元素是字母的集合。$Y=\{\{a,b\},\{K,C,H\},\{o,n,p,u\}\}$。试问：下列推断正确吗？

1) $\{K,C,H\}\in Y$；　2) $a\in Y$；　3) $\{a,n\}\notin Y$；

4) $\{a,b\}\in Y$。

§2　确定集合的方法

15. 已知集合：

A—世界上洲的集合；

B—地球上海洋的集合；

C——一年里月的集合；

D—单词“parallel”中字母的集合。

1) 用指出集合的元素的本质属性的方法确定每一个集合。

2) 用列举集合所有元素的方法确定每一个集合。

16. 试指出下列每个集合元素的本质属性：

M＝{星期一，星期二，星期三，星期四，星期五，星期六}；

P＝{莫斯科，基辅，塔林，里加，维尔扭斯，基希涅

夫，梯比里斯，埃里盟，明斯克，杜善别，阿拉木图，伏龙芝，阿什哈巴德，巴库，塔什干}。

17．确定下列集合元素的本质属性，并且列出它们的元素：

1） 一位数的集合；

2） 能够整除24的自然数的集合；

3） 能被10整除的两位自然数的集合。

18．已知：$A=\{1,3,5,7,9\}$，$B=\{12,11,10,9,8,7\}$，$C=\{11,22,33,44,55,66,77,88,99\}$，试分别写出每一个集合元素的本质属性。

19．读读下列记号，并且列出每个集合的元素：

$A=\{x|x\in\mathbf{N},\ x<3\}$；

$B=\{x|x\in\mathbf{N},\ 1<x<3\}$；

$C=\{x|x\in\mathbf{Z}_0,\ x<3\frac{1}{2}\}$；

$D=\{x|x\in\mathbf{Z},\ -5<x\leqslant 2\}$；

$E=\{x|x\in\mathbf{Z},\ -7\leqslant x\leqslant -2\}$。

20．读读下列记号，并在数轴上表示每个集合：

$A=\{x|x\in\mathbf{R},\ -3\leqslant x\leqslant 2\}$；

$B=\{x|x\in\mathbf{R},\ -3.5<x<2.6\}$；

$C=\{x|x\in\mathbf{R},\ x\geqslant -4.2\}$；

$D=\{x|x\in\mathbf{R},\ x<7\}$；

$E=\{x|x\in\mathbf{R},\ x\leqslant 5\}$；

$K=\{x|x\in\mathbf{R},\ x>0\}$。

21．试指出图10中所表示的各数集的元素的本质属性。

22．如果：$K=\{y|y+5=9\}$；$P=\{z|z(z+2)=0\}$；$M=\{x|4(3x-7)=-28+12x\}$。试弄清，集合K，P，M中