

大學用書

統計推論

第一冊

Dr. Jerome C. R. Li 原著

袁 丕 志 編譯

維新書局印行

序

統計學之所以成爲研究各種科學之重要工具，實由於近代小樣本之統計方法理論，發展迅速，應用範圍廣泛所致。唯因一般高等統計學之書籍，涉及高深數學理論，致使研習統計學者增加甚多之困難，爲解除此種困難起見，前美國奧勒岡州立大學（Oregon State University）統計系主任吾師李博士景仁（Dr. Jerome C. R. Li）乃用非數學之實驗方法，著述統計推論（Statistical Inference）一書——介紹統計方法之原理，自發行以來備受世界各國統計學者之推崇。

余講授高等統計學有年，然苦無適當之教本，乃商得吾師李博士之同意准予採用其所著，以淺顯之文字，編譯成統計推論一書，於民國六十二年增訂分成一、二、三冊。以便適合大專有關科系研習高等統計學之用。

本書之最大特點，即爲對於未曾研習高深數學者，若能精讀是書並親加實驗，必能對統計學之原理融會貫通。

本書之得以成簡，首先得感謝吾師李博士景仁准予採用其原著——Statistical Inference 加以編譯。其次趙學長少平撥冗予以斧正，王士華先生賜示珍見，莊彩雲小姐抄錄書稿。劉煥英先生代爲籌劃出版亦併此誌謝。至舛誤之處在所難免，尚祈諸先進不吝賜教，庶能於再版時加以改正。

袁丕志

中華民國六十二年九月九日

統計推論

目 錄

序	iii
---	-----

第一章 緒論

1.1 統計推論	1
1.2 本書之參閱方法	3

第二章 統計敘述

2.1 數學符號	4
2.2 平均數	5
2.3 變異數與標準差	5
2.4 觀察值變動時對平均數與變異數之影響	9
2.5 次數表	12
2.6 直方圖與次數曲線	15
2.7 附註	17
習題	19
問題	21

第三章 常態分配

3.1 常態曲線之性質	23
3.2 常態曲線表	27

3.3	常態機率圖紙	29
3.4	機率	32
	習題	33
	問題	34

第四章 抽樣實驗

4.1	母全體之說明	35
4.2	樣本之抽取	39
4.3	各種量值之計算	41
4.4	參數與統計量值	41
4.5	抽樣實驗之目的	42

第五章 樣本平均數

5.1	抽樣方法表解	43
5.2	樣本平均數之分配	47
5.3	全部樣本平均數的平均數與變異數	52
5.4	有關符號之說明	54
5.5	樣本平均數之可靠性	54
5.6	定理之實驗證明	56
5.7	附註	60
	習題	61
	問題	62

第六章 假設之測驗

6.1	假設	63
-----	----	----

6.2	兩種誤差	65
6.3	顯著水準	67
6.4	第二種誤差	71
6.5	樣本大小	73
6.6	提要	75
6.7	u 測驗	76
6.8	假定	77
6.9	假設之測驗的步驟	78
6.10	附註	79
	習題	81
	問題	82

第七章 樣本變異數— χ^2 分配

7.1	研究樣本變異數之目的	84
7.2	樣本變異數	85
7.3	不偏估計值	90
7.4	各種統計量值之平均數	91
7.5	χ^2 分配	95
7.6	u^2 之分配	100
7.7	SS/σ^2 之分配	102
7.8	代數恒等式之證明	107
7.9	變異數之分析	109
7.10	假設之測驗	111
7.11	假設之測驗的步驟	115
7.12	假設之測驗的實際應用	118

7.13 附註.....	117
習題.....	118
問題.....	120

第八章 t 分配

8.1 t 分配之形成.....	122
8.2 t 分配之實驗證明.....	124
8.3 t 表.....	127
8.4 假設之測驗.....	127
8.5 假設之測驗的步驟.....	129
8.6 假設之測驗的實際應用.....	130
8.7 被配成對之觀察值.....	131
8.8 附註.....	135
習題.....	136
問題.....	140

第九章 變異數比率— F 分配

9.1 F 分配之形成.....	141
9.2 F 分配之實驗證明.....	144
9.3 F 表.....	146
9.4 假設之測驗.....	147
9.5 假設之測驗的步驟.....	417
9.6 樣本變異數之加權平均數.....	419
9.7 F 分配與 χ^2 分配之間的關係.....	153
9.8 附註.....	154

習題.....	155
問題.....	157

第十章 樣本平均數間之差異

10.1 樣本平均數間差異之分配.....	158
10.2 樣本平均數間差異分配之實驗證明.....	168
10.3 u 分配.....	165
10.4 t 分配.....	169
10.5 t 分配之實驗證明.....	171
10.6 假設之測驗的步驟.....	173
10.7 樣本之大小相等的優點.....	175
10.8 假設之測驗的實際應用.....	177
10.9 隨機抽樣之方法.....	178
習題.....	180
問題.....	183

第十一章 可信區間

11.1 不等式.....	184
11.2 區間估計.....	185
11.3 可信區間與可信係數.....	186
11.4 平均數之可信區間.....	160
11.5 平均數之差異的可信區間.....	192
習題.....	194
問題.....	195

第十二章 變異數之分析—單一分類法

12.1	總平方和分解之程序	195
12.2	平方和之分解在統計學上的意義	201
12.3	SS 及 F 值之計算方法	206
12.4	變異數之各組成部份及模式	210
12.5	假設之測驗的步驟	214
12.6	t 分配與 F 分配之間的關係	218
12.7	假定	220
12.8	變異數分析之應用	222
12.9	特殊測驗	224
12.10	樣本大小不等之測驗	224
12.11	樣本大小相等之優點	228
	習題	231
	問題	235

第十三章 複 習

13.1	全部樣本	236
13.2	各種次數分配間之關係	237
13.3	假設之測驗	239
13.4	顯著性	241
13.5	樣本大小	241
13.6	誤差	242
13.7	附錄各表之用途	243

第十四章 隨機集區 (任意集區)

14.1	隨機集區實驗與完全隨機實驗之區別	245
14.2	平方總和分解之程序	247
14.3	平方總和之分解在統計學上的意義	251
14.4	變異數分析之計算方法	256
14.5	假設之測驗之步驟	259
14.6	被配成對之觀察值與隨機集區	259
14.7	缺損觀察值之實驗的計算法	261
14.8	較小的實驗誤差之優點	265
14.9	變異數分析之模式	267
14.10	觀察值變動之影響	268
	習題	273
	問題	277

第十五章 變異數分析中的特殊假設之測驗

15.1	直線結合	278
15.2	直線結合的分配	280
15.3	單一自由度	286
15.4	最小顯著差異	301
15.5	新的多種差距測驗方法	309
15.6	S 方法	310
	習題	313
	問題	315

第十六章 直線迴歸——(一)

16.1	迴歸的基本概念	319
16.2	母全體之說明	321
16.3	參數的估計值	322
16.4	平方和之分解	330
16.5	平方和之次數分配	334
16.6	各組列變異數的估計數	339
16.7	假設之測驗	340
16.8	相關係數	341
16.9	代數恒等式與計算方法	345
	問題	348
	習題	349

第十七章 直線迴歸——(二)

17.1	抽樣實驗	353
17.2	樣本平均數之分配	355
17.3	樣本迴歸係數的分配	357
17.4	修正平均數之分配	363
17.5	迴歸 SS 的平均值	369
17.6	直線迴歸與變異數分析間之比較	371
17.7	迴歸之直線性的測驗	377
17.8	單一自由度	381
17.9	附註	386

17.10 各種統計量值的次數分配之摘要.....	387
習題.....	391
問題.....	395

附 錄

表 1.....	399
表 2.....	419
表 3.....	429
表 4.....	430
表 5.....	431
表 6.....	432
表 7a	433
表 7b	435
表 7c	437
表 7d	439
表 8a	441
表 8b	442
習題解答.....	448

第一章

緒論

(INTRODUCTION)

自科學昌明以後，人們所研究之事象，不僅範圍廣泛，而其分類亦更形精細，然其所用之方法，則不外乎兩種：其一為**演繹法**(deduction method)即數學；另一為**歸納法**(induction method)即統計學。但不論用演繹法或歸納法，均需先將所欲研究之事象以數字表示之。故科學研究之主要過程，亦即將事象加以數量化之處置。

各種科學發展之先後，也可以其應用數學與統計學之多寡而測定之。凡發展較早之科學，其基本原則均已大致完成，故可根據此種原則，利用數學原理演繹出更多的新知。但新興科學則只能以統計方法來推論其基本原則。茲試以物理學與生物學為例，即可知前者應用數學之處較統計學為多。另據遺傳學之發展而論，尤為一顯明之佐證，蓋早期之遺傳學全賴統計學之歸納法去探討問題，直至近代有關遺傳定律既經確定之後，應用數學之方法去研究遺傳問題始漸趨廣泛。且部份羣體遺傳學之研究已不着重於實驗工作，而僅由前所獲致之原則即可導出新知。

總之；統計學是一種由實驗資料去尋求結論之工具科學，近六十年來統計知識之發展甚速，但可直接應用於實際問題之統計方法則仍甚有限，故本書即以致力於闡述其原理及一般常用之統計方法為主旨。

§ 1.1 統計推論 (Statistical Inference)

概括地說，**統計學**(statistics)乃指資料之蒐集與表列以及據此資

料獲致結論的一種科學。細分之，則其中有關資料之蒐集與表列以及各種數值之計算如平均數、離差及指數等均屬於統計敘述 (descriptive statistics) 範圍之內。而將此種資料用有系統之方法加以分析，獲致結論之步驟則稱為統計推論。準此，就統計推論而言，各種平均數以及百分數的計算等，只被認為是一種附屬部份，也就是說統計學乃是為達到目的的一種工具，而並非目的之本身。

通常統計學家的專用字彙，乃由普通字詞組成而賦予其特殊意義。舉例而言，一個觀察值 (observation) 在統計學中乃指一事物之數值記錄，如某人之身高為 170 公分即是觀察值。母全體 (population) 則為許多同類之觀察值，如某大學全體學生之各個身高數值。其中每一個學生之個別身高數值稱為觀察值；全體學生之各個身高數值總稱為該羣觀察值之母全體（此處所應注意者，母全體乃是指此全校學生之各個身高數值，並非指此全校之學生數）。樣本 (sample) 是指從母全體數值中所抽出之若干個觀察值而言，假定某校全體學生之身高數值組成一個母全體，則從其中抽出若干個學生之身高數值即組成一個樣本。

所謂隨機樣本 (random sample) 乃指從母全體中抽出若干個觀察值組成一個樣本時，其母全體中之每一個觀察值均有同等被抽出之機會。統計推論之步驟即是根據所抽出之樣本，經有系統之分析，而獲得有關該母全體具有某種特性的結論之謂也。

設若吾人對某種母全體資料之特性均屬已知，則樣本之抽取顯無必要，反之；如果吾人對此種母全體資料之特性無法獲悉，則不得不藉助於樣本之抽取，庶可據以推斷其全體之特性。例如：一個製造燈泡之工廠欲知其產品——燈泡之使用壽命，他自然不能為了求得此一答案而將每一燈泡都通電來試驗其耐用時間之長短，是以他只能從其中抽出若干個燈泡加以精密之試驗，根據此少數受試燈泡之試驗結果來推

斷其全部燈泡產品之耐用時限。若該工廠宣稱其產品每一燈泡之使用壽命為 2,000 小時，則此種結論即是根據從其母全體中抽出若干樣本加以精密試驗之結果，是故吾人購買該廠出品之燈泡時，當知：(1)凡是經過試驗之燈泡永不會在市場上出現。(2)在市場上出售之燈泡均未經過試驗。故統計推論即是根據從母全體中抽出之少數個體所組成之樣本，用有系統之方法來尋出一個結論以推斷母全體之特性是也。

統計推論，在目前已被廣泛的應用於科學研究與工業產品之管理上。科學家們，常以動植物來作實驗，而以統計方法分析之，其目的並不在實驗所用的動植物本身（即樣本）之特性如何？而是意欲根據研究此種資料之結論，尋求有關其母全體之特性。利用這種方法研究問題，科學家稱之為歸納法，而統計學家則稱之為統計推論。是故統計推論，是科學方法之一種，而為實驗科學工作者所不可或缺的一種工具學科。

§ 1.2 本書之參閱方法(Reference System)

本書內容，前後一貫，而其中之定理及圖表，則互有關連，茲為讀者閱讀便利起見，乃將各種定理及圖表，分別編成附錄，並註明出現之頁數，附於書後，以便讀者查閱，其編排方式舉例說明如下：

如果在一節中有數條定理，則分別以 a, b, c 等英文字母表示之，例如 2.4a 和 2.4b 表示第二章第四節定理一，定理二等，餘類推，有關各種符號之意義及縮寫字等，均列表說明並附於書後，至於習題解答，則是一部附於題後，一部附於書後。

第二章

統計敘述

(DESCRIPTIVE STATISTICS)

本章僅就有關統計敘述部份之量值的計算加以複習，俾便今後研究統計推論時易於明瞭。

§ 2.1 數學符號(Mathematical Notations)

在統計學裡最常用的一個符號即是大寫希臘字母之 Σ (讀Sigma, 其意義表示總和。觀察值通常用 y 表之, $y_1, y_2, y_3, \dots, y_N$ 表第一觀察值第二觀察值, 第三觀察值等以迄第 N 個觀察值。例如有五個觀察值分別為3, 2, 1, 3, 1則吾人以符號表之依次為 y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 。此五個觀察值之總和以 Σy 表之即

$$\Sigma y = y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 3 + 2 + 1 + 3 + 1 = 10。$$

除 Σy 為吾人所常用外，尚有 Σy^2 及 $(\Sigma y)^2$ 亦常被應用。 Σy^2 表各觀察值平方之總和，即

$$\Sigma y^2 = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + y_4^2 + y_5^2 = 9 + 4 + 1 + 9 + 1 = 24。$$

各觀察值總和之平方寫成 $(\Sigma y)^2$ ，即

$$(\Sigma y)^2 = (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)^2 = (3 + 2 + 1 + 3 + 1)^2 = 10^2 = 100。$$

各種符號完全是為書寫便利而設，其本身並無特殊意義，吾人只需知其所代表者為何即可。

Σy^2 與 $(\Sigma y)^2$ 驟然視之雖甚為相似，但事實上這兩個符號所表示之運算方法卻完全不同，如果各數值先平方再加起來其結果即為 Σy^2 ，若各數值先加起來然後再平方則成為 $(\Sigma y)^2$ ，其間不同之處，即在數學

運算之程序上有所差異而已，前者是表示先自乘然後再加起來，而後者則是先加起來得到總和後再自乘。

§ 2.2 平均數(Mean)

所謂母全體之平均數，即是母全體中，各個觀察值之總和除以其項數，所得之商是也。假定有三支木棒，其長度依次為3寸，1寸及8寸，則其平均長度即為 $(3+1+8)/3$ 亦即為 $12/3=4$ 寸，如用符號表示之，即為

$$\mu = \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_N}{N} = \frac{\sum y}{N} \quad (1)$$

式(1)中 μ (讀mu)表平均數， y 是觀察值， N 是觀察值之個數，其中之三個點表示省略未寫出之若干個觀察值。

一個式子不應視為一組毫無意義的符號去死記，而應該把它當作一句有意義的話語來加以理解。例如公式(1)如果用一句話來敘述，即成為「母全體之平均數，等於其各個觀察值相加之總和，除以其觀察值之個數」。茲將各個符號所代表此句中之意義對照說明如下：

母全體之平均數	μ
等於	=
各個觀察值	y
相加之總和	Σ
除以	—
觀察值之個數	N

由上可知一個公式是用來說明某種意義的話語。

§ 2.3 變異數與標準差(Variance and Standard Deviation)

母全體之變異數(variance)是表示該母全體中各個觀察值間之離勢(variation)的一個測度數(measure)，例如表 2.3a 中所示 a, b, c, d

四個母全體之平均數雖然皆等於 4，但各觀察值間之離勢則不相同，在母全體 a 中各觀察值間沒有離勢，在母全體 b 中各觀察值間已有離勢，在 c 中其離勢已較大，而在 d 中其離勢則更大。

使人最易瞭解之離勢測度數為全距 (range)，全距即母全體各觀察值中最大量數與最小量數之差。如表 2.3a 所示，則其四個母全體之全距分別為 0, 5, 8, 和 11。

除全距以外，還有許多衡量離勢之測度數，其中最重要的一個即稱為變異數，其計算方法如下式：

$$\sigma^2 = \frac{(y_1 - \mu)^2 + (y_2 - \mu)^2 + \cdots + (y_N - \mu)^2}{N} = \frac{\sum (y - \mu)^2}{N} \quad (1)$$

式(1)中 σ^2 為變異數， μ 為平均數， y 為觀察值， N 是觀察值之個數。茲將表 2.3a 中四個母全體之變異數計算如下：

$$(a) \sigma^2 = \frac{(4-4)^2 + (4-4)^2 + (4-4)^2}{3} = 0$$

$$(b) \sigma^2 = \frac{(2-4)^2 + (3-4)^2 + (7-4)^2}{3} = \frac{4+1+9}{3} = \frac{14}{3}$$

$$(c) \sigma^2 = \frac{(1-4)^2 + (2-4)^2 + (9-4)^2}{3} = \frac{9+4+25}{3} = \frac{38}{3}$$

$$(d) \sigma^2 = \frac{(0-4)^2 + (1-4)^2 + (11-4)^2}{3} = \frac{16+9+49}{3} = \frac{74}{3}$$

變異數的平方根稱為標準差 (standard deviation) 也是用來測量離勢的一個測度數。本章所討論之離勢測度數僅為變異數與標準差，事實上二者是一體之兩面，如知其一即可求出另一個離勢的測度數。

至於標準差之「標準」兩字，並非指利用該種測量離勢之尺度為標準，其他測度離勢之量數即不標準，吾人用標準兩字只不過為了區別與本書所未討論之其他離勢測度數如平均差 (mean deviation)，四分位差 (quartile deviation.) 等有所不同而已。

吾人對於變異數之計算方法，雖然可能感到陌生，但對於變異數